应用数学和力学, 第 26 卷 第 12 期(2005 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1500_07

Banach 空间中线性算子广义逆的连续性及其应用

黄强联[1,2], 马吉溥[1]

(1. 南京大学 数学系, 南京 210093;
2. 扬州大学 数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

(张石生推荐)

摘要: 研究了 Banach 空间中广义逆的扰动问题 给出了广义逆稳定的一些新特征, 进而证明了这些稳定性特征与广义逆的选取无关, 并由此得到了广义逆作为集值映射是下半连续的充要条件

关 键 词: 广义逆; Moore_Penrose 逆; 下半连续; Banach 空间
中图分类号: O177.2 文献标识码: A

1 引言与预备知识

设 X_1、X_2 为 Banach 空间, $B(X_1, X_2)$ 表示从 X_1 到 X_2 的所有有界线性算子组成的 Banach 空间 对线性算子 T $B(X_1, X_2)$, 分别用 $N(T)$ 和 $R(U)$ 表示 T 的零空间和值域

设 S $B(X_2, X_1)$ 如果 $TST = T$, 那么称 S 为 T 的内逆; 如果 $STS = S$, 那么称 S 为 T 的外逆; 如果 S 既是 T 的内逆, 又是 T 的外逆, 那么称 S 是 T 的广义逆 一般地, T 的广义逆未必存在, 即使存在也未必唯一

设 T^+ 是 T $B(X_1, X_2)$ 的有界广义逆, 则

(a) TT^+ 和 T^+T 都是有界幂等算子, 并且 $R(TT^+) = R(T)$, $R(T^+T) = R(T^+)$, $N(T^+T) = N(T)$ 及 $N(TT^+) = N(T^+)$;

(b) X_1 和 X_2 有下列拓扑直和分解:

$$X_1 = N(T) \quad R(T^+), \quad X_2 = N(T^+) \quad R(T)$$

如果 X_1、X_2 是 Hilbert 空间, 对具有闭值域的线性算子 T $B(X_1, X_2)$, T 有唯一的 Moore_Penrose 逆 T $B(X_2, X_1)$ 使得

$$TT\,T = T, \quad T\,TT = T, \quad (TT)^* = TT, \quad (T\,T)^* = T\,T,$$

其中 T^* 表示 T 的伴随算子 若 T 为 T 的 Moore_Penrose 逆, 则

$$T\,T = P_{R(T)}, \quad TT = P_{R(T)},$$

收稿日期: 2003_12_09; 修订日期: 2005_06_16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571150; 10271053)
作者简介: 黄强联(1975) , 男, 江苏盐城人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86_514_7862440; Fax: + 86_514_7975462; E_mail: qlhmath@ yahoo. com. cn)

这里 P_M 表示从全空间到其子空间 M 的直交投影算子

广义逆的扰动理论在近代分析、计算、优化、控制论等学科中有着广泛而重要的应用[1] Hilbert 空间和 Banach 空间中广义逆的扰动问题已经被广泛研究(参见文献[1~ 10])

在本文中,我们首先在 Banach 空间中给出了广义逆稳定的一些新特征,并证明了这些稳定性特征与广义逆的选取无关,由此得到了集值映射 $G: T \quad T^+$ 下半连续的充要条件

2　Banach 空间中广义逆的扰动分析

引理 2.1[2]　设 $T_0 \quad B(X_1, X_2)$ 具有有界外逆 T_0^+　若 $T \quad B(X_1, X_2)$ 满足 $\quad T_0^+ \quad T - T_0 \quad < 1$, 则

$$B = T_0^+[I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]^{-1} = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1}T_0^+$$

是 T 的一个外逆,且 $N(B) = N(T_0^+)$, $R(B) = R(T_0^+)$

引理 2.2　设 T^+、T 均是 $T \quad B(X_1, X_2)$ 的广义逆　则 $T^\# = T\ TT^+$ 也是 T 的广义逆,且 $N(T^\#) = N(T^+)$, $R(T^\#) = R(T\ )$

证明　容易验证 $T^\# = T\ TT^+$ 为 T 的广义逆　因而由广义逆的性质,得到

$$N(T^\#) = N(TT^\#) = N(TT\ TT^+) = N(TT^+) = N(T^+)$$

及

$$R(T^\#) = R(T^\# T) = R(T\ TT^+ T) = R(T\ T) = R(T\ )$$

定理 2.1　设 $T_0 \quad B(X_1, X_2)$ 具有有界广义逆 T_0^+　若 $T \quad B(X_1, X_2)$ 满足 $\quad T_0^+ \quad T - T_0 \quad < 1$, 则下列命题等价:

(a) $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$;

(b) $B = T_0^+[I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]^{-1} = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1}T_0^+$ 是 T 的广义逆;

(c) $[I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]^{-1}R(T) = R(T_0)$;

(d) $[I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1}N(T_0) = N(T)$

证明　(a)　(b)　首先引理 2.1 说明了 $B = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1}T_0^+$ 是 T 的外逆,且 $N(B) = N(T_0^+)$　如果 $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$, 那么

$$R(T) \quad N(B) = R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$$

由文献[1]中的命题 1.6, B 是 T 的广义逆

(b)　(c)　假设 $B = T_0^+[I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]^{-1} = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1}T_0^+$ 是 T 的广义逆,易见 $R(T_0^+) = R(B)$　同样由广义逆的性质,

$$R(T) = R(TB) = TR(B) = TR(T_0^+) = TR(T_0^+T_0) = TT_0^+R(T_0) = (TT_0^+ + I_{X_2} - T_0T_0^+)R(T_0) = [I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]R(T_0)$$

从而命题(c)成立

(c)　(d)　显然地, $[I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]N(T) \quad N(T_0)$　下面我们证明反向包含　设 $x \quad N(T_0)$, 由命题(c),则

$$Tx \quad R(T) = [I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]R(T_0) = TR(T_0^+)$$

因而存在 $y \quad R(T_0^+)$ 使得 $Tx = Ty$, 即 $x - y \quad N(T)$　因此

$$[I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)](x - y) = (I_{X_1} - T_0^+ T_0)(x - y) = (I_{X_1} - T_0^+ T_0)x = x$$

这就证明了 $N(T_0) \quad [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]N(T)$

(d) (a) 设 $y \quad R(T) \quad N(T_0^+)$, 于是存在 $x \quad X_1$, 使得 $y = Tx$, $T_0^+ Tx = T_0^+ y = 0$ 因而

$$T_0[I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]x = T_0 x + T_0 T_0^+(T - T_0)x = T_0 T_0^+ Tx = 0,$$

即 $[I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]x \quad N(T_0)$ 由命题(d), $x \quad N(T)$, 所以 $y = Tx = 0$ 因此 $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$ 证毕

注 2.1 文献[3,4]也证明了命题(a)和命题(b)等价 这里定理 2.1 给出了一个新的简单的证明, 并且给出了广义逆稳定的两个新特征, 这两个特征分别表示了 $R(T)$ 和 $R(T_0)$, $N(T)$ 和 $N(T_0)$ 之间的关系 它们应用起来也比较方便 特别地, 在 $R(T_0)$ 或 $N(T_0)$ 有限维的情形, 我们可以得到下面的结果

推论 2.1[有限秩定理] 设 $T_0 \quad B(X_1, X_2)$ 具有界广义逆 T_0^+ 且 $\mathrm{rank}\, T_0 <$ 若 $T \quad B(X_1, X_2)$ 满足 $T_0^+ \quad T - T_0 < 1$, 则 $B = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1} T_0^+$ 是 T 的广义逆当且仅当 $\mathrm{rank}\, T = \mathrm{rank}\, T_0 <$

证明 充分性的证明类似于文献[4]中例 1.2 的证明 这里我们仅证明必要性 如果 $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$, 那么由定理 2.1, $[I_{X_2} + (T - T_0)T_0^+]^{-1} R(T) = R(T_0)$ 易见 $\mathrm{rank}\, T = \mathrm{rank}\, T_0 <$

推论 2.2 设 $T_0 \quad B(X_1, X_2)$ 具有界广义逆 T_0^+ 且 $\dim N(T_0) <$ 若 $T \quad B(X_1, X_2)$ 满足 $T_0^+ \quad T - T_0 < 1$, 则 $B = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1} T_0^+$ 是 T 的广义逆当且仅当 $\dim N(T) = \dim N(T_0) <$

证明 由定理 2.1, 易见必要性成立 反之, 若 $\dim N(T) = \dim N(T_0) <$, 令 $C = I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)$, 直接计算可得 $T_0^+ T_0 = T_0^+ T C^{-1}$ 那么 $N(T_0) = CN(T_0^+ T)$, $\dim N(T_0^+ T) = \dim N(T_0) <$ 所以 $\dim N(T_0^+ T) = \dim N(T) <$, 从而 $N(T) = N(T_0^+ T)$ 为了完成证明, 再由定理 2.1, 我们仅需证明 $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$ 如果 $y \quad R(T) \quad N(T_0^+)$, 那么存在 $x \quad X$ 使得 $y = Tx$ 及 $T_0^+ Tx = T_0^+ y = 0$, 这就蕴含了 $x \quad N(T_0^+ T) = N(T)$ 所以 $y = Tx = 0$ 证毕

注 2.2 由定理 2.1 和推论 2.2, 我们可以看到文献[5]中的定理 1 和定理 2, 文献[3]中的命题 3.1 和推论 3.1 的两个条件是等价的, 同时它们都等价于 $B = [I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]^{-1} T_0^+$ 是 T 的广义逆

下面的定理说明了定理 2.1 中的稳定性特征与广义逆的选取无关, 这在广义逆的应用中是非常重要的

定理 2.2 设 $T_0^+, T_0 \quad B(X_2, X_1)$, 均是 $T_0 \quad B(X_1, X_2)$ 的有界广义逆 则存在 > 0, 对任意满足 $T - T_0 <$ 的 $T \quad B(X_1, X_2)$, 下列命题等价:

(a) $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$;

(b) $R(T) \quad N(T_0) = \{0\}$

证明 令 $T_0^{\#} = T_0 T_0 T_0^+$, 由引理 2.2, $T_0^{\#}$ 也是 T_0 的一个广义逆且满足 $N(T_0^{\#}) = N(T_0^+)$, $R(T_0^{\#}) = R(T_0)$ 取

$$= (1 + T_0^+ + T_0 + T_0 \quad T_0^+ + T_0 \quad T_0 \quad T_0^+)^{-1}$$

如果对满足 $T - T_0 \quad <$ 的T, $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$成立, 那么 $R(T) \quad N(T_0^{\#}) = \{0\}$
由定理2.1, $[I_{X_2} + (T - T_0)T_0^{\#}]R(T_0) = R(T)$ 从而

$$R(T) = [I_{X_2} + (T - T_0)T_0^{\#}]R(T_0) = TT_0^{\#}R(T_0) = TR(T_0^{\#}T_0) = TR(T_0^{\#}) = TR(T_0) = TR(T_0T_0) = TT_0R(T_0) = [I_{X_2} + (T - T_0)T_0]R(T_0)$$

因此 $R(T) \quad N(T_0) = \{0\}$ 反之, 若对满足 $T - T_0 \quad <$ 的T, $R(T) \quad N(T_0) = \{0\}$ 成立, 则

$$R(T) = [I_{X_2} + (T - T_0)T_0]R(T_0)$$

和前面一样, 可以得到 $R(T) = [I_{X_2} + (T - T_0)T_0^{\#}]R(T_0)$ 再由定理 2.1, $R(T) \quad N(T_0^{\#}) = \{0\}$ 因此 $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$ 证毕

3 集值映射 $G: T \quad T^+$ 的下半连续性

我们知道广义逆即使存在, 也未必唯一 自然地, 我们应考察广义逆作为集值映射的连续性 另一方面, 下半连续性对构造连续选择以及在微分包含都有极其重要的作用[11] 这就促使我们来考虑集值映射 $G: T \quad T^+$ 的下半连续性 据我们所知, 把广义逆作为集值映射来研究, 这方面的结果还不多见 在这一节中, 我们将给出集值映射 $G: T \quad T^+$ 下半连续性的充要条件

定义 3.1[11] 设 X、Y 为 Banach 空间, $G: X \quad 2^Y$ 为集值映射, $x \quad X$ 如果对任意 $y \quad G(x)$ 和 y 的任意邻域$V(y)$, 都存在 x 的邻域 $U(x)$, 使得对任意的 $u \quad U(x)$,

$$G(u) \quad V(y)$$

那么称 G 在点x 下半连续

引理 3.1[11] 设 X、Y 为 Banach 空间, $G: X \quad 2^Y$ 为集值映射 下列命题等价:

(a) G 在点$x \quad X$ 下半连续;

(b) 对 X 中任意收敛到x 的点列$\{x_n\}$,

$$G(x) \quad \underline{\lim}\, G(x_n) = \{y \quad Y: \text{存在 } y_n \quad G(x_n) \text{ 使得 } y_n \quad y\}$$

定理 3.1 设 $T_0 \quad B(X_1, X_2)$ 有广义逆 下列命题等价:

(a) 集值映射 $G: T \quad T^+$ 在 T_0 处下半连续;

(b) 对 T_0 的任意广义逆 T_0^+, 存在 T_0 的邻域 $U(T_0)$, 使得对任意 $T \quad U(T_0)$,

$$R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\};$$

(c) 存在 T_0 的广义逆 T_0^+, 以及 T_0 的邻域 $U(T_0)$, 使得对任意 $T \quad U(T_0)$,

$$R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$$

证明 (a) (b) 设 $G: T \quad T^+$ 在 T_0处是下半连续的, 则对任意$T_0^+ \quad G(T_0)$ 和T_0^+ 的任意邻域 $V(T_0^+)$, 不失一般性, 设

$$V(T_0^+) \quad B(T_0^+, r) = \{S \quad B(X_2, X_1): \quad S - T_0^+ \quad < r\},$$

这里 $r = (1 + \quad T_0 \quad + \quad T_0^+ \quad)^{-1}$ 按下半连续的定义, 存在T_0的邻域 $U(T_0) \quad B(T_0, r)$, 使得对任意 $T \quad U(T_0)$, $G(T) \quad V(T_0^+)$ 我们任意取 $T^+ \quad G(T) \quad V(T_0^+)$, 并令

$$P_T = I_{X_1} - T^+T, \quad P_0 = I_{X_1} - T_0^+T_0,$$

则 $P_T - P_0 = T^+ T - T_0^+ T_0 \quad T^+ T - T_0^+ T + T_0^+ T - T_0^+ T_0 \quad T^+ - T_0^+ \quad T + T_0^+ \quad T - T_0 \quad r(T + T_0^+) \quad r(T_0 + r + T_0^+) < 1$ 且 $T_0^+ \quad T - T_0 < 1$ 由文献[12], $P_0(R(P_T)) = R(P_0)$, 即 $(I_{X_1} - T_0^+ T_0)N(T) = N(T_0)$ 根据定理 2.1 以及 $[I_{X_1} + T_0^+(T - T_0)]N(T) = (I_{X_1} - T_0^+ T_0)N(T)$ 得到 $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$

(b) (c) 显然

(c) (a) 假设命题(c)成立 根据引理 3.1, 我们只需要证明对 $B(X_1, X_2)$ 中任意收敛到 T_0 的序列 $\{T_n\}$, 有 $G(T_0) \quad \underline{\lim} G(T_n)$ 设 $T_0 \quad G(T_0)$, 由定理 2.2 和命题(c), 对充分大的 n, $T_0 \quad T_n - T_0 < 1$ 和 $R(T_n) \quad N(T_0) = \{0\}$ 再根据定理 2.1, n 充分大时, $B_n = [I_{X_1} + T_0(T_n - T_0)]^{-1} T_0$ 是 T_n 的有界广义逆, 即 $B_n \quad G(T_n)$ 显然地, $B_n \quad T_0$ 由 $\underline{\lim} G(T_n)$ 的定义, $T_0 \quad \underline{\lim} G(T_n)$

注 3.1 根据定理 3.1, 我们可以看到如果存在 T_0 的邻域 $U(T_0)$ 使得 $T \quad U(T_0)$ 时, $R(T) \quad N(T_0^+) = \{0\}$, 那么对任意的 $T_0 \quad G(T_0)$, $G(T)$ 有(连续的)选择 T, 使得当 $T \quad T_0$ 时, $T \quad T_0$

推论 3.1 设 $T_0, T_n \quad B(X_1, X_2)$, T_0、T_n 分别是 T_0、T_n 的广义逆, 且 $T_n \quad T_0$, $T_n \quad T_0$ 则对 T_0 的任意广义逆 T_0^+, T_n 有广义逆 $T_n^+ \quad B(X_2, X_1)$ 使得 $T_n^+ \quad T_0^+$

证明 令 $P_n = I_{X_1} - T_n T_n$ 和 $P_0 = I_{X_1} - T_0 T_0$ 因为 $T_n \quad T_0$, $T_n \quad T_0$, 所以 n 充分大时, $T_0 \quad T_n - T_0 < 1$ 和 $P_n - P_0 < 1$ 同时成立 根据文献[12], $P_0(R(P_n)) = R(P_0)$, 即 $(I_{X_1} - T_0 T_0)N(T_n) = N(T_0)$ 由定理 2.1, 当 n 充分大时, $R(T_n) \quad N(T_0) = \{0\}$ 因此由定理 2.2, 对 T_0 的任意广义逆 T_0^+, 当 n 充分大时, $R(T_n) \quad N(T_0^+) = \{0\}$ 再根据注 3.1, $G(T_n)$ 具有选择 T_n^+ 使得 $T_n^+ \quad T_0^+$ 证毕

下面的推论给出了 Hilbert 空间中 Moore_Penrose 逆连续的一个充要条件

推论 3.2 设 H_1、H_2 为 Hilbert 空间, $T_0, T_n \quad B(H_1, H_2)$ 且 $T_n \quad T_0$, T_0 有 Moore_Penrose 逆 T_0 则下列命题等价:

(a) n 充分大时, T_n 有 Moore_Penrose 逆 T_n 使得 $T_n \quad T_0$;

(b) n 充分大时, $R(T_n) \quad N(T_0) = \{0\}$

证明 (a) (b) 类似于推论 3.1 的证明

(b) (a) 根据注 3.1, 当 n 充分大时, T_n 有广义逆 T_n^+ 且 $T_n^+ \quad T_0$ 从而 $R(T_n)$ 是闭的 于是 T_n 存在 Moore_Penrose 逆 T_n 由 Moore_Penrose 逆和广义逆的性质, $T_n T_n$ 和 $I - T_n^- T_n$ 分别是到 $R(T_n)$ 和 $N(T_n)$ 上的直交投影算子# 而 $T_n T_n^+$ 和 $I - T_n^+ T_n$ 分别是到 $R(T_n)$ 和 $N(T_n)$ 上的投影算子# 根据文献[12],

$$+ T_n T_n^- - T_0 T_0^- + \quad [\quad + T_n T_n^+ - T_0 T_0^- +$$

及

$$+ (I - T_n^- T_n) - (I - T_0^- T_0) + \quad [\quad + (I - T_n^+ T_n) - (I - T_0^- T_0) + \#$$

从而当 $n \; y + \;]$ 时, $T_n T_n^- \; y \; T_0 T_0^-$, $T_n^- T_n \; y \; T_0^- T_0$# 因为

$$T_n^- - T_0^- = T_n^- T_0 T_0^- + T_n^-(I_{H_2} - T_0 T_0^-) - (I_{H_1} - T_n^- T_n) T_0^- - T_n^- T_n T_0^- =$$

$$T_n^-(T_0 - T_n) T_0^- + T_n^-(I_{H_2} - T_0 T_0^-) - (I_{H_1} - T_n^- T_n) T_0^- =$$

$$T_n^-(T_0 - T_n)T_0^- + T_n^-(T_nT_n^- - T_0T_0^-) + (T_n^-T_n - T_0^-T_0)T_0^-,$$

所以 T_n^- 关于 n 是一致有界的, 从而 $T_n^- \to T_0^-$# 证毕#

推论 3.3　设 $T_0 \in B(X_1, X_2)$ 有广义逆 T_0^-# 如果存在 T_0 的邻域 $U(T_0)$ 使得 $T \in U(T_0)$ 时, $R(T) \cap N(T_0^-) = \{0\}$# 那么非负泛函

$$g(T) = \inf_{S \in G(T)} \| S \|$$

是上半连续的, 其中 $G(T)$ 表示 T 的所有有界广义逆组成的集合#

证明　根据注 3.1, 对任意 $T_0^+ \in G(T_0)$, 以及 $T \in U(T_0)$, T 有广义逆 T^+ 使得当 $T \to T_0$ 时, $T^+ \to T_0^+$# 因此

$$\| T_0^+ \| = \lim_{T \to T_0} \| T^+ \| = \lim_{T \to T_0} \sup \| T^+ \| \geq \lim_{T \to T_0} \sup g(T)\#$$

即 $\| T_0^+ \| \geq \lim\sup_{T \to T_0} g(T)$# 因为 $T_0^+ \in G(T_0)$ 是任意的, 所以 $g(T_0) \geq \lim\sup_{T \to T_0} g(T)$# 证毕#

关于定理的进一步的应用, 我们将在以后的文章中给出#

致谢　作者感谢扬州大学博士科学基金的资助#

[参　考　文　献]

[1] Nashed M Z, Vortruba G F. A unified operator theory of generalized inverses[A]. In: Nashed M Z Ed. Generalized Inverses and Applications[C]. New York: Academic Press, 1976, 1–110.

[2] Nashed M Z, Chen X. Convergence of Newton_like methods for singular equations using outer inverses[J]. Numer Math, 1993, 66(2): 235–257.

[3] CHEN Guo_liang, XUE Yi_feng. Perturbation analysis for the operator equation Tx = b in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 212(1): 107–125.

[4] MA Ji_pu. (1.2) inverses of operators between Banach spaces and local conjugacy theorem[J]. Chinese Ann Math Ser B, 1999, 20(1): 57–62.

[5] CHEN Guo_liang, XUE Yi_feng. The expression of the generalized inverse of the perturbed operator under type I perturbation in Hilbert spaces[J]. Linear Algebra Appl, 1998, 285(1): 1–6.

[6] Ben_Israel A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications[M]. New York: John Wiley and Sons, 1974.

[7] Ding J, Huang L J. On the continuity of generalized inverses of linear operators in Hilbert spaces[J]. Linear Algebra Appl, 1997, 262(2): 229–242.

[8] MA Ji_pu. Continuously sufficient and necessary conditions for Moore_Penrose inverses A_x^+ [J]. Scince in China Ser A, 1990, 33(11): 1294–1302.

[9] MA Ji_pu. On the necessary and sufficient conditions of the continuity of M_P inverses A_x^+ [J]. Chinese Ann Math, Ser B, 1992, 13(2): 251–256.

[10] Nashed M Z. Perturbations and approximations for generalized inverses and linear operators equations [A]. In: Nashed M Z Ed. Generalized Inverses and Applications[C]. New York: Academic Press, 1976, 325–396.

[11] Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1984.

[12] Kato T. Perturbation Theory for Linear Operators[M]. New York: Springer_Verlag, 1984.

[1,2], MA Ji_pu[1]
(1. Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P. R. China;
2. College of Mathematics, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu 225002, P. R. China)

Abstract: The perturbation problem of generalized inverse is studied. And some new stability characteristics of generalized inverses were presented. It was also proved that the stability characteristics of generalized inverses were independent of the choice of the generalized inverse. Based on this result, two sufficient and necessary conditions for the lower semi_continuity of generalized inverses as the set_valued mappings are given.

Key words: generalized inverse; Moore_Penrose inverse; lower semi_continuity; Banach space