

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0021-07

# 微分本构粘弹性轴向运动弦线 横向振动分析的差分法

赵维加<sup>1</sup>, 陈立群<sup>2,3</sup>, 祖武争<sup>4</sup>

(1. 青岛大学 数学系, 青岛 266071;

2. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

3. 上海大学 力学系, 上海 200072;

4. 多伦多大学 机械工程系, M5S 3G8 加拿大)

(我刊编委陈立群来稿)

**摘要:** 给出了微分本构粘弹性轴向运动弦线横向振动数值仿真的一种差分法。文中建立了具有微分本构的粘弹性运动弦线的横向振动模型; 通过对系统的控制方程和本构方程在不同的分数节点离散, 得到一种新的差分方法。利用这一方法, 弦线振动方程的数值计算过程可以交替地显式进行, 且有较小的截断误差和好的数值稳定性。与通用的方法比较, 新的方法计算简单、方便。文中利用方程的不变量检验了数值结果的可靠性, 并利用这一方法给出了一类弦线模型的参数振动分析。

**关键词:** 轴向运动弦线; 横向振动; 粘弹性; 有限差分; 分数节点; 动力学分析  
**中图分类号:** O322; O241.82      **文献标识码:** A

## 引 言

工程中的许多运动系统如汽车的蛇型传动带、线切割机床的放电镍丝、磁带和运动纺织纤维等, 忽略抗弯刚度, 都可以模型化为轴向运动弦线。轴向运动弦线的横向振动是工程中一个常见的问题, 这方面的研究已有 100 多年的历史<sup>[1]</sup>。早期的研究集中在线性模型和弹性模型。近年来, 研究的注意力转向更复杂的非线性系统如多条弦线的复杂系统和粘弹性弦线的振动问题等<sup>[2]</sup>。由于问题的数学模型归结为非线性微分方程或微分/积分方程, 一般没有解析的结果。近似解析方法如摄动方法等目前广泛用于弦线系统的研究, 但这种研究有公式繁杂和近似精度低的缺点, 难以用于工程计算。数值方法有较好的实用性和较高的精度, 许多有效的方法已使用在弦线振动的分析中。如 Galerkin 方法、半离散的有限差分法和有限元法等<sup>[2~5]</sup>。许多技巧如 Laplace 变换和行波函数等的应用改进了算法的效率和精度<sup>[6~8]</sup>。

粘弹性弦线的本构关系有多种形式, 如微分本构的 Standard 模型和 Kelvin 模型, 积分本构

收稿日期: 2003\_05\_30; 修订日期: 2005\_09\_06

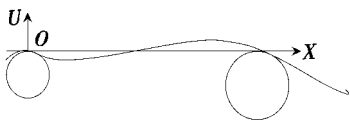
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172056)

作者简介: 赵维加(1955), 男, 山东临沂人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_532\_82713972; E\_mail: zhwei-jia@sohu.com)

的幂型模型和分数导数模型等 因此数值方法也有差异 且由于粘弹性弦线的运动方程的非线性, 利用通用数值方法计算过程复杂, 计算量大且数值稳定性差 本文讨论微分本构 Standard 模型的数值计算问题 对于这种模型的本构关系的非线性隐式结构, 直接利用 Galerkin 方法或有限差分法等通用方法, 计算复杂且往往得到发散结果 本文通过对系统的运动控制方程和本构方程在不同分数节点作差分离散, 得到可以交替显式计算的差分方法, 较好地解决了非线性项的计算问题, 大大减少了计算量 算法的运动方程采用 Crank\_Nicoson 的离散技巧, 有较高的离散精度 对小的初始条件, 计算过程稳定, 可以较长时间地模拟振动过程 文中给出了数值方法的应用, 并利用守恒量对计算结果的可靠性进行了检验

### 1 数学模型

考虑密度  $\rho$ , 横截面积  $A$ , 受到分布载荷  $F(T, X)$  的张紧的均匀弦线以常速度  $c$  沿轴向运动(图 1) 设  $T$  是时间,  $U(X, T)$  是弦线的横向位移, 弦线的张力  $P$  为常数, 利用 Hamilton 原理和变分原理, 可导出下述弦线横向运动的动力学方程<sup>[1]</sup>



$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + 2c \frac{\partial^2 U}{\partial T \partial X} + \left( c^2 - \frac{P}{A} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{1}{A} F(T, X), \tag{1}$$

图 1 弦线系统的物理模型 其中  $\sigma$  是弦线的轴向应力 对于粘弹性材料, 其应力\_应变关系常常采用下述微分本构模型描述<sup>[4]</sup>

$$\sigma = E^* \epsilon, \tag{2}$$

其中

$$E^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \right)^2 \tag{3}$$

是 Lagrange 应变, 微分算子  $E^*$  定义为

$$E^* w = \left\{ g \left[ \begin{matrix} k & i \\ i=0 & i \end{matrix} \right] g = \left[ \begin{matrix} k & i \\ i=0 & i \end{matrix} \right] w \right\} \tag{4}$$

算子  $E^*$  的一个重要的例子是微分本构的 Standard 模型 其本构关系可描述为<sup>[1]</sup>

$$\left( 1 + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{E_1 + E_2} \right) \epsilon = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left( E_2 + \frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon, \tag{5}$$

把方程(1)式和(5)式作无量纲化变换并把弦线的横向速度作为新的未知函数引入, 则得到一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} + (c^2 - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( s \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(t, x), \tag{7}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) s = \frac{E}{2} \left( 1 + E \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \tag{8}$$

其中

$$u = \frac{U}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad t = T \left( \frac{P}{AL^2} \right)^{1/2}, \quad s = \frac{A}{T}, \quad = v_T \left( \frac{A}{P} \right)^{1/2}, \tag{9a}$$

$$f(t, x) = \frac{L}{P} F(T, X), \quad = \frac{E_1 + E_2}{\left( \frac{AL^2}{T} \right)^{1/2}}, \tag{9b}$$

$$E = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{A}{T}, \quad E = \frac{T}{E_2 \left( \frac{T}{AL^2} \right)^{1/2}}, \quad (9c)$$

本文只考虑齐次边界条件

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad (10)$$

对非齐次边界条件, 可通过线性变换化为齐次边界条件处理

## 2 数值方法

### 2.1 控制方程的数值离散

采用等距网格

$$t_i = i t, \quad i = 1, 2, \dots; \quad x_j = j x, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (11)$$

在点  $(t_{i+1/2}, x_j)$  处对方程组(6)式、(7)式作差分离散 由于

$$\frac{u}{t}(t_{i+1/2}, x_j) = \frac{u(t_{i+1}, x_j) - u(t_i, x_j)}{t} + O(t^2), \quad (12)$$

$$\frac{u}{x}(t_{i+1/2}, x_j) = \frac{1}{4x} (u(t_{i+1}, x_{j+1}) - u(t_{i+1}, x_{j-1}) + u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_{j-1})) + O(t^2 + x^2), \quad (13)$$

$$\frac{1}{x} \left( s \frac{u}{x} \right) (t_{i+1/2}, x_j) = \frac{1}{x} 2 [s(t_{i+1/2}, x_{j+1/2}) (u(t_{i+1/2}, x_{j+1}) - u(t_{i+1/2}, x_j)) - s(t_{i+1/2}, x_{j-1/2}) (u_{j+1/2}^{i+} - u_{j-1/2}^{i+})] + O(t^2 + x^2), \quad (14)$$

将(12)式、(13)式和(14)式带入式(6)式、(7)式, 略去  $O(t^2 + x^2)$  得到方程的差分方法

$$u_j^{i+1} - u_j^i = \frac{t}{2} (v_j^{i+1} + v_j^i), \quad (15)$$

$$v_j^{i+1} - v_j^i = -\frac{i+1/2}{2x} t L u_j^i + \frac{(1 - \frac{2}{i+1/2}) t}{2x^2} L_1 u_j^i + \frac{t}{2x} 2 [s_{j+1/2}^{i+1/2} (u_{j+1}^{i+1} - u_j^{i+1} + u_{j+1}^i - u_j^i) - s_{j-1/2}^{i+1/2} (u_j^{i+1} - u_{j-1}^{i+1} + u_j^i - u_{j-1}^i)] + f(t_{i+1/2}, x_j), \quad (16)$$

其中

$$L u_j^i = u_{j+1}^{i+1} - u_{j-1}^{i+1} + u_{j+1}^i - u_{j-1}^i, \quad (17)$$

$$L_1 u_j^i = u_{j+1}^{i+1} - 2u_j^{i+1} + u_{j-1}^{i+1} + u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i \quad (18)$$

在差分方程(16)式中, 由于不同的物质的本构关系不同, 求解  $s(t, x)$  的差分方程也不同 可以通过对相应的本构方程离散得到, 然后与方程组(15)式、(16)式联立求解

### 2.2 本构方程的数值离散

考虑 Standard 模型的无量纲形式(8)式, 将其在  $(t_i, x_{j+1/2})$  处离散 由于

$$\frac{s}{t} \Big|_{i, j+1/2} = \frac{s(t_{i+1/2}, x_{j+1/2}) - s(t_{i-1/2}, x_{j+1/2})}{t} + O(t^2), \quad (19)$$

$$s(t_i, x_{j+1/2}) = \frac{1}{2} (s(t_{i+1/2}, x_{j+1/2}) + s(t_{i-1/2}, x_{j+1/2})) + O(t^2), \quad (20)$$

$$\frac{u}{x} \Big|_{i, j+1/2} = \frac{u(t_i, x_{j+1}) - u(t_i, x_j)}{x} + O(x^2), \quad (21)$$

$$\frac{2u}{x t} \Big|_{i, j+1/2} = \frac{v(t_i, x_{j+1}) - v(t_i, x_j)}{x} + O(x^2), \quad (22)$$

把(19)式~(22)式代入方程(8)式并略去高阶小量  $O(t^2 + x^2)$  得到差分格式

$$\frac{s_{j+1/2}^{i+1/2} - s_{j+1/2}^{i-1/2}}{2} + \frac{t}{2} (s_{j+1/2}^{i+1/2} + s_{j+1/2}^{i-1/2}) =$$

$$\frac{E}{2} \left[ \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{x} \right]^2 + EE \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{x} \frac{v_{j+1}^i - v_j^i}{x}, \quad (23)$$

差分格式(23)式和(15)式、(16)式的计算可以交替地进行,因此每个迭代步只需解两个稀疏的线性方程组

记  $I$  为单位矩阵, 并记

$$\mathbf{U}^j = (u_1^i \quad u_2^i \quad \dots \quad u_n^i)^T, \quad \mathbf{V}^j = (v_1^i \quad v_2^i \quad \dots \quad v_n^i)^T, \quad (24)$$

$$\mathbf{S}^{i+1} = (s_{1/2}^{i+1} \quad s_{3/2}^{i+1/2} \quad s_{5/2}^{i+1/2} \quad \dots \quad s_{n+1/2}^{i+1/2})^T, \quad (25)$$

上述交替计算过程可以用矩阵形式表示为:

$$\begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^{j+1} \\ \mathbf{V}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}^j \\ \mathbf{V}^j \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} h_1 & g_1 & 0 & & 0 & 1 & k & 0 & 0 \\ f_2 & h_2 & g_2 & & & -k & 1 & k & \\ 0 & & & & & 0 & & & \\ & f_{n-1} & h_{n-1} & g_{n-1} & & & -k & 1 & k \\ 0 & & f_n & h_n & 0 & & -k & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ u_n^{j+1} \\ v_1^{j+1} \\ v_n^{j+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -h_1 & -g_1 & 0 & & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \\ -f_2 & -h_2 & -g_2 & & & k & 1 & -k & \\ 0 & & & & & 0 & & & \\ & -f_{n-1} & -h_{n-1} & -g_{n-1} & & & k & 1 & -k \\ 0 & & 0 & -f_n & -h_n & 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^j \\ u_n^j \\ v_1^j \\ v_n^j \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{S}^{i+1} = \mathbf{S}^i + \frac{t}{(1+t/2)} \begin{pmatrix} F_1(\mathbf{U}^i, \mathbf{V}^i) \\ F_n(\mathbf{U}^i, \mathbf{V}^i) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

其中

$$h_j = (1 + (r^{i+1/2})^2 + s_{j+1/2}^{i+1/2} + s_{j-1/2}^{i-1/2}) \frac{t}{2x^2},$$

$$g_j = -[(1 - (r^{i+1/2})^2) + s_{j+1/2}^{i+1/2}] \frac{t}{2x^2},$$

$$k = r^{i+1/2} \frac{t}{2x},$$

$$F_j(\mathbf{U}^i, \mathbf{V}^i) = \frac{E}{2} \left[ \frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{x} \right]^2 + EE \frac{(u_{j+1}^i - u_j^i)(v_{j+1}^i - v_j^i)}{x^2},$$

$$f_j = -[(1 - (r^{i+1/2})^2) + s_{j-1/2}^{i-1/2}] \frac{t}{2x^2},$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n,$$

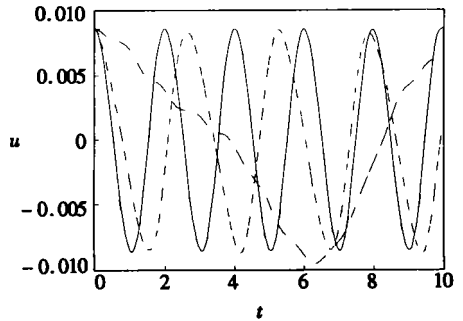
由于  $\{s_j^0\}$  由初值确定,  $\{s_j^{1/2}\}$  的计算可以通过建立  $\{s_j^0\}$ 、 $\{s_j^{1/2}\}$  和  $\{s_j^{3/2}\}$  的插值方程与(28) 式  $i = 1$  的方程联立求解得到 如

$$\{s_j^{3/2}\} = -2\{s_j^0\} + \{s_j^{1/2}\}, \tag{29}$$

即一个方便的选择

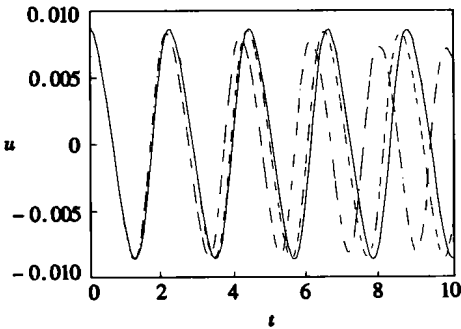
### 3 数值例子和分析

作为数值例子, 本节给出了微分本构粘弹性弦线的横向自由振动的动力学分析, 利用本文中的数值方法分析了运动参数和材料参数的变化对振动的影响 在下面的例子中,  $f(t, x) = 0$ , 初始条件和边值条件为  $v(0, x) = 0$ ,  $u(0, x) = 0.01\sin(x)$  和  $s(0, x) = 0$  差分步长取为  $x = 0.05$ ,  $t = 0.005$  图 2 反映了轴向速度的变化对横向振动的影响 其中  $E = 1$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0.02$ , 实线、虚线和点划线分别对应  $\nu = 0.1$ ,  $\nu = 0.5$  和  $\nu = 0.9$  的情况 数值结果显示, 随着轴向速度的增加, 振动频率放慢, 当接近临界速度  $\nu = 1$  时振动周期变得很大, 但由于粘弹性项的影响, 在临界速度附近计算仍然稳定 图 3 反映弹性参数  $E$  对振动的影响 参数选择为  $\nu = 0.3$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0.02$ , 实线、虚线和点划线分别对应  $E = 0.1$ ,  $E = 2$  和  $E = 10$  数值结果显示, 随着  $E$  的增大, 振幅的周期性变化也逐渐变大, 出现近似周期性的拍 上述结果与弹性弦线的结果近似 图 4 和图 5 描述粘弹性材料模型参数的变化对弦线横向振动的影响 其中图 4 描述参数  $E$  的变化对弦线横向振动的影响, 图中的参数选择为  $E = 1$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\nu = 0.02$ , 实线、



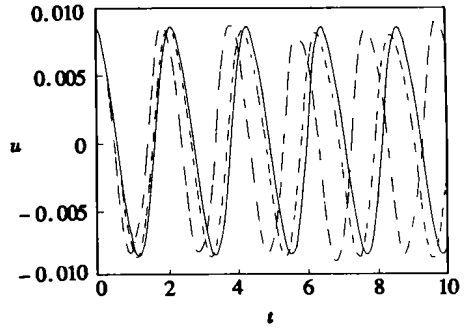
实线:  $\nu = 0.1$ , 虚线:  $\nu = 0.5$ ,  
点划线:  $\nu = 0.9$

图 2  $\nu$  的变化对弦线振动的影响  
( $E = 1, E = 1, \nu = 0.02$ )



实线:  $E = 0.1$ , 虚线:  $E = 2$ ,  
点划线:  $E = 10$

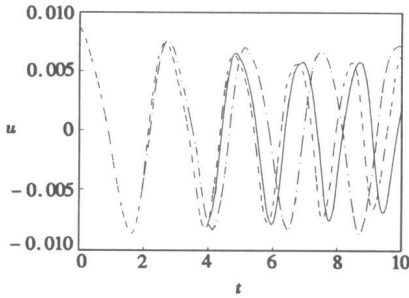
图 3  $E$  的变化对弦线振动的影响  
( $\nu = 0.3, E = 1, \nu = 0.02$ )



实线:  $E = 0.1$ , 虚线:  $E = 5$ ,  
点划线:  $E = 20$

图 4  $E$  的变化对弦线振动的影响  
( $E = 1, \nu = 0.3, \nu = 0.02$ )

虚线和点划线分别对应  $E = 0.1, E = 5$  和  $E = 20$  从图中可以看出, 当参数  $E$  增大时, 由于非线性项的影响, 振动曲线形状逐渐变得不规则, 振动频率随着  $E$  的增大而减小, 但振幅不随  $E$  单调变化 图 5 描述参数  $\nu$  的变化对弦线横向振动的影响 随着  $\nu$  的变大, 弦线横向



实线:  $\gamma = 0$ , 虚线:  $\gamma = 0.05$ , 点划线:  $\gamma = 0.3$

图5  $\gamma$  的变化对弦线振动的影响

( $E = 50$ ,  $\mu = 0.6$ ,  $E_0 = 1$ )

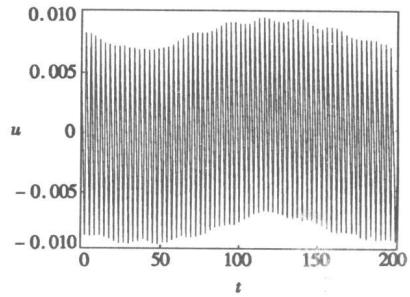


图6 长时间的数值模拟效果

( $\gamma = 0.3$ ,  $E = 0.1$ ,  $E_0 = 1$ ,  $\mu = 0.02$ )

振动的振动曲线变得非常不规则, 甚至出现发散现象, 表现出类似流体的运动特性 图6给出了弦线横向振动的长时间数值模拟的例子, 例子表明, 本文给出的数值算法的计算是稳定的

## 4 结 论

本文给出了计算粘弹性轴向运动的横向振幅的一种数值方法, 通过对控制方程在不同分数节点的数值离散, 使得这一非线性偏微分方程组可以利用显示差分方法交替地计算求解, 计算效率明显提高 算法的截断为  $O(t^2 + x^2)$  且有较好的计算稳定性 文中的数值例子也验证了算法的可靠性

### [参 考 文 献]

- [1] 陈立群, Zu J W. 轴向运动弦线的横向振动及其控制[J]. 力学进展, 2001, **31**(4): 535-546.
- [2] Abrate A S. Vibration of belts and belt drivers[J]. Mech Mach Theory, 1992, **27**(6): 645-659.
- [3] Zhang L, Zu J W. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems[J]. J of Sound and Vibration, 2000, **232**(4): 783-806.
- [4] Zhang L, Zu J W. Non-linear Vibrations of parametrically excited viscoelastic moving belts[J]. Part I: Dynamic resonance. J of Applied Mechanics, 1999, **66**(2): 396-402.
- [5] ZHAO Wei\_jia, CHEN Li\_qun. A numerical algorithm for nonlinear vibration analysis of a viscoelastic moving belt[J]. International J. of Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2002, **3**(2): 139-144.
- [6] Beikmann R S, Perkins N C, Ulssoy A G. Free vibration of serpentine belt drive system[J]. J of Vibration and Acoustics, 1996, **118**(3): 06-413.
- [7] Ni Y Q, Lou W J, Ko J M. A hybrid pseudo\_force/ Laplace transform method for non\_linear transient response of suspended cable[J]. J of sound and vibration, 2000, **238**(2): 189-214.
- [8] Chen T M. The hybrid laplace transform/ finite element method applied to the quasi\_static and dynamic analysis of viscoelastic timoshenko beams[J]. International J Numerical Method in Eng, 1995, **38**: 509-522.
- [9] Gobat J I, Grosenbaugh M A. Comput methods appl[J]. Mech Engng, 2001, **190**(37/38): 487-489.
- [10] Marchuk G I. Methods of Numerical Mathematics [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [11] CHEN Li\_qun, ZHAO Wei\_jia. A computation method for nonlinear vibration of axially accelerating

viscoelastic strings[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 162: 305-310.

## Finite Difference Method for Simulating Transverse Vibrations of an Axially Moving Viscoelastic String

ZHAO Weijia<sup>1</sup>, CHEN Liqun<sup>2,3</sup>, Jean W Zu<sup>4</sup>

(1. Department of Mathematics, Qingdao University, Qingdao 266071, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 20072, P. R. China;

3. Department of Applied Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

4. Department of Mechanical & Engineering, University of Toronto, Ontario M5S 3G8, Canada)

**Abstract:** Finite difference method is presented to simulate transverse vibrations of an axially moving string. The equation of motion is derived first. By discretizing the governing equation and the equation of stress-strain relation at different frictional knots, two linear sparse finite difference equation systems are obtained. The two resulting difference schemes can be calculated alternatively, which make the computation much more efficient. The numerical method makes the nonlinear model easier to deal with and of truncation errors. It also shows stability for small initial values, so it can be used in analyzing the nonlinear vibration of viscoelastic moving string effectively. Numerical examples are presented to demonstrate the efficiency and the stability of the algorithm, and dynamic analysis of a viscoelastic string is given by using the numerical results.

**Key words:** axially moving strings; transverse vibration; viscoelastic; finite difference; alternating iterative; dynamical analysis