

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0001-05

# 基于当地笛卡尔架构的无网格方法

刘高联, 李孝伟

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委刘高联来稿)

**摘要:** 提出了一种新的无网格方法, 该方法是自动地在每一样点建立一个局部笛卡尔架构并选取相应的邻近点, 然后运用全导数公式构造该样点的所有导数, 它不需要任何网格单元, 所以是彻底的无网格方法。数值算例表明, 该方法具有很高的精度。

**关键词:** 无网格; 全导数; 笛卡尔架构

**中图分类号:** O357.5      **文献标识码:** A

## 引 言

在传统的数值解法(差分法、有限元法、有限体积法等)中, 都要求首先划分网格, 这本身就是一项相当复杂、费力费时的的工作, 特别是有许多问题, 比如固体裂纹扩展和流体中激波、涡面等, 在所考虑的区域具有几何形状连续变化的特点, 运用传统的方法来分析这些问题是非常困难和耗时的, 因为, 为了避免网格的过度变形导致计算失败, 这些方法都必须不断地重新构造计算区域的网格, 从而大大降低计算效率并造成计算资源的浪费。所以, 为了有效地解决这些问题, 最近几年来已有不少学者将重点放在了发展所谓的无网格方法上。在无网格方法中, 问题的求解是一个点一个点的进行, 不需要生成网格单元。在文献[1]至文献[7]中, 我们可以看到最近发展的几种典型的无网格方法。

无网格方法包括以下几个步骤: 1) 在分析的区域中任意地布点; 2) 为每一个样点配点, 从而形成覆盖整个计算区域的一系列子域; 3) 在每个子域中构造未知量的近似函数; 4) 推导样点的离散型的控制方程; 5) 求解控制方程。其中, 步骤 2) 和 3) 是非常重要的, 它们通常决定着操作过程的复杂程度和数值解的精确性。在文献中提供的大部分方法是预设一个半径, 以样点为圆心划出一个子域, 然后通过该子域内的所有点上的函数值构造近似函数。我们知道, 如果点的分布是杂乱无章的, 划分子域时很难预设半径大小, 并且在不同子域内点的数目不一样, 不容易以通用的形式构造近似函数。因此, 本文力图在该研究领域内探索和发展其他无网格方法以避免以上缺陷。

本文提出一种新的无网格方法, 其主要特点是自动地在每一样点建立一个笛卡尔架构并选取相应的邻近点, 然后运用全导数公式构造该样点的所有导数。该方法不需要任何网格单

收稿日期: 2004\_11\_23; 修订日期: 2005\_09\_21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372055); 上海市重点学科建设项目资助(Y0103)

作者简介: 刘高联(1932), 男, 江西奉新县人, 教授, 硕士, 中科院院士;

李孝伟(联系人, Tel: + 86\_21\_56385962; E\_mail: xwli@staff.shu.edu.cn)

元, 所以是彻底的无网格方法, 并且整个过程非常容易通用化, 弥补了前有方法的不足 数值算例表明, 本文方法具有很高的精度

# 1 离散方法

我们选用下面的 Poisson 方程来说明本文方法的离散思想:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = Q(x, y) \tag{1}$$

在无网格方法中, 需要运用某一点的一系列邻近点的函数值来近似该点的函数值及其导数 那么一个重要任务就是为某个样点选择适当的邻点 下面将说明本文方法的选点过程

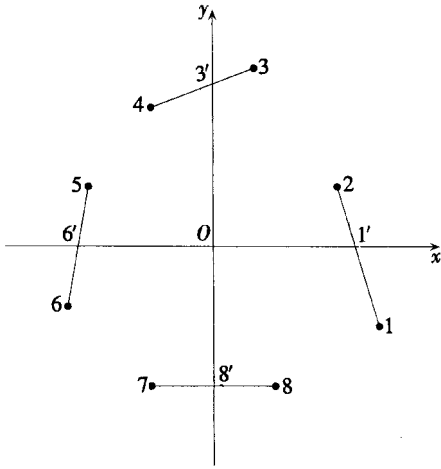


图 1 样点 O 上的笛卡尔架构及点 O 的邻点

首先, 在所研究的区域中任意布点 然后选取点 O 作为要在其上构造导数的样点 引入一个笛卡尔架构  $Oxy$ , 其原点与点 O 重合, 如图 1 所示 如果某一点在笛卡尔架构  $Oxy$  的第 4 象限中, 并且该点离点 O 和  $x$  轴最近, 那么我们将这一点定义为点 1, 可以看出点 1 不会是点 O 本身 如果某一点在笛卡尔架构  $Oxy$  的第 1 象限中, 并且该点离点 O 和  $x$  轴最近, 那么我们将这一点定义为点 2 如果某一点在笛卡尔架构  $Oxy$  的第 1 象限中, 并且该点离点 O 和  $y$  轴最近, 那么我们将这一点定义为点 3 依据同样的原则可以定义出图 1 中的点 4~ 点 8 对于所研究的区域中的所有样点均实行同样的操作, 那么为每一个样点配置 8 个邻点的工作就完成了

下面以二阶导数项  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  为例来说明本文方法的离散过程

引入辅助点 1 和点 6, 它们分别为线段  $\overline{12}$ 、 $\overline{56}$  与  $x$  轴的交点 那么二阶导数项  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  可以写为如下的离散形式:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{a_x \cdot 1 + b_x \cdot 0 + c_x \cdot 6}{h_1 + h_2}, \tag{2a}$$

其中  $a_x = \frac{2}{h_1}$ ,  $b_x = -\frac{2}{h_1} - \frac{2}{h_2}$ ,  $c_x = \frac{2}{h_2}$ ,  $h_1 = \overline{10}$ ,  $h_2 = \overline{60}$ ,  $h_1 + h_2 = \overline{61}$

既然点 1 和点 6 为辅助点, 而不是真正的节点, 那么就应当消去方程(2a)中的 1 和 6 为此, 应用如下的全导数公式:

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{02} = \frac{1}{x} + \text{tg } 2 \frac{1}{y},$$

$$\left. \frac{d}{dx} \right|_{01} = \frac{1}{x} + \text{tg } 1 \frac{1}{y},$$

(注:  $\alpha_i$  为  $\overline{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) 与  $x$  轴的夹角)

可以得到

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{\text{tg } 1 - \text{tg } 2} \left[ \left. \frac{d}{dx} \right|_{01} - \left. \frac{d}{dx} \right|_{02} \right], \tag{2b1}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\text{tg } 1 - \text{tg } 2} \left[ \text{tg } 1 \left. \frac{d}{dx} \right|_{02} - \text{tg } 2 \left. \frac{d}{dx} \right|_{01} \right], \tag{2b2}$$

离散方程(2b)得

$$1 - 0 = \frac{h_1}{\text{tg } 2 - \text{tg } 1} \left[ \text{tg } 2 \frac{1 - 0}{x_1 - x_0} - \text{tg } 1 \frac{2 - 0}{x_2 - x_0} \right], \quad (2c)$$

类似地,可以得到

$$6 - 0 = \frac{h_2}{\text{tg } 6 - \text{tg } 5} \left[ \text{tg } 6 \frac{5 - 0}{x_5 - x_0} - \text{tg } 5 \frac{6 - 0}{x_6 - x_0} \right], \quad (2d)$$

将方程(2c)和(2d)代入方程(2a)中消去  $u_1$  和  $u_6$ , 从而得到  $u^2 / x^2$  的最终离散表达式:

$$\frac{u^2}{x^2} = \frac{1}{h_1 + h_2} \left\{ (a_x + b_x + c_x) u_0 + \frac{a_x h_1}{\text{tg } 2 - \text{tg } 1} \left[ \text{tg } 2 \frac{1 - 0}{x_1 - x_0} - \text{tg } 1 \frac{2 - 0}{x_2 - x_0} \right] - \frac{c_x h_2}{\text{tg } 6 - \text{tg } 5} \left[ \text{tg } 6 \frac{5 - 0}{x_5 - x_0} - \text{tg } 5 \frac{6 - 0}{x_6 - x_0} \right] \right\}, \quad (3)$$

遵循同样的过程,可以得到  $u^2 / y^2$  的离散表达式:

$$\frac{u^2}{y^2} = \frac{1}{h_3 + h_4} \left\{ (a_y + b_y + c_y) u_0 + \frac{a_y h_3}{\text{tg } 4 - \text{tg } 3} \left[ \text{tg } 4 \frac{3 - 0}{y_3 - y_0} - \text{tg } 3 \frac{4 - 0}{y_4 - y_0} \right] - \frac{c_y h_4}{\text{tg } 8 - \text{tg } 7} \left[ \text{tg } 8 \frac{7 - 0}{y_7 - y_0} - \text{tg } 7 \frac{8 - 0}{y_8 - y_0} \right] \right\}, \quad (4)$$

其中  $a_x = \frac{2}{h_3}$ ,  $b_x = -\frac{2}{h_3} - \frac{2}{h_4}$ ,  $c_x = \frac{2}{h_4}$ ,  $h_3 = \overline{30}$ ,  $h_4 = \overline{80}$ ,  $h_3 + h_4 = \overline{83}$

将(3)和(4)代入方程(1),得到 Poisson 方程的离散形式:

$$\sum_{i=1}^8 a_i u_i + a_0 u_0 = Q(x, y), \quad (5)$$

其中

$$a_0 = \frac{1}{h_1 + h_2} \left\{ (a_x + b_x + c_x) + \frac{a_x h_1}{\text{tg } 2 - \text{tg } 1} \left[ \text{tg } 2 \frac{-1}{x_1 - x_0} - \text{tg } 1 \frac{-1}{x_2 - x_0} \right] - \frac{c_x h_2}{\text{tg } 6 - \text{tg } 5} \left[ \text{tg } 6 \frac{-1}{x_5 - x_0} - \text{tg } 5 \frac{-1}{x_6 - x_0} \right] \right\} +$$

$$\frac{1}{h_3 + h_4} \left\{ (a_y + b_y + c_y) + \frac{a_y h_3}{\text{tg } 4 - \text{tg } 3} \left[ \text{tg } 4 \frac{-1}{y_3 - y_0} - \text{tg } 3 \frac{-1}{y_2 - y_0} \right] - \frac{c_y h_4}{\text{tg } 8 - \text{tg } 7} \left[ \text{tg } 8 \frac{-1}{y_5 - y_0} - \text{tg } 7 \frac{-1}{y_6 - y_0} \right] \right\},$$

$$a_1 = \frac{1}{h_1 + h_2} \frac{a_x h_1}{\text{tg } 2 - \text{tg } 1} \text{tg } 2 \frac{1}{x_1 - x_0}, \quad a_2 = \frac{1}{h_1 + h_2} \frac{-a_x h_1}{\text{tg } 2 - \text{tg } 1} \text{tg } 1 \frac{1}{x_2 - x_0},$$

$$a_3 = \frac{1}{h_3 + h_4} \frac{a_y h_3}{\text{tg } 4 - \text{tg } 3} \text{tg } 3 \frac{1}{y_3 - y_0}, \quad a_4 = \frac{1}{h_3 + h_4} \frac{-a_y h_3}{\text{tg } 4 - \text{tg } 3} \text{tg } 3 \frac{1}{y_4 - y_0},$$

$$a_5 = \frac{1}{h_1 + h_2} \frac{-c_x h_2}{\text{tg } 6 - \text{tg } 5} \text{tg } 6 \frac{1}{x_5 - x_0}, \quad a_6 = \frac{1}{h_1 + h_2} \frac{c_x h_2}{\text{tg } 6 - \text{tg } 5} \text{tg } 5 \frac{1}{x_6 - x_0},$$

$$a_7 = \frac{1}{h_3 + h_4} \frac{-c_y h_4}{\text{tg } 8 - \text{tg } 7} \text{tg } 8 \frac{1}{y_7 - y_0}, \quad a_8 = \frac{1}{h_3 + h_4} \frac{c_y h_4}{\text{tg } 8 - \text{tg } 7} \text{tg } 7 \frac{1}{y_8 - y_0},$$

## 2 数值算例

以二维 Poisson 方程为例验证本文方法的有效性及其精度

问题: 平直槽道内得圆柱绕流

控制方程为:

$$\frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2} = 0, \quad (6)$$

其中, 为流函数

边界条件为:

$$\text{左边界: } \frac{\psi}{x} = 0;$$

$$\text{右边界: } \frac{\psi}{x} = 0;$$

$$\text{上边界: } \psi = H/2,$$

$$\text{下边界及圆柱面上: } \psi = 0$$

该问题有精确解:

$$\psi = y - \frac{H \operatorname{sh}^2\left(\frac{a}{H}\right) \sin\left(\frac{2y}{H}\right)}{2 \left[ \operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{H}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{H}\right) \right]}, \quad (7)$$

以上各式中,  $H$  为槽道宽度,  $a$  为圆柱半径 本算例中取  $H = 8.0$ ,  $a = 1.0$

在计算区域内任意分布节点, 如图 2 所示 然后运用本文的无网格方法对以上问题进行数值模拟 得到的等 线如图 2 所示 图 3 给出了计算得到的圆柱面上的压力系数分布与精确解的对比, 二者吻合良好 本算例说明了本文方法的有效性和精度都很高

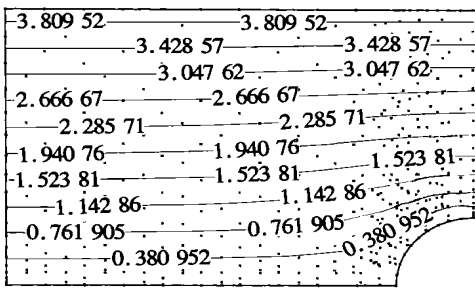


图 2 点分布与等 线

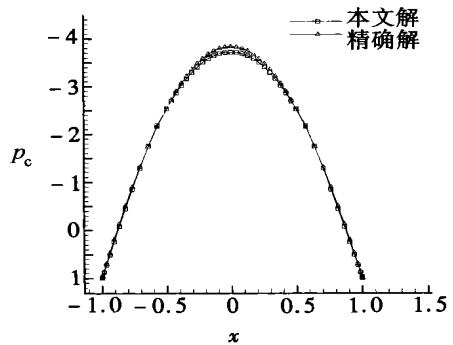


图 3 圆柱表面的压力分布

### 3 结 论

本文提出的无网格方法具有两个有特色的技术, 一是采用当地笛卡尔架构自动配置每一样点的邻点, 二是运用全导数公式通过邻点的函数值构造样点的各项导数 这两项技术理论上很简单, 并且很容易通用化, 所以可以解决前有无网格方法中存在的相关缺陷 数值算例也显示出本文方法的精确性和有效性

#### [参 考 文 献]

- [1] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method for analysis of fluid flow problem [A]. In: Proceedings of the 9th Int. Conference on Finite Element Methods in Fluids [C]. Venice Italy: October, 1995, 15-21.
- [2] Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz O C, et al. A finite point method method in computational mechanics, applications to convective transport and fluid flow[J]. Int J Num Meth Eng, 1996, 39: 3839-3866.

- [3] Beissel S, Belytschko B. Nodal integration of the element\_free Galerkin method[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1996, **139**(1): 49–74.
- [4] Furukawa T, Yang C, Yagawa G, et al. Quadrilateral approaches for accurate free mesh method[J]. *Int J Num Meth Eng*, 2000, **47**: 1445–1462.
- [5] Premoze S, Tasdizen T, Bigler J, et al. Particle\_based simulation of fluids[J]. *Eurographics*, 2003, **22**(3): 401–410.
- [6] Monaghan J J. Smoothed particle hydrodynamics: some recent improvement and application Annu[J]. *Rev Astron Physics*, 1992, **30**: 543–574.
- [7] Liu W K, Jun S, Li S, et al. Reproducing kernel particle method for structure dynamics[J]. *Int J Num Meth Eng*, 1995, **38**: 1655–1679.

## Mesh Free Method Based on Local Cartesian Frame

LIU Gao\_lian, LI Xiao\_wei

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** A new mesh free method proposed by the authors was presented in which the derivatives at each node were constructed using whole derivative formulas through the nodes selected around the node using local Cartesian frame in an autonomous manner, so that without any element it could be considered as a completely mesh free method. The method had been tested with a numerical example, and reliable solution was obtained with high accuracy and efficiency.

**Key words:** mesh free; whole derivative; Cartesian frame