

文章编号: 1000-0887(2005) 12-1479-08

# 固壁近旁 Stokes 流中粘性液滴的运动和变形\*

陆华剑, 张慧生

(复旦大学 力学与工程科学系, 上海 200433)

(戴世强推荐)

**摘要:** 发展了一种模拟固壁近旁轴对称 Stokes 流中粘性液滴的运动和变形及直接计算固壁上应力的边界积分方法。用此方法对不同的液滴-固壁初始相对间距、粘度比、表面张力和浮力联合参数以及环境流动参数情况进行了数值实验。数值结果显示, 由于环境流动和浮力的作用, 随着时间的推进, 液滴在轴向压缩, 在径向拉伸。当环境流动的作用弱于浮力作用时, 随着时间的推移, 液滴上升并向上弯, 固壁上由液滴运动所引起的应力不断减小。当环境流动的作用强于浮力作用时, 随着时间的推移, 液滴变得越来越扁。在这种情形, 当大初始间距时, 壁面上的应力随液滴的演变而增大; 当小初始间距时, 由环境流动、浮力及壁面对流动的较强作用的联合影响, 此应力随液滴的演变而减小。由于液滴运动所引起的壁面应力的有效作用仅限于对称轴附近的一个小范围内, 且此范围随液滴与固壁的初始间距增大而增大。应力的随初始间距增大而大为减小。表面张力对液滴变形有阻止作用。液滴粘性会减小液滴的变形和位置迁移。

**关键词:** 粘性液滴; 轴对称 Stokes 流; 固壁; 运动和变形; 应力; 边界积分方法

**中图分类号:** O357.1      **文献标识码:** A

## 引 言

近年来, Stokes 流中粘性液滴的结构和动力学以及它们与固体边界和液体界面的相互作用已受到人们的很大关注。这一题材的兴趣主要受到乳化流变学的理解, 多组分混合机理的描述以及生物细胞的分析等多方面的需要所推动。所观察到的微观质点和微组织的聚合时显示的类似于悬浮的均匀粘性液滴的行为, 为此研究提供了另外的推动力。这一问题对诸如血液流动的微尺度机制, 大气水分下降的微尺度物理, 三次采油和地幔的对流等科学和工程的多种领域有着应用。

当液滴变形任意时, 这类问题可用基于 Ladyzhenskaya 工作<sup>[1]</sup>的边界积分方法数值求解。用这种方法, Youngren 和 Acrivos 研究了轴对称地置于一无限拉伸流中的无粘气泡的定态形状<sup>[2]</sup>, Rallison 和 Acrivos 研究了自由悬浮在无限拉伸流中的一粘性液滴的变形和破裂条件<sup>[3]</sup>, Chi 和 Leal 研究了较重液体中的一个较轻粘性液滴向流体界面的运动<sup>[4]</sup>, Pozrikidis 研究了无

\* 收稿日期: 2004\_01\_20; 修订日期: 2005\_05\_31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272032)

作者简介: 陆华剑(1979—), 男, 上海人, 硕士研究生(E-mail: 022029010@fudan.edu.cn);

张慧生(联系人, Tel: + 86\_21\_65642741; E-mail: hszhang@fudan.edu.cn)。

限流体中的一个初始球状液滴受轴对称摄动后的运动和变形<sup>[5]</sup>, 重力作用下的粘性液滴朝固壁的运动和变形<sup>[6]</sup>及 Stokes 流中的一个质量可忽略的并受指定膨胀率支配的二维或三维无粘气泡内部的压力分布<sup>[7]</sup>, 陈建国研究了液滴沿中心轴线穿过圆孔时的变形<sup>[8]</sup>。文献[4]~ [7]假设环境流体静止。文献[6]采用了无限平壁近旁的 Green 函数, 使边界积分方程仅涉及液滴表面, 并且未给出固体表面上应力的任何信息。然而, 在实际应用中常会出现液滴处于某环境流体中且固壁上应力的信息非常重要的情况(如在动脉血管中血管壁上的应力与组织的非正常生长有着密切的关系)。受实际应用需要的推动, 本文研究固壁近旁的 Stokes 流中粘性液滴的运动和变形以及固壁上的应力。虽然采用 Green 函数后, 支配方程中不出现沿固体壁面的积分, 使得方法对于仅涉及液滴运动和变形的问题非常有效; 然而, 当固壁上的应力重要时, 用这种方法计算包括流体压力在内的壁面上的应力变得十分复杂, 而壁面上的应力是本文方法的一个直接结果。

### 1 支配方程和数值方法

如图 1 所示, 在无限固壁  $T: x_1 = 0$  之上有一个表面为  $S$  粘度为  $\lambda\mu$  的液滴  $\Omega$  浸没在另一种粘度为  $\mu$  的不可混液体  $D$  中。本文假设牛顿流体并设液滴足够小以使由它们引起的流动可用 Stokes 流来合理的近似。令  $\mathbf{n}$ 、 $\gamma \mathbf{f} = \sigma \cdot \mathbf{n}$ 、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  和  $p$  分别是边界上指向流体  $D$  的单位法向量、 $S$  上的表面张力和应力、流动速度和压力,  $\mathbf{f}^\infty$ 、 $\mathbf{u}^\infty$  和  $p^\infty$  分别是区域  $D$  中粘度为  $\mu$  的环境 Stokes 流的应力、速度和压力, 则流动的边界条件为  $\mathbf{u}|_{x_1=\infty} = \mathbf{u}^\infty$ 、 $p|_{x_1=\infty} = p^\infty$ 、 $\mathbf{u}|_{x_1=0} = \mathbf{0}$ 、 $[\mathbf{u}]_S = \mathbf{0}$ 、 $[\mathbf{f}]_S = (\Delta\rho g x_1 + \gamma(\cdot \cdot \cdot \mathbf{n})) \mathbf{n}$ , 其中  $\Delta\rho = \rho_{in} - \rho_{out}$ ,  $\rho$  是流体的密度,  $g$  是重力加速度,  $[\cdot]_S = (\cdot)_{S, out} - (\cdot)_{S, in}$  为某量越过  $S$  时的跃值。

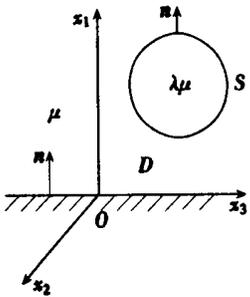


图 1 流动图案

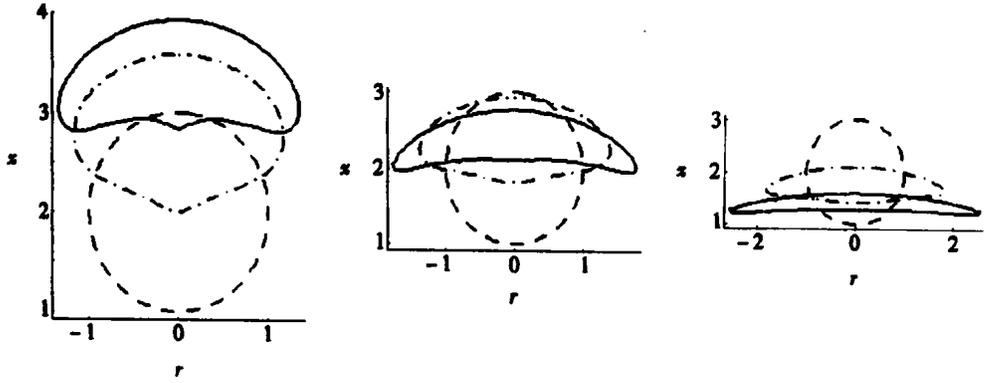
本文假定流动是轴对称的并且液滴初始时为球形。轴向坐标和径向坐标分别为  $x$  和  $r$ 。速度的轴向和径向分量分别为  $u$  和  $v$ 。在本文中取  $u^\infty = -\alpha x^2$ ,  $v^\infty = \alpha x$ ,  $p^\infty = -2\alpha\lambda x$ , 其中  $\alpha$  是常数。取液滴半径  $a$ 、 $u_0 = |\Delta\rho|ga^2/(8\pi\mu)$ 、 $t_0 = a/u_0$  和  $p_0 = 8\pi\mu u_0/a$  分别为长度、速度、时间和压力的标尺, 引入无量纲量  $\mathbf{x} = \mathbf{x}/a$ 、 $\mathbf{y} = \mathbf{y}/a$ 、 $\mathbf{u} = \mathbf{u}/u_0$ 、 $\mathbf{f} = \mathbf{f}/p_0$ 、 $u^\infty = -x^2$  和  $v^\infty = rx$ , 并去掉无量纲量上的记号“~”, 可得无量纲方程

$$\frac{1}{2}(1 + \lambda)u_i(\mathbf{x}) - \frac{3}{4\pi}(1 - \lambda) \int_S K_{ijk}(\mathbf{r})u_j(\mathbf{y})n_k(\mathbf{y})ds_y + \int_T J_{ij}(\mathbf{r})f_j^* ds_y = \beta u_i^\infty(\mathbf{x}) - \int_S J_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{y})[\text{sign}(\Delta\rho)y_1 + \Gamma(\cdot \cdot \cdot \mathbf{n})]ds_y \quad (\mathbf{x} \in S), \quad (1)$$

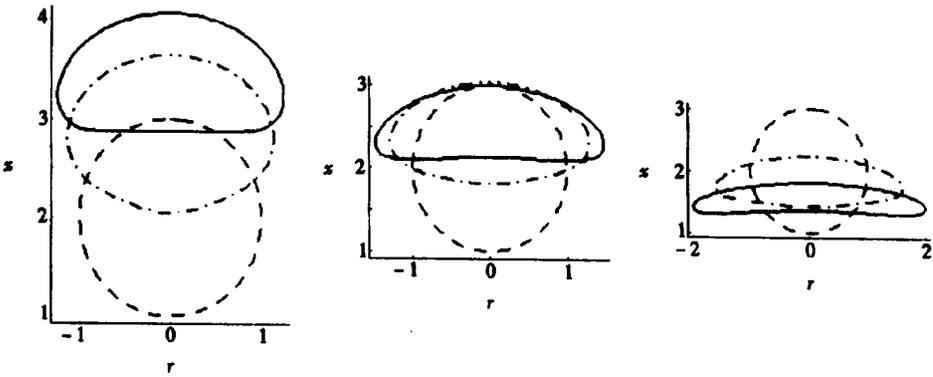
$$- \frac{3}{4\pi}(1 - \lambda) \int_S K_{ijk}(\mathbf{r})u_j(\mathbf{y})n_k(\mathbf{y})ds_y + \int_T J_{ij}(\mathbf{r})f_j^* ds_y = - \int_S J_{ij}(\mathbf{r})n_j(\mathbf{y})[\text{sign}(\Delta\rho)y_1 + \Gamma(\cdot \cdot \cdot \mathbf{n})]ds_y \quad (\mathbf{x} \in T), \quad (2)$$

其中  $\mathbf{f}^* = \mathbf{f} - \mathbf{f}^\infty$ ,  $\beta = \alpha a^2/u_0$ ,  $\Gamma = \gamma/(|\Delta\rho|ga^2)$ 。在本问题的无量纲形式中, 共有 4 个无量纲参数: 环境流动参数  $\beta$ 、粘度比  $\lambda$ 、表面张力和浮力联合参数  $\Gamma$  以及初始时刻液滴的中心到固壁的距离和液滴初始半径的比值  $L$ 。式(1)和(2)是以  $S$  上的速度  $\mathbf{u}$  和  $T$  上的应力  $\mathbf{f}^*$  为未知函数的积分方程。如果在  $t$  时刻知道了液滴的形状, 那么就可以通过求解方程组(1)和

(2) 来获得  $S$  上的速度  $u$  和  $T$  上的应力  $f^*$ 。然后由  $f = f^* + f^\infty$  可得  $T$  上的应力  $f$ 。通过对方程  $dx/dt = u(x), (x \in S)$  关于时间  $t$  积分可得液滴在  $t + \Delta t$  时刻的形状。因为本问题是轴对称的, 式(1)和(2)中的积分核可沿方位角方向精确求积, 这样就把式(1)和(2)化为沿液滴表面和固壁子午线的积分。化约后的积分方程中的被积函数含有第一类完全椭圆积分, 它们的奇性可以通过减去一个恰当的对数函数来消除。这样被积函数为光滑函数或对数奇性的函数。



(a)  $\Gamma = 0$



(b)  $\Gamma = 0.1$

从左到右  $\beta = 0.25, 0.5, 1$ , - - -:  $t = 0$ ; - · - :  $t = 0.25$ ; —:  $t = 0.5$

图2  $L = 2, \lambda = 0.1$ 时液滴位置和形状随时间的变化

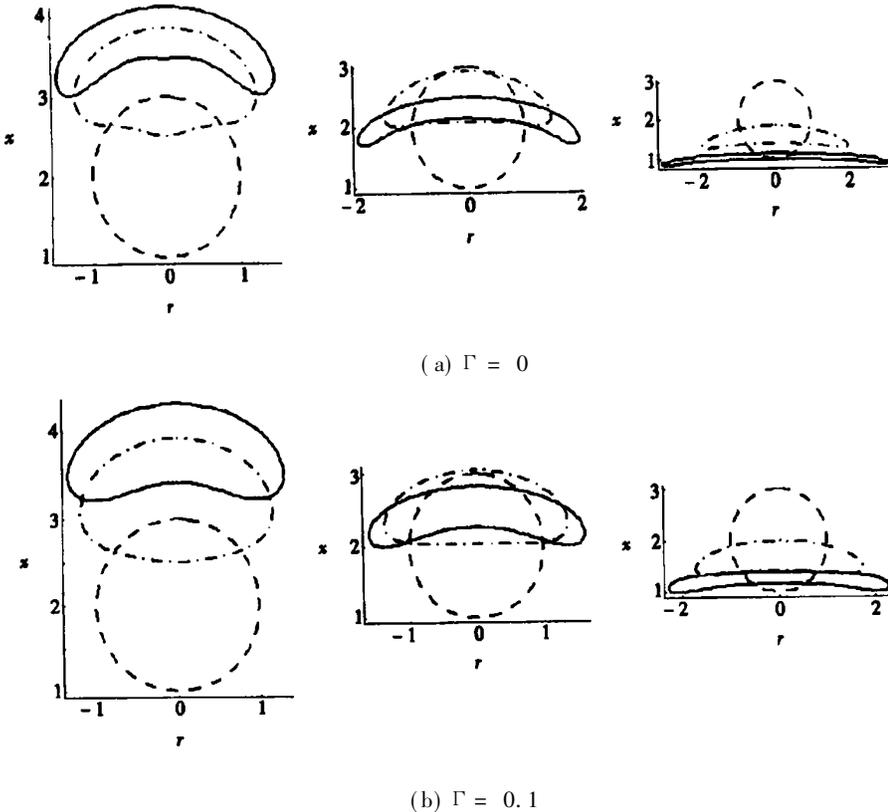
为了进行数值求解, 我们将液滴表面和截断固壁的子午线划分成许多边界元。在子午线上的任一积分等于这些单元上的积分之和。在每个单元内, 曲线的形状和未知函数用基于它们在单元端点值的线性插值逼近, 这样积分方程和推进液滴表面形状的时间相关偏微分方程, 就分别化成了一个以未知函数在结点的值为未知数的线性代数方程组和一个以液滴表面结点坐标为未知函数的常微分方程组。在每个单元内, 光滑函数和含对数奇性函数的积分分别通过4点 Gauss-Legendre 积分公式和带对数权函数的 Gauss 积分公式来计算<sup>[9]</sup>。被积函数中出现的液滴表面的曲率通过三次样条插值来近似。所得线性代数方程组用列主元 Gauss 消去法求解。对求解本问题的任意显式格式, 数值方法都要受到由流体速度引起的 CFL 型不稳定性和由表面张力引起的耗散型不稳定性的伤害, 这使得所允许的最大时间步长要比网格间距小得多。因此即使本文用一阶精度的 Euler 方法来求解此常微分方程组, 关于时间的精度仍然可以

得到保证。为了避免液滴表面上标记点的积聚所引起的非线性数值不稳定,当网格间距严重不均匀时需要液滴表面的网格进行重构。本文的网格重构是用三次样条插值来完成的。

## 2 数值计算结果

在本文的计算中,固壁的半长度截断为 50,液滴表面和固壁都划分成 40 个不等距单元,时间步长取为 0.002。

当  $L = 2$  时,对不同的  $\lambda$ ,  $\Gamma$  和  $\beta$ ,图 2 和图 3 显示了液滴形状和位置随时间的演化。可以看到,对所有的情形,随着时间的推进,液滴在径向拉伸,在轴向压缩,致使初始时是球形的液滴变得越来越扁(当环境流动参数  $\beta$  增加时,拉伸和压缩变得越来越强烈)。当  $\beta = 0.25$  时,随着时间的推移,液滴上升,且在后阶段它的后缘变凹。当  $\beta = 0.5$  时,液滴上升了一点,然后开始下降。当  $\beta = 1$  时液滴持续下降。这些现象后面的机理是非常明显的,因为浮力的作用方向向上而环境流动在轴向向下、径向向外。当表面张力和浮力联合参数  $\Gamma$  增加时,液滴的变形减小。当  $\beta = 0.25$ ,  $\Gamma = 0$  时,在演化的后阶段,在对称轴附近液滴的后缘有一个向下的突起,而当  $\Gamma = 0.1$  时则不出现这种突起,后缘始终保持光滑。产生这个现象的原因可能是固壁对液滴有一个吸引作用,而表面张力的作用阻止了液滴的这种变形。当粘度比  $\lambda$  增加时,液滴变形和其质心迁移都减小。这可能是因为液滴粘性会阻止其变形和迁移。



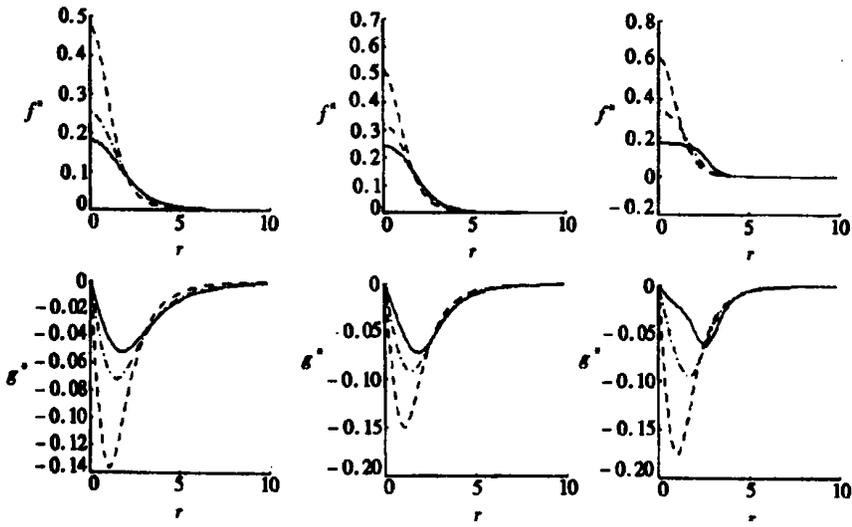
从左到右  $\beta = 0.25, 0.5, 1$ 。---:  $t = 0$ ; -.-:  $t = 0.5$ ; —:  $t = 1$

图 3  $L = 2, \lambda = 1$  时液滴位置和形状随时间的变化

当  $L = 2, \lambda = 0.1, \Gamma = 0$  时,对不同的  $\beta$ ,图 4 给出了因液滴运动所引起的固壁上法向应

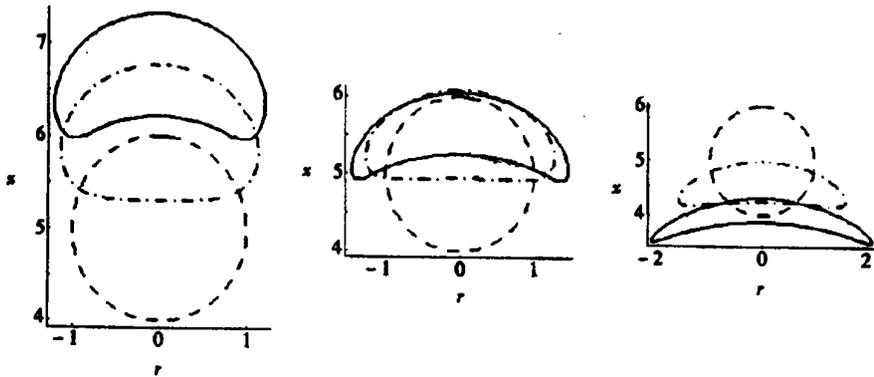
力  $f^*$  和切向应力  $g^*$  随时间的变化。可以看到在所有的情况下, 法向应力和切向应力分别为正和负, 且随着时间的推移, 其值不断减小。当半径坐标  $r$  大于 5 时应力可以忽略。同  $\beta = 0.25$  和  $\beta = 1$  相比,  $\beta = 0.5$  时应力随时间的变小速率要低些。所做的另外一些计算表明表面张力和浮力联合参数  $\Gamma$  对应力分布没有显著的影响。另外, 开始阶段  $\lambda = 0.1$  时的应力要比  $\lambda = 1$  时大, 但  $\lambda = 0.1$  时应力随时间减小的速率要比  $\lambda = 1$  时大很多。

当  $L = 5$  时, 对不同的  $\lambda$ ,  $\Gamma$  和  $\beta$ , 图 5 和图 6 显示了液滴形状和位置随时间的演化。当  $L = 5$  时, 液滴在  $\beta = 0.08, 0.15$  和  $0.3$  的行为与当  $L = 2$  时, 液滴在  $\beta = 0.25, 0.5$  和  $1$  时的行为相似, 但在后阶段液滴更弯, 而压扁程度减小, 且参数  $\Gamma$  有更强的影响。需要注意的是在对称轴附近液滴的后缘没有向下的突起。其原因可能是当  $L = 2$  时固壁对液滴后缘的吸引作用导致那里产生了一个突起, 但现在液滴和固壁之间的距离变大 ( $L = 5$ ), 致使固壁的作用减弱, 其吸引作用不足以使它产生突起。

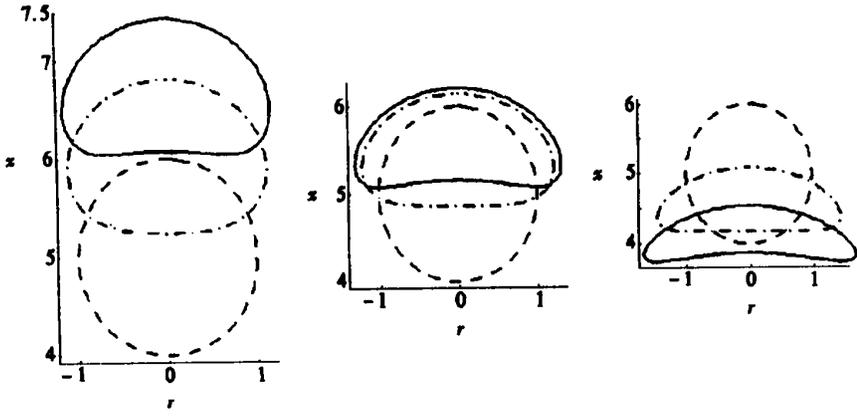


$f^*$  是法向应力,  $g^*$  是切向应力。从左到右  $\beta = 0.25, 0.5, 1$   
 - - - :  $t = 0$ ; - . - :  $t = 0.25$ ; — :  $t = 0.5$

图 4  $L = 2, \lambda = 0.1, \Gamma = 0$  时液滴运动引起的固壁上法向和切向应力分布



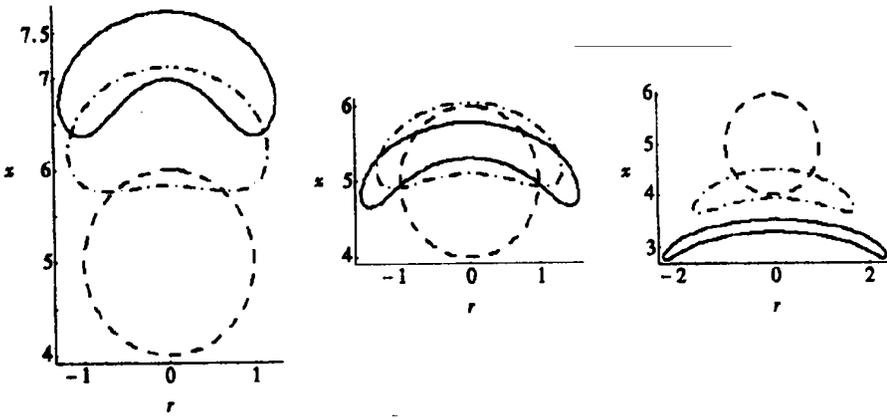
(a)  $\Gamma = 0$



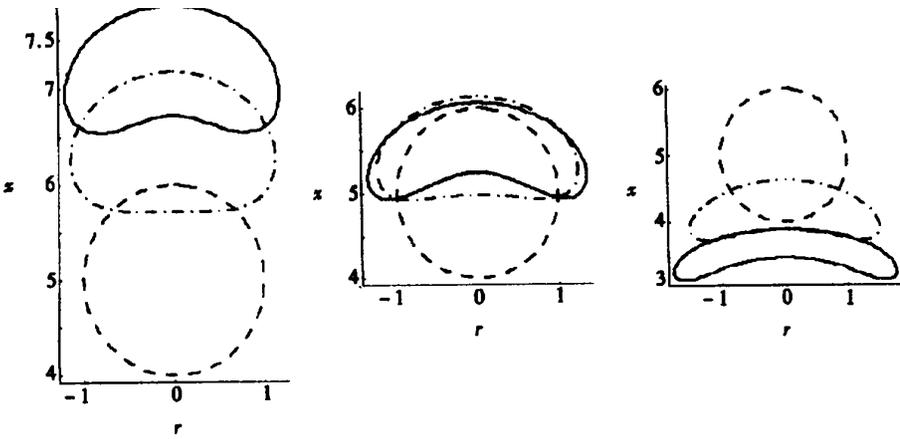
(b)  $\Gamma = 0.1$

从左到右  $\beta = 0.08, 0.15, 0.3$  ·····:  $t = 0$ ; -·-·-:  $t = 0.25$ ; —:  $t = 0.5$

图5  $L = 5, \lambda = 0.1$  时液滴位置和形状随时间的变化



(a)  $\Gamma = 0$



(b)  $\Gamma = 0.1$

从左到右  $\beta = 0.08, 0.15, 0.3$  ·····:  $t = 0$ ; -·-·-:  $t = 0.5$ ; —:  $t = 1$

图6  $L = 5, \lambda = 1$  时液滴位置和形状随时间的变化

$L = 5$  时的应力计算表明当径向坐标  $r > 10$  时应力可以忽略, 但同  $L = 2$  时相比, 应力小了很多。

### 3 结 论

本文发展了一种边界积分方法, 用以模拟刚性固壁附近轴对称环境 Stokes 流中的粘性液滴的运动和变形, 并直接计算固壁上的应力。用本方法对不同的液滴到固壁的初始间距、粘度比、表面张力和浮力联合参数和环境流动参数进行了数值实验。数值实验发现, 由于环境流动和浮力的作用, 随着时间的推移, 液滴在轴向压缩, 径向拉伸。当  $\beta$  较小时, 环境流动的作用要比浮力作用小, 致使液滴上升并向上弯曲, 且因液滴运动所引起的固壁上的应力随着液滴离固壁距离的增大而减小。这时液滴轴向的压缩和径向的拉伸不是非常强烈。当  $\beta$  较大时, 环境流动的作用要比浮力作用强, 致使液滴下降, 且轴向压缩和径向拉伸的效果非常强烈, 使得液滴变得越来越扁。在这种情况下, 当  $L = 5$  和  $L = 2$  时, 固壁上的应力随着液滴靠近固壁而分别增大和减小。后面这一异乎寻常的情形可能是因为固壁对流体的较强作用造成的。因液滴的运动而引起的固壁上应力的有效作用仅限于对称轴附近的一个小范围, 此范围之外的应力可以忽略。这个范围随着液滴和固壁初始距离的增大而增大。当初始距离增大时, 液滴对固壁的作用减弱, 固壁上的应力大大减小。表面张力的作用阻止了液滴的变形, 使液滴的外形更加光滑。液滴的粘性会减小液滴的变形和移动。

### [参 考 文 献]

- [1] Ladyzhenskaya O A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow [M]. Gordon & Breach, 1963.
- [2] Youngren G K, Acrivos A. On the shape of a gas bubble in a viscous extensional flow[J]. J Fluid Mech, 1976, 76: 433—442.
- [3] Rallison J M, Acrivos A. A numerical study of the deformation and burst of a viscous drop in an extensional flow[J]. J Fluid Mech, 1978, 89: 191—200.
- [4] Chi B K, Leal L G. A theoretical study of the motion of a viscous drop toward a fluid interface at low Reynolds number[J]. J Fluid Mech, 1989, 201: 123—146.
- [5] Pozrikidis C. The instability of a moving viscous drop[J]. J Fluid Mech, 1990, 210: 1—21.
- [6] Pozrikidis C. The deformation of a liquid drop moving normal to a plane wall[J]. J Fluid Mech, 1990, 215: 331—363.
- [7] Pozrikidis C. Computation of the pressure inside bubbles and pores in Stokes flow[J]. J Fluid Mech, 2003, 474: 319—317.
- [8] 陈建国. 可变形液滴入孔问题研究[D]. 硕士研究生毕业论文. 北京: 北京大学, 1992.
- [9] Stround A H, Secrest D. Gaussian Quadrature Formulas [M]. Englewood, Cliffs N J: Prentice Hall, 1966.
- [10] 严宗毅. 低雷诺数流理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.

## Motion and Deformation of a Viscous Drop in Stokes Flow Near a Rigid Wall

LU Hua\_jian, ZHANG Hui\_sheng

(Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University,  
Shanghai 200433, P. R. China)

**Abstract:** A boundary integral method was developed for simulating the motion and deformation of a viscous drop in an axisymmetric ambient Stokes flow near a rigid wall and for direct calculating the stress on the wall. Numerical experiments by the method were performed for different initial stand\_off distances of the drop to the wall, viscosity ratios, combined surface tension and buoyancy parameters and ambient flow parameters. Numerical results show that due to the action of ambient flow and buoyancy the drop is compressed and stretched respectively in axial and radial directions when time goes. When the ambient flow action is weaker than that of the buoyancy the drop raises and bends upward and the stress on the wall induced by drop motion decreases when time advances. When the ambient flow action is stronger than that of the buoyancy the drop descends and becomes flatter and flatter as time goes. In this case when the initial stand\_off distance is large the stress on the wall increases as the drop evolves but when the stand\_off distance is small the stress on the wall decreases as a result of combined effects of ambient flow, buoyancy and the stronger wall action to the flow. The action of the stress on the wall induced by drop motion is restricted in an area near the symmetric axis, which increases when the initial stand\_off distance increases. When the initial stand\_off distance increases the stress induced by drop motion decreases substantially. The surface tension effects resist the deformation and smooth the profile of the drop surfaces. The drop viscosity will reduce the deformation and migration of the drop.

**Key words:** viscous drop; axisymmetric Stokes flow; rigid wall; motion and deformation; stress; boundary integral method