文章编号: 1000_0887(2006) 01_0098_07

MKdV_Burgers 方程的边界控制*

田立新[1], 赵志峰[1,2], 王景峰[1]

(1. 江苏大学 理学院 非线性科学研究中心, 江苏镇江 212013;
2. 解放军镇江船艇学院, 江苏镇江 212003)

(刘曾荣推荐)

摘要: 在区域[0, 1] 上利用反馈控制律研究 MKdV_Burgers 方程的边界控制问题• 首先给出 MKdV_Burgers 方程在边界条件下存在局部经典解, 在此基础上给出方程的解先验性估计, 随后利用反馈控制律证明 MKdV_Burgers 方程的弱解的存在性以及解的全局指数稳定性、渐进稳定性•

关 键 词: 边界控制; 反馈控制; MKdV_Burgers 方程
中图分类号: O232　　文献标识码: A

引　　言

由于非线性偏微分方程的边界控制具有很强的应用背景, 因而引起数学物理以及控制工程等方面学者的关注• Russell 和 Zhang[1] 得到了 KdV 方程的边界稳定性和精确可控性; Naumkin[2] 等在实数域上研究非线性偏微分方程的边界控制; Liu 和 Krstic[3] 利用反馈控制研究了 KdV_Burgers 方程的边界控制以及数值分析• 在上述工作的基础上, 我们利用反馈控制研究 MKdV_Burgers 方程的边界控制•

在本文我们研究如下形式的 MKdV_Burgers 方程的边界控制:

$$u_t - \varepsilon u_{xx} + u_{xxx} + 6u^2 u_x = 0 \qquad (0 < x < 1,\ t > 0), \tag{1}$$

$$u(0, t) = u_x(1, t) = 0,\ u(x, 0) = u^0(x) \qquad (0 < x < 1,\ t > 0), \tag{2}$$

$$u_{xx}(1, t) = k_1 u(1, t)^3 + k_2 u(1, t) \qquad (t > 0)\bullet \tag{3}$$

定义 1 若一个函数 $u(x, t) \in C([0, T], H_0^1(0, 1))$ 且满足如下的方程

$$\begin{aligned}&\langle u_t(t), \varphi\rangle - \varepsilon\langle u_x, \varphi_x\rangle - \langle u_x, \varphi_{xx}\rangle - \langle uu_x, \varphi\rangle = \\&\quad \langle [k_1 u(1, t)^3 + k_2 u(1, t)], \varphi(1, t)\rangle - \langle u^0, \varphi(0)\rangle,\end{aligned} \tag{4}$$

则 $u(x, t)$ 称为系统(1) ~ (3) 的一个弱解•

在本文第 1 节给出的主要定理和主要符号; 在第 2 节给出由方程(1) ~ (3) 所表示系统的解的稳定性和存在性的证明•

* 收稿日期: 2004_02_08; 修订日期: 2005_09_12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10071033); 江苏省自然科学资金资助项目(BK2002003)
作者简介: 田立新(1963—), 男, 江苏人, 教授, 博士, 博导(联系人: +86_511_8791467; E_mail: tianlx@ujs.edu.cn)•

1 主要符号和主要定理

设方程(1)~(3)解的高阶能量为 $V(t)=\int_0^1 u_x(x,t)^2\mathrm{d}x$；$H^s(0,1)$ 是通常的 Sobolev 空间，令：

$$H_0^1=\left\{\varphi\in H^1(0,1):\varphi(0)=0\right\},$$
$$H_0^2(0,1)=\left\{\varphi\in H^2(0,1):\varphi(0)=\varphi_x(1)=0\right\},$$
$$H_0^3(0,1)=\left\{\varphi\in H^3(0,1):\varphi(0)=\varphi_x(1)=\varphi_{xx}(1)=0\right\}.$$

X 是 Banach 空间，$\|\cdot\|$、$(\cdot,\cdot)$ 分别表示在 $L^2(0,1)$ 上的范数和内积。定义算子 L 为 $Lu=-u_{xxx}+\varepsilon u_{xx}$，其定义域为 $D(L)=H_0^3(0,1)$；则算子 L 的伴随算子 L^* 为 $L^*u=u_{xxx}+\varepsilon u_{xx}$，其定义域为 $D(L^*)=\left\{u\in H_0^3(0,1)\right\}$。易知算子 L 和 L^* 在 $L^2(0,1)$ 上是稠密耗散线性闭算子且 L 是压缩算子半群 C_0 的一个无穷小生成元。令：

$$W=\Big\{\omega\in C^2([0,T];H_0^1(0,1)):\omega(x,0)=u^0(x),$$
$$\omega_t(x,0)=\varepsilon u_{xx}^0(x)-u_{xxx}^0(x)-6u^{0^2}(x)u_x^0(x)\Big\},$$
$$\|\omega\|_W=\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left(\|\omega_x(t)\|^2+\|\omega_{xt}(t)\|^2+\|\omega_{xtt}(t)\|^2\right)\Big]^{1/2},$$

显然 W 是一个 Banach 空间。

定理 1　1) 若初值 $u^0(x)\in H_0^1(0,1)$，则由(1)~(3)所表示的系统存在一个弱解 u，且 u 满足如下的 L^2 全局指数稳定性：

$$\|u(t)\|^2\leqslant\|u^0\|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon t},\qquad\forall t\geqslant0,\tag{5}$$

以及 H^1 全局渐进和半全局指数稳定性：

$$\max_{0\leqslant x\leqslant1}u(x,t)^2\leqslant\|u_x(t)\|^2\leqslant M_1\|u_x^0\|^2\exp(M_2\|u^0\|^2)\mathrm{e}^{-\varepsilon t},\qquad\forall t\geqslant0,\tag{6}$$

其中 M_1 和 M_2 是正的实常数。

2) 若初值 $u^0(x)\in H_0^3(0,1)$ 且满足相容性条件 $u_{xx}^0(1)=k_1u^0(1)^3+k_2u^0(1)$，则存在一个全局经典解 u 且 u 满足：$u\in C([0,T];H_0^3(0,1))\cap C^1([0,T];H_0^1(0,1))$，且有：

$$\|u\|_{H^3}^2\leqslant M_3\|u^0\|_{H^3}^2\exp[M_4F(\|u^0\|_{H^3}^2)]\mathrm{e}^{-\varepsilon t}.\tag{7}$$

定理 2　令 $\omega=\dfrac{\varepsilon+8}{8}$，$k=\max\left\{2,\left(\dfrac{12}{\varepsilon+8}\right)^{\omega/\varepsilon}\right\}$，$F(r)=r^2+r^{4+4\omega/\varepsilon}$，

1) 若初值 $u^0(x)\in H_0^1(0,1)$，则系统(1)~(3)存在一个解 u 且 u 解满足如下的全局渐进和半全局指数稳定

$$\|u(t)\|^2\leqslant K(\|u^0\|^2+\|u^0\|^{2+2\omega/\varepsilon})\mathrm{e}^{-2\omega t},\qquad\forall t\geqslant0,\tag{8}$$

以及对 $\forall t\geqslant0$，有

$$\max_{0\leqslant x\leqslant1}u(x,t)^2\leqslant\|u_x(t)\|^2\leqslant cF(\|u^0\|_{H^1})\exp[cF(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t}.\tag{9}$$

2) 对初值 $u^0(x)\in H_0^2(0,1)\cap H^3(0,1)$ 且满足相容性条件 $u_{xx}^0(1)=k_1u^0(1)^3+k_2u^0(1)$，则系统存在一个全局古典解 u 满足如下的全局渐进和半全局指数稳定性估计：

$$\|u\|_{H^3}^2\leqslant c\sum_i^3F^i(\|u^0\|_{H^3})\exp[cF(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t},\qquad\forall t\geqslant0.\tag{10}$$

2 定理的证明

为了证明定理 1 和定理 2，需要首先来证明一个引理。

引理 1　假设 $u^0(x) \in H_0^2(0,1) \cap H^7(0,1)$ 且 $u_{xx}^0(1) = k_1 u^0(1)^3 + k_2 u^0(1)$, 则在 $T > 0$ 时, 方程(1) ~ (3) 存在唯一的局部古典解 u•

证明　首先证明对任意一个固定的 $\omega \in W$, 如下的方程有一个解 $u \in W$:

$$u_t - \varepsilon u_{xx} + u_{xxx} + 6\omega^2\omega_x = 0, \qquad 0 < x < 1,\ t > 0, \tag{11}$$

$$\begin{cases} u(0,t) = u_x(1,t) = 0,\ u(x,0) = u^0, \\ u_{xx}(1,t) = k_1 u(1,t)^3 + k_2 u(1,t) \qquad t > 0 \end{cases} \tag{12}$$

定义非线性变换 $A: A\omega = u$, 若利用 Banach 不动点原理能证明 A 有一个固定点 u^*, 则 u^* 就是满足方程(1) ~ (3) 的解• 为此令:

$$\phi = \frac{1}{2}x(x-1)^2[k_1\omega^3(1,t) + k_2\omega(1,t)], \qquad v = u - \phi,$$

由算子 L 的定义可知, 方程(11) ~ (12) 可改写为如下抽象的 Cauchy 问题:

$$v_t = Lv + f,\ v(0) = v^0,$$

假设 ω, f 对 x 和 t 可微, 且知定义在 $L^2(0,1)$ 的线性算子 L 是压缩半群 C_0 的无穷小生成元, 则由半群理论可知, 方程(11)、(12) 存在唯一的解 v 且 v 满足:

$$v \in C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap C([0,T]; H_0^3(0,1)),$$

因此方程(11)、(12) 存在唯一的解: $u = v + \phi \in C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap C([0,T])$•

若进一步假设初始值 u^0 是充分正则的, 则 u 也是充分正则的• 设 ω, u^0 是充分光滑, 且设 u_1, u_2 分别是对应 ω_1, ω_2 和初始值 u_1^0, u_2^0 的方程(11)、(12) 的解• 令:

$$z = u_1 - u_2,\ z^0 = u_1^0 - u_2^0,\ \eta = \omega_1 - \omega_2,$$

则可得:

$$z_t - \varepsilon z_{xx} + z_{xxx} + 6\omega_1^2\eta_x + 6\eta(\omega_1 + \omega_2)\omega_{2x} = 0, \qquad 0 < x < 1, 0 < t < T \tag{13}$$

设 $C(s_1, s_2)$ 是一个一般的线性连续函数, 对一般的函数 $\Phi = \Phi(x,t)$, 我们定义:

$$\|\Phi\|_\infty = \max_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant t \leqslant T}} |\Phi(x,t)|, \quad \|\Phi\|_{0,\infty} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\Phi(t)|,$$

$$\|\Phi\|_{1,\infty} = \|\Phi_t\|_\infty + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\Phi_x(t)|$$

对(13) 进行分部积分可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 z(t)^2\mathrm{d}x = 2\int_0^1 z[\varepsilon z_{xx} - z_{xxx} - 6\omega_1^2\eta_x - 6\eta(\omega_1 + \omega_2)\omega_{2x}]\mathrm{d}x \leqslant$$
$$(\|\eta\|_\infty^2 + \|\eta_x\|_{0,\infty}^2)C(\|\omega_1\|_W, \|\omega_2\|_W)$$

即:

$$\|z(t)\|^2 \leqslant T\|\eta\|_W C(\|\omega_1\|_W, \|\omega_2\|_W) + \|z^0\|^2$$

同理可得:

$$\|z_x\|^2 \leqslant T\|\eta\|_W \cdot C(\|\omega_1\|_W, \|\omega_2\|_W) + \|z_x^0\|^2, \tag{14}$$

对 $\|z_{xt}\|^2$、$\|z_t\|^2$、$\|z_{tt}\|^2$、$\|z_{xtt}\|^2$ 可得到类似的结论•

对任意的 $\omega \in W$, $\varphi^0 \in H_0^2(0,1) \cap H^7(0,1)$, 由稠密性定理可知, 方程(11)、(12) 的解 u 满足 $u \in C^2([0,T], H_0^1(0,1))$• 进一步还可推知, 对 $u(x,0) = u^0(x)$, 有

$$u_t(x,0) = \varepsilon u_{xx}^0(x) - u_{xxx}^0(x) - 6(u^0(x))^2 u_x^0(x),$$

因此可得 $u \in W$ 以及 $A: W \to W$ 且在 W 中满足(14)• 设 $\omega_2 = 0$, $u_2^0 = 0$, 所以

$$\|A\omega\|_W^2 \leqslant \|u(0)\|^2 + \|u_x^0(0)\|^2 + \|u_t(0)\|^2 + \|u_{xt}(0)\|^2 +$$

$$\|u_{tt}(0)\|^2+\|u_{xtt}(0)\|^2+T\|\omega\|_W^2C(\|\omega\|_W)\leqslant R^2+T\|\omega\|_W^2C(\|\omega\|_W),$$

其中 $R=R(\|u^0\|_{H^7})$ 是实常数• 若令 $B(0,2R)=\left\{\omega\in W:\|\omega\|_W\leqslant 2R\right\}$, 且设 T 充分小, 则可得到 $\|A\omega\|_W^2\leqslant R^2+TR^2C(R)\leqslant 4R^2$, 则我们有: $A: B(0,2R)\to B(0,2R)$• 如果假设 T 充分小且满足 $TC(R)<1$, 则知 A 是压缩变换, 所以由 Banach 不动点原理可推得 A 有一个固定的点 $u^*\in W$• 因此对充分小的 T, 方程(1)~(3) 存在唯一的解 u^*, 因此引理 1 得证•

定理 1 和定理 2 的证明•

为了证明方程解的存在性和唯一性, 为此先给方程(1) 的先验估计•

1) 稳定性的估计

首先由引理 1 可知, 方程(1)~(3) 所表示的系统存在一个局部解 u• 易知不等式(5) 可以由能量不等式得到• 事实上我们有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1u^2\mathrm{d}x=2\int_0^1uu_t\mathrm{d}x\leqslant-2\varepsilon\|u_x\|^2\leqslant-2\varepsilon\int_0^1u^2\mathrm{d}x,$$

既可推知 $\|u\|^2\leqslant\|u^0\|\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}$, 因此 (5) 式成立•

下面我们利用 Liapunov 函数 $\int_0^1(x+1)u(t)^2\mathrm{d}t$ 来证明(8)• 由(1) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1(x+1)u^2\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_0^1(u^2+u_x^2)\mathrm{d}x-2\varepsilon\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+3\|u_x\|^2\int_0^1u^2\mathrm{d}x-4\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-\left(\frac{\varepsilon}{2}+4\right)\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+3\|u_x\|^2\cdot\|u^0\|\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}=$$
$$-\frac{\varepsilon+8-6\|u^0\|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}}{2}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x\cdot\tag{15}$$

$$\text{设 } T_0=\begin{cases}0, & \|u^0\|^2\leqslant\dfrac{1}{12}(\varepsilon+8),\\ \dfrac{1}{2\varepsilon}\ln\left(\dfrac{12\|u^0\|^2}{\varepsilon+8}\right), & \|u^0\|^2>\dfrac{1}{12}(\varepsilon+8),\end{cases}$$

于是可以得到:

$$\int_0^1u^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1(x+1)u^2\mathrm{d}x\leqslant 2\|u^0\|\mathrm{e}^{-2\varepsilon T_0}\mathrm{e}^{-2\omega t},\qquad\forall t\geqslant T_0,$$
$$\int_0^1u^2\mathrm{d}x\leqslant\|u^0\|^2\mathrm{e}^{-2\varepsilon t}\leqslant\left(\frac{12}{\varepsilon+8}\right)^{\omega/\varepsilon}\|u^0\|^{2+2\omega/\varepsilon}\cdot\mathrm{e}^{-2\omega t},\qquad 0\leqslant t\leqslant T_0\cdot\tag{16}$$

令 $K=\max\left\{2,(12/(\varepsilon+8))^{\omega/\varepsilon}\right\}$, 则由(16) 可以得到(8)• 为了得到(9), 构造如下函数:

$$B(t)=k_2u(1,t)^2+(k_1+6)u(1,t)^4+(\varepsilon+4)\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x+u_x^2(0,t)\cdot$$

由(15) 可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1(x+1)u^2\mathrm{d}x+B(t)\leqslant 3\int_0^1u^4\mathrm{d}x+\varepsilon\int_0^1u^2\mathrm{d}x\leqslant 3\left(\int_0^1u^2\mathrm{d}x\right)^2+\varepsilon\int_0^1u^2\mathrm{d}x,\tag{17}$$

在(17) 两边同乘以 $\mathrm{e}^{\omega t}$, 则可知:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\omega t}\int_0^1(x+1)u^2\mathrm{d}x\right)+\mathrm{e}^{\omega t}B(t)\leqslant C(\|u^0\|^2+\|u^0\|^{4+4\omega/\varepsilon})\mathrm{e}^{-\omega t},\tag{18}$$

其中 $C=C(\varepsilon,\omega)$ 是一个一般的线性连续函数• 对(18) 从 0 到 ∞积分可得:

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{\omega s}B(s)\mathrm{d}s\leqslant cF(\|u^0\|),\tag{19}$$

另外 $V(t)$ 由的定义, $u(x,t)^2=\left(\int_0^1 u_x\mathrm{d}x\right)^2\leqslant x\int_0^1 u_x^2\mathrm{d}x\leqslant V(t)$ 以及

$$12\int_0^1 u^2u_xu_{xx}\mathrm{d}x\leqslant\frac{18}{\varepsilon}\int_0^1 u^4u_x^2\mathrm{d}x+2\varepsilon\int_0^1 u_{xx}^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{18}{\varepsilon}V(t)^3+2\varepsilon\int_0^1 u_{xx}^2\mathrm{d}x,$$

可知:

$$\dot{V}(t)\leqslant 2k_1^2V(t)u(1,t)^4+\frac{18}{\varepsilon}V(t)^3+2k_2^2V(t)\cdot\tag{20}$$

在(20)两边同乘以 $\mathrm{e}^{\omega t}$, 我们有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{\omega t}V(t))\leqslant\omega\mathrm{e}^{\omega t}V(t)+\left[2k_1^2u(1,t)^4+\frac{18}{\varepsilon}V(t)^2+2k_2^2\right]V(t)\mathrm{e}^{\omega t},\tag{21}$$

对(21)从 0 到 t 积分并利用(19), 可推知:

$$\mathrm{e}^{\omega t}V(t)\leqslant cF(\|u^0\|_{H^1})\exp[cF(\|u^0\|)],$$

因此由嵌入定理可知:

$$\|u_x(t)\|^2\leqslant cF(\|u^0\|_{H^1})\exp[cF(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t},\qquad\forall t\geqslant 0$$

即(9)成立• 同理我们可得:

$$\|u_t\|^2\leqslant 2\|u_t(0)\|^2\exp\left(\int_0^1 162\|u_x(s)\|^4\mathrm{d}s\right)\mathrm{e}^{-\omega t}\leqslant$$
$$cF(\|u^0\|_{H^3})\exp[cF^2(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t},\tag{22}$$

所以:

$$\|u_{xx}\|^2\leqslant c(\|u_t\|^2+\|u_x\|^2+\|u_x\|^4+\|u_x\|^6+\|u_x\|^8)\leqslant$$
$$c\sum_{i=1}^4 F^i(\|u^0\|_{H^3})\exp[cF^2(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t},\tag{23}$$

类似(23)并利用(1)可得:

$$\|u_{xxx}\|^2\leqslant c(\|u_{xx}\|^2+\|u_t\|^2+\|u_x\|^6)\leqslant$$
$$c\sum_{i=1}^4 F^i(\|u^0\|_{H^3})\exp[cF^2(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t},$$

因此有:

$$\|u^0\|_{H^3}^2\leqslant 3\|u_{xx}\|^2+\|u_{xxx}\|^2\leqslant c\sum_{i=1}^4 F^i(\|u^0\|_{H^3})\exp[cF^2(\|u^0\|)]\mathrm{e}^{-\omega t},$$

即(10)成立• 类似上述过程, 我们可推得(6)、(7)成立•

2) 解对初始值的连续依赖性

由(5)、(6)、(8)、(9), 我们可知解的估计式(5)~(10)是成立的• 下面研究解对初始值的连续依赖性•

在(11)用 u_1, u_2 和 z 来代替 ω_1, ω_2 和 η 有:

$$z_t-\varepsilon z_{xx}+z_{xxx}+6u_1^2z_x+6z(u_1+u_2)u_{2x}=0,\qquad 0<x<1,\ 0<t<T,$$

于是有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 z(t)^2\mathrm{d}x=2\int_0^1 z[\varepsilon z_{xx}-z_{xxx}-6u_1^2z_x-6z(u_1+u_2)u_{2x}]\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-2z(1,t)z_{xx}(1,t)-z_x^2(0,t)-2\varepsilon\|z_x\|^2+$$
$$2\|z\|(6\|u_1^2\|\|z_x\|+6\|z\|\|u_1+u_2\|\|u_{2x}\|),$$

由(19)可得:

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 \leqslant 6\|u_1^0-u_2^0\|^2\exp\left(c\int_0^1\|u_{1x}(s)\|^2+\|u_{2x}(s)\|^2\mathrm{d}s\right)\leqslant$$
$$6C(\|u_1^0\|,\|u_2^0\|)\|u_1^0-u_2^0\|^2,\qquad t\geqslant 0, \tag{24}$$

同时有:

$$\int_0^{\infty}(z_x(0,t)^2+\|z_x(t)\|^2)\mathrm{d}t\leqslant C(\|u_1^0\|,\|u_2^0\|)\|u_1^0-u_2^0\|^2, \tag{25}$$

另外还可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 z_x^2(t)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 z_{xx}[-\varepsilon_{xx}+z_{xxx}+6u_1^2z_x+6z(u_1+u_2)u_{2x}]\mathrm{d}x\leqslant$$
$$z_{xx}^2(1,t)-z_{xx}^2(0,t)-2\varepsilon\|z_{xx}\|^2+$$
$$2\|z_{xx}\|(\|u_1^2\|\|z_x\|+\|u_{2x}\|\|z\|(\|u_1+u_2\|))\cdot \tag{26}$$

利用(19)和(25)有:

$$\|u_{1x}(t)-u_{2x}(t)\|^2\leqslant C(\|u_1^0\|,\|u_2^0\|)\|u_1^0-u_2^0\|^2, \tag{27}$$

进一步还可得到:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 z_t(t)^2\mathrm{d}x = 2\int_0^1 z_t\cdot z_{tt}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-2z_t(1,t)z_{xxt}(1,t)-z_{xt}^2(0,t)-2\varepsilon\|z_{xt}\|^2+$$
$$2\|z_t\|(6\|u_{1t}^2\|\|z_{xt}\|+6\|z_t\|\|u_{1t}+u_{2t}\|\|u_{2xt}\|)\leqslant$$
$$c\|z\|^2\sum_{i=1}^2(\|u_{it}\|^2+\|u_{ixt}\|^2)+c\|z_x\|^2\sum_{i=1}^2\|u_{it}\|^2+$$
$$c\|z_t\|^2\sum_{i=1}^2(\|u_{ix}\|^2+\|u_{ix}\|^2), \tag{28}$$

进一步还可得到:

$$\int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^2\|u_{ixt}\|^2\right)\mathrm{d}t\leqslant C(\|u_1^0\|_{H^3},\|u_2^0\|_{H^3})\cdot$$

因此由(10)、(22)、(24)、(25)、(28)可推知:

$$\|u_{1x}(t)-u_{2x}(t)\|^2\leqslant C(\|u_1^0\|_{H^3},\|u_2^0\|_{H^3})\|u_1^0-u_2^0\|_{H^3}^2,\qquad t\geqslant 0, \tag{29}$$

于是我们有:

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{H^3}^2\leqslant C(\|u_1^0\|_{H^3},\|u_2^0\|_{H^3})\|u_1^0-u_2^0\|_{H^3}^2,\qquad t\geqslant 0\cdot \tag{30}$$

3) 局部弱解和古典解的存在和唯一性的证明

对任意的 $u^0(x)\in H_0^1(0,1)$, 由(27)、(29)、(30)并利用稠密性可得到: 系统(1)~(3)存在一个局部弱解和局部经典解• 进一步对任意的初始值 $u^0(x)\in H_0^2(0,1)\cap H^3(0,1)$, 可证方程(1)~(3)存在一个局部经典解• 解的唯一性的证明由(27)可直接得到•

4) 全局弱解和经典解的存在和唯一性

由(5)、(8)、(9), 解在有限时间内不会破裂且局部解可以延伸到无穷, 因此我们就得到了全局弱解和经典解的存在和唯一性•

由此我们就完成了全部的证明•

[参 考 文 献]

[1] Russell D L, Zhang B Y. Exact controllability and stabilizability of the Korteweg_de Vries equation[J]. Trans Amer Math, 1996, **348**(9): 3643—3672.

[2] Naumkin P I, Shishmarev I A. On the decay of step_like data for the Korteweg_de_Vries_Burgers equation[J]. Funktsional. Anal. Prilozhen, 1992, **26**(2): 88—93.

[3] LIU Wei_jiu, Miroslav Krstic. Global boundary stabilization of the Korteweg_de Vries Burgers equation [J]. Computational and Applied Math, 2002, **21**(1): 315—354.

Boundary Control of MKdV_Burgers Equation

TIAN Li_xin[1], ZHAO Zhi_feng[1,2], WANG Jing_feng[1]

(1. Nonlinear Scientific Research Center, Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R. China;

2. Zhenjiang Watercraft College of PLA, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R. China)

Abstract: The boundary control of MKdV_Burgers equation was considered by feedback control on the domain[0, 1]. The existence of the solution of MKdV_Burgers equation with the feedback control law was proved. On the base, priori estimates for the solution was given. At last, the existence of the weak solution of MKdV_Burgers equation was proved and global_exponential and asymptotic stability of the solution of MKdV_Burgers equation was given.

Key words: Boundary control; feedback control law; MKdV_Burgers equation