

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0035-12

带斜拉索的索结构的特征频率分析^{*}

W·鲍尔森, G·施奈通

(阿肯色州立大学 计算机科学和数学系, 阿肯色 72467, 美国)

(郭兴明推荐)

摘要: 计算了带斜拉索的索结构在面内振动的近似特征频率, 该索结构的不同位置还带有质点。发现经典传递矩阵法已不足以解决此问题, 因此采用较大的外矩阵来确定特征频率方程。然后在对外矩阵渐近估计的基础上, 确定一般索结构的动力学性能。

关键词: 特征频率; 传递矩阵; 外矩阵; 索结构

中图分类号: TU311.3; TU351; O175.9 文献标识码: A

引 言

索结构已经成为结构力学中的重要内容。吊桥、传输线、缆车是索结构的几个实例, 它们属于具有特定用途的固体结构物。很不幸, 这些索的振动由不同的方程控制, 因此无法得到一个精确解。当索结构多于一跨时, 我们可以认为不同跨间索振动是相互影响的。因此为了获得其平面振动的一般方法, 我们必须找到能综合考虑所有这些因素的方法。

虽然还无法对一般索结构进行分析, 但已有一些特定索结构平面振动的近似分析。具有不同端点条件的单个平跨情况的解已是大家熟知的^[1, p. 116]。Simpson^[2]研究了多个平跨和隔离塔耦合的情况。而带斜拉索的分析, 直到 Triantafyllou^[3]才确定了其方程, 并利用 Airy 函数项求得其一一般波动解。有关 Airy 函数的定义和性质可参见文献[4]和文献[5]。他的研究生 Grinfogel^[6]利用这些方程的边界条件, 求得了近似特征频率的渐近解。与 Simpson 的工作不同, Grinfogel 仅仅考虑了单跨索。

本文将研究通过隔离塔、滑轮或质点耦合的多跨索网络的平面振动问题。本文研究的例子请参见图 1。

1 单跨分析

在开始分析前, 我们要用到文献[6]和[3]中带单根斜拉索的结果。由于文献[6]没有完全发表, 我们将在这里介绍其结果, 并改变文中记号使其能够推广到多跨索系统的情况。

如同文献[7], 我们将标记结构的每一单元, 无论它是索跨、滑轮还是质点。然后对每一单

* 收稿日期: 2004_11_24; 修订日期: 2005_09_06

作者简介: W. 鲍尔森, 教授, 博士(联系人, Tel: + 01_870_972_3090; Fax: + 01_870_972_8485; E_mail: wpaulsen@ csm. astate. edu)。

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校。

元生成一个矩阵,用以表明波是怎样通过结构的每个单元传播的·本文中所有的下标变量表示相应的结构单元·

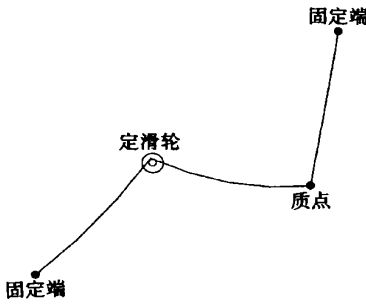


图1 算例示意图

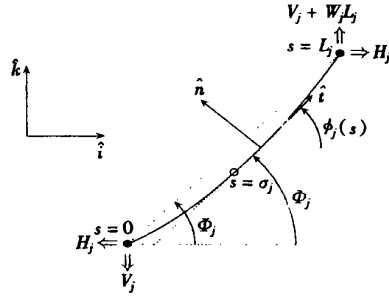


图2 j 单元索跨受力图

若结构的第 j 单元是索的一跨, 设均匀未拉伸时索的横截面积为 A_j , 弹性模量为 E_j , 并且忽略其弯曲刚度· 设 m_j 表示单位长度索的质量· 当索处于海水中时, 令 W_j 为减去浮力后每单位长度索重量, 而 M_j 为由于附加质量引起的每单位长度索质量· 记 Φ 为索的每根弦对 x 轴正向的倾角· 因此, 图1中间索的弦的倾角 $\Phi < 0$ · 设 L_j 为未拉伸时索的长度, H_j 为静拉力的水平分量, 当索跨上处处为常值时称静拉力状态· 左端点静拉力的竖直分量为 V_j · 以上各量示于图2·

单跨的静力解^[1, p. 18] 为:

$$R(s) = \left[\frac{H_j s}{E_j A_j} + \frac{H_j}{W_j} \left[\operatorname{arsinh} \left(\frac{V_j + sW_j}{H_j} \right) - \operatorname{arsinh} \left(\frac{V_j}{H_j} \right) \right] \right] \hat{i} + \left[\frac{(V_j + sW_j)^2 - V_j^2}{2E_j A_j W_j} + \frac{1}{W_j} (\sqrt{H_j^2 + (V_j + sW_j)^2} - \sqrt{H_j^2 + V_j^2}) \right] \hat{k}, \quad (1)$$

这里 \hat{k} 为索结构平面方向向上的单位矢量, \hat{i} 为水平方向上的单位矢量· 利用方程(1), 可以通过下式解得 V_j 为:

$$\tan \Phi = \frac{\frac{W_j L_j}{E_j A_j} \left[\frac{L_j}{2} + \frac{V_j}{W_j} \right] + \frac{1}{W_j} (\sqrt{H_j^2 + (V_j + W_j L_j)^2} - \sqrt{H_j^2 + V_j^2})}{\frac{H_j L_j}{E_j A_j} + \frac{H_j}{W_j} \left[\operatorname{arsinh} \left(\frac{V_j + W_j L_j}{H_j} \right) - \operatorname{arsinh} \left(\frac{V_j}{H_j} \right) \right]}, \quad (2)$$

一旦 V_j 求得, 利用未受拉力时跨左端点测得的 Lagrange 坐标 s , 可以求得静力索的位置·

应该看到, 若设 $\xi = W_j L_j / (E_j A_j)$, 便成为经典悬链线的情况· 不过即使作了这一简化, 振动方程仍难于处理· 因此我们将在稍后引入别的小参数· 静拉力的竖直分量为 $V_j + sW_j$, 对任意点 s 的斜率为 $(sW_j + V_j)/H_j$ · 静力角定义为:

$$\phi(s) = \arctan \frac{sW_j + V_j}{H_j}$$

可以看出, 有效静拉力 $T_j(s) = H_j \sec(\phi(s))$, 且 $T_j'(s) = W_j \sin(\phi(s))$ · 静力角等于倾斜角的点处, $\sigma_j = (H_j \tan \Phi - V_j) / W_j$ · 由于包含了伸长, 曲率不能简单地认为是 $\phi'(s)$ ·

带斜拉索的动力学性质是高度非线性的, 因此我们将关注小振动情况, 从而不明显改变其动力学行为· 我们还假设这些跨的垂度很小, 即 $s = \sigma_j$ 处跨的总重量与静拉力之比很小, 这是一个没有单位的很小的比值, 可以用一个变量 ξ 表示, $\xi = W_j L_j \cos(\Phi) / H_j$ · 则可看出 $L_j \phi_k'(s) = O(\xi)$ 及 $T_j(s) / (W_j L_j) = O(\xi^{-1})$ ·

线性化的振动控制方程为^[1]:

$$m_j \ddot{p} = T' - W_j \phi \cos \phi, \quad (3)$$

$$M_j \ddot{q} = \Upsilon_j \phi' + T \dot{\phi} + W_j \phi \sin \phi, \quad (4)$$

$$p' - q \dot{\phi} = e, \quad (5)$$

$$q' + p \dot{\phi} = \psi, \quad (6)$$

$$T = E_j A_j e, \quad (7)$$

其中 $p(s, t)$ 和 $q(s, t)$ 分别为沿切向静力和法向静力方向的动位移, $e(s, t)$ 为动伸长, $\phi(s, t)$ 为动力角, $T(s, t)$ 为有效动拉力。按惯例, 用点表示对于 t 的导数, 用撇号表示对 s 的导数。

设方程的一般解为如下形式函数的线性组合:

$$p\lambda(s, t) = p\lambda(s)e^{\lambda t}, \quad q\lambda(s, t) = q\lambda(s)e^{\lambda t},$$

其中 λ 为系统的特征频率。由于本文不考虑连接处耗散, 因此 λ 是纯复数。如果固定 λ , 则方程(3)到(6)变为:

$$m_j \lambda^2 p = T' - W_j \phi \cos \phi, \quad (8)$$

$$M_j \lambda^2 q = \Upsilon_j \phi' + T \dot{\phi} + W_j \phi \sin \phi, \quad (9)$$

$$p' - q \dot{\phi} = T/(E_j A_j), \quad (10)$$

$$q' + p \dot{\phi} = \psi, \quad (11)$$

渐近分析表明:

$$\lambda = \sqrt{W_j/(L_j M_j)} = O(\xi^{-1/2}).$$

上面的 4 个方程可简化为仅含 1 个变量的单个 4 阶方程, 因此其解可由 4 个独立的解的加权和组成。通过渐近分析知道, 该 4 个解分成两对。

在所谓“快解”中, $p/L_j = O(\xi \phi)$, $q/L_j = O(\phi)$, $T/(E_j A_j) = O(\xi \phi)$ 。简化方程为

$$M_j \lambda^2 q = \Upsilon_j q'' + W_j \sin(\phi) q', \quad p' = q \dot{\phi}.$$

设

$$Y(s) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\Upsilon_j(s)/M_j}} = \int_0^s \frac{\sqrt{M_j}}{\sqrt{\Upsilon_j^2 + (sW_j + V_j)^2}} ds. \quad (12)$$

得简化方程的解

$$q = \frac{1}{\sqrt[4]{\Upsilon_j/M_j}} e^{\pm \lambda Y(s)}, \quad (13)$$

$$p = \pm \frac{\sqrt[4]{\Upsilon_j/M_j} \phi}{\lambda} e^{\pm \lambda Y(s)}. \quad (14)$$

还有“慢解”, 其中 p/L_j 和 q/L_j 具有相同的数量级, 且 p' 和 q' 是 $\xi p/L_j$ 阶。为求得方程的慢解, 我们引入函数

$$Q(s) = \frac{-m_j \lambda^2}{E_j A_j} - \frac{m_j}{M_j} (\phi(s))^2, \quad (15)$$

则对一阶 ξ , 有

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p'}{Q} \right) + p = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{q'}{\phi} \right) = \frac{m_j}{M_j} p, \quad (17)$$

前一个方程不可解, 除非选用 Q 的线性近似。因此我们先求 $s = \eta$ 时 Taylor 级数的前两项求得

$$\Omega = Q'(\vartheta) = \frac{4m_j W_j^3 \cos^5 \Phi \sin \Phi}{M_j H_j^3}, \quad Q(\vartheta) = -\frac{m_j \lambda^2}{E_j A_j} - \frac{m_j W_j^2 \cos^4 \Phi}{M_j H_j^2},$$

令 $\xi = Q(\vartheta)/\Omega$, 有

$$Q(s) \approx Q(\vartheta) + Q'(\vartheta)(s - \vartheta) = \Omega \xi + \Omega(s - \vartheta) = \Omega(s - \vartheta + \xi), \quad (18)$$

则方程(16)可近似为:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{p'}{\Omega(s - \vartheta + \xi)} \right) + p = 0, \quad (19)$$

现在可用 Airy 函数来求解它。事实上, 容易看出, 用

$$p = A_1'(-\Omega^{1/3} \cdot (s - \vartheta + \xi)) \text{ 和 } p = B_1'(-\Omega^{1/3} \cdot (s - \vartheta + \xi))$$

即可解方程(19)。令 $z = \Omega^{1/3} \cdot (s - \vartheta + \xi)$, 求得方程的慢解为:

$$p = c_1 \Omega^{1/3} A_1'(-z) + c_2 \Omega^{1/3} B_1'(-z), \quad (20)$$

$$q = -c_1 \frac{m_j}{M_j} \phi' Ai(-z) - c_2 \frac{m_j}{M_j} \phi' Bi(-z). \quad (21)$$

由慢解和快解的线性组合, 可得出完全解:

$$p = c_1 \Omega^{1/3} A_1'(-z) + c_2 \Omega^{1/3} B_1'(-z) + c_3 \frac{i \sqrt[4]{\mathbb{T}_j/M_j} \phi' \cosh(\lambda Y(s))}{\lambda} + c_4 \frac{\sqrt[4]{\mathbb{T}_j/M_j} \phi' \sinh(\lambda Y(s))}{\lambda}, \quad (22)$$

$$q = -c_1 \frac{m_j}{M_j} \phi' Ai(-z) - c_2 \frac{m_j}{M_j} \phi' Bi(-z) + c_3 \frac{i}{\sqrt[4]{\mathbb{T}_j/M_j}} \sinh(\lambda Y(s)) + c_4 \frac{1}{\sqrt[4]{\mathbb{T}_j/M_j}} \cosh(\lambda Y(s)), \quad (23)$$

只要 λ 是纯复数, 则所有这些项的系数都是实数。因此, 若我们以后采用耗散连接, 则 $c_1 \sim c_4$ 将为复数。

2 组合跨的矩阵

现在我们利用 p 和 q , 它们与从索的始端 $s = 0$ 到索的终端 $s = L_j$ 的 4 个物理量有关(切向位移、纵向位移、角位移、拉伸因子)。利用(5)式到(7)式可得

$$T = -c_1 m_j \lambda^2 Ai(-z) - m_j \lambda^2 c_2 Bi(-z), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \phi = & c_1 \Omega^{1/3} \phi' A_1'(-z) \frac{M_j + m_j}{m_j} + c_2 \Omega^{1/3} \phi' B_1'(-z) \frac{M_j + m_j}{m_j} + \\ & c_3 \frac{i \cosh(\lambda Y(s)) \sqrt[4]{\mathbb{T}_j(s)/M_j}}{\mathbb{T}_j(s) \lambda} (\mathbb{T}_j(s) (\phi'(s))^2 + \lambda^2 M_j) + \\ & c_4 \frac{\sinh(\lambda Y(s)) \sqrt[4]{\mathbb{T}_j(s)/M_j}}{\mathbb{T}_j(s) \lambda} (\mathbb{T}_j(s) (\phi'(s))^2 + \lambda^2 M_j), \end{aligned} \quad (25)$$

注意方程(24)的简化利用了(18)式和(15)式。

如果取 C 为 $4n$ 维矢量, 其分量由 $p_j(0)$ 、 $q_j(0)$ 、 $T_j(0)$ 和 $\phi_j(0)$, $0 \leq j \leq n-1$ 等 4 个物理量组成, 则整个结构可以用一个方程 $G \cdot C = \mathbf{0}$ 来表示, 这里 G 为 $4n \times 4n$ 阶矩阵。

对于索结构的每个单元, 不管是一个索跨、两根索的接头、质点等, 我们用 4×8 阶较小的矩阵 B_j 来构造 G 。这些矩阵 B_j 可以成阶梯形相互连接构成复合矩阵:

$$G = \begin{pmatrix} B_0 & & & & \\ & B_1 & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & B_{n-1} & \\ & & & & B_n \end{pmatrix} \cdot \quad (26)$$

每个矩阵 B_j 将从结构的始端部分到终端部分, 显示了 4 个物理量间的关系。对于索跨, 我们求得

$$B_j^{\text{able}} = \begin{pmatrix} \Omega^{1/3} \text{Ai}'(-z(0)) & -\frac{m}{M} \phi'(0) \text{Ai}(-z(0)) & -m\lambda^2 \text{Ai}(-z(0)) \\ \Omega^{1/3} \text{Bi}'(-z(0)) & -\frac{m}{M} \phi'(0) \text{Bi}(-z(0)) & -m\lambda^2 \text{Bi}(-z(0)) \\ i \frac{\sqrt[4]{\tau(0)/M}}{\lambda} \phi(0) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{\tau(0)/M}} & 0 \\ \Omega^{1/3} \text{Ai}'(-z(0)) \phi(0) (M+m)/m & \Omega^{1/3} \text{Ai}'(-z(L)) & -\frac{m}{M} \phi(L) \text{Ai}(-z(L)) \\ \Omega^{1/3} \text{Bi}'(-z(0)) \phi'(0) (M+m)/m & \Omega^{1/3} \text{Bi}'(-z(L)) & -\frac{m}{M} \phi(L) \text{Bi}(-z(L)) \\ i \frac{\sqrt[4]{\tau(0)/M}}{\lambda} \left((\phi(0))^2 + \frac{\lambda^2 M}{\tau(0)} \right) & i \frac{\sqrt[4]{\tau(L)/M}}{\lambda} \phi(L) \cosh(\lambda Y) & \frac{i \sinh(\lambda Y)}{\sqrt[4]{\tau(L)/M}} \\ 0 & \frac{\sqrt[4]{\tau(L)/M}}{\lambda} \phi(L) \sinh(\lambda Y) & \frac{\cosh(\lambda Y)}{\sqrt[4]{\tau(L)/M}} \\ -m\lambda^2 \text{Ai}(-z(L)) & \Omega^{1/3} \text{Ai}'(-z(L)) \phi(L) (M+m)/m \\ -m\lambda^2 \text{Bi}(-z(L)) & \Omega^{1/3} \text{Bi}'(-z(L)) \phi(L) (M+m)/m \\ 0 & i \frac{\sqrt[4]{\tau(L)/M}}{\lambda} \left((\phi(L))^2 + \frac{\lambda^2 M}{\tau(L)} \right) \cosh(\lambda Y) \\ 0 & \frac{\sqrt[4]{\tau(L)/M}}{\lambda} \left((\phi(L))^2 + \frac{\lambda^2 M}{\tau(L)} \right) \sinh(\lambda Y) \end{pmatrix},$$

为节省篇幅, 我们省掉了上式中的下角标 j 。再引入变量

$$Y_j = Y(L_j) = \int_0^{L_j} \frac{ds}{\sqrt{\tau(s)/M_j}} = \int_0^{L_j} \frac{\sqrt{M_j}}{\sqrt{H_j^2 + (sW_j + V_j)^2}} ds.$$

系统的特征频率可以通过取 G 的行列式为 0 得到, 并解出 λ 。

对于质点, 求矩阵 B_j 相当容易。假设分离两个索跨的质点为 M_j , 如图 3。向质点索跨的倾角为 $\phi_{j-1}(L_{j-1})$, 而背离质点索跨的倾角为 $\phi_{j+1}(0)$ 。

则控制方程如下:

水平位移 =

$$p_{j-1}(L_{j-1}) \cos(\phi_{j-1}(L_{j-1})) - q_{j-1}(L_{j-1}) \sin(\phi_{j-1}(L_{j-1})) = p_{j+1}(0) \cos(\phi_{j+1}(0)) - q_{j+1}(0) \sin(\phi_{j+1}(0));$$

竖直位移 =

$$p_{j-1}(L_{j-1}) \sin(\phi_{j-1}(L_{j-1})) + q_{j-1}(L_{j-1}) \cos(\phi_{j-1}(L_{j-1})) = p_{j+1}(0) \sin(\phi_{j+1}(0)) + q_{j+1}(0) \cos(\phi_{j+1}(0));$$

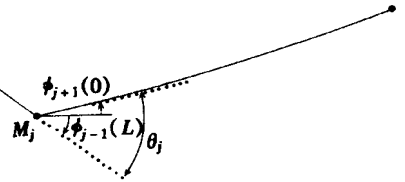


图 3 质点 M_j 计算简图

水平向质量乘加速度 =

$$M_j \lambda^2 p_{j-1}(L_{j-1}) \cos(\phi_{-1}(L_{j-1})) - M_j \lambda^2 q_{j-1}(L_{j-1}) \sin(\phi_{-1}(L_{j-1})) = \\ - T_{j-1}(L_{j-1}) \cos(\phi_{-1}(L_{j-1})) + T_{j+1}(0) \cos(\phi_{+1}(0));$$

竖直向质量乘加速度 =

$$M_j \lambda^2 p_{j-1}(L_{j-1}) \sin(\phi_{-1}(L_{j-1})) + M_j \lambda^2 q_{j-1}(L_{j-1}) \cos(\phi_{-1}(L_{j-1})) = \\ - T_{j-1}(L_{j-1}) \sin(\phi_{-1}(L_{j-1})) + T_{j+1}(0) \sin(\phi_{+1}(0)).$$

从而生成如下矩阵 B_j^{mass} :

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi_{-1}(L)) & -\sin(\phi_{-1}(L)) & 0 & 0 \\ \sin(\phi_{-1}(L)) & \cos(\phi_{-1}(L)) & 0 & 0 \\ M_j \lambda^2 \cos(\phi_{-1}(L)) & -M_j \lambda^2 \sin(\phi_{-1}(L)) & \cos(\phi_{-1}(L)) & 0 \\ M_j \lambda^2 \sin(\phi_{-1}(L)) & M_j \lambda^2 \cos(\phi_{-1}(L)) & \sin(\phi_{-1}(L)) & 0 \\ -\cos(\phi_{+1}(0)) & \sin(\phi_{+1}(0)) & 0 & 0 \\ -\sin(\phi_{+1}(0)) & -\cos(\phi_{+1}(0)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(\phi_{+1}(0)) & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\phi_{+1}(0)) & 0 \end{pmatrix},$$

注意在矩阵 B_j^{mass} 和图 3 中, 为节省篇幅, 省去了 L_{j-1} 的下标。

矩阵 B_0 和 B_n 较小, 由索的物理端点确定。通常, 这些端点为固支, 则 p 和 q 必为 0, 而 T 和 ϕ 待定。因此, 固支端矩阵为:

$$B_0^{\text{clamped}} = B_n^{\text{clamped}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

不过, 应该认识到, 可能还有其它类型的端点, 会生成与上不同的矩阵。

3 行列式计算

显然, 现在应该计算 G 的行列式了。因为矩阵呈式(24)形式(校注: 疑应为(26)), 要用到与文献[8]类似的技巧。将 G 的行列式计算简化为矩阵 P_j 的乘积, 每个 P_j 的行列式由 B_j 确定。考虑到“行列式化过程”嵌入矩阵 P_j 的结构中, 因此无需直接计算每个行列式, 而由 P_j 的乘积来完成。对任意“阶梯形”矩阵, 要用到下面技巧。不幸的是, 我们发现除首个和末个以外, 每一 P_j 都是 6×6 阶矩阵, 因此本文工作较文献[8]困难得多。文献[8]仅需 2×2 阶矩阵。为此我们首先定义

$$B_0 = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ 0 & y_4 & y_5 & y_6 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & z_4 & z_5 & z_6 \end{pmatrix},$$

若设

$$P_0 = \begin{pmatrix} y_1 y_4 & y_1 y_5 & y_1 y_6 & (y_3 y_4 - y_2 y_5) & -y_2 y_6 & y_3 y_6 \end{pmatrix},$$

和

$$P_n = \begin{pmatrix} z_3 z_6 & -z_2 z_6 & (z_2 z_5 - z_3 z_4) & -z_1 z_6 & z_1 z_5 & z_1 z_4 \end{pmatrix}^T,$$

显然, $P_0 \cdot P_n$ 行列式可以通过将 B_0 置于 B_n 的上面构成的 4×4 阶矩阵的行列式生成。

引入如下记号可以推广这一结果: 给定一个 4×8 阶矩阵, 设 $\langle i, j, k, l \rangle$ 表示该 4×4 阶矩阵的行列式, 该矩阵由原矩阵第 i, j, k, l 列生成。则对每一 4×8 阶矩阵 B_j , 我们设

$$P_j = \begin{pmatrix} \langle 3, 4, 5, 6 \rangle & \langle 3, 4, 5, 7 \rangle & \langle 3, 4, 5, 8 \rangle & \langle 3, 4, 7, 6 \rangle & \langle 3, 4, 8, 6 \rangle & \langle 3, 4, 7, 8 \rangle \\ \langle 4, 2, 5, 6 \rangle & \langle 4, 2, 5, 7 \rangle & \langle 4, 2, 5, 8 \rangle & \langle 4, 2, 7, 6 \rangle & \langle 4, 2, 8, 6 \rangle & \langle 4, 2, 7, 8 \rangle \\ \langle 2, 3, 5, 6 \rangle & \langle 2, 3, 5, 7 \rangle & \langle 2, 3, 5, 8 \rangle & \langle 2, 3, 7, 6 \rangle & \langle 2, 3, 8, 6 \rangle & \langle 2, 3, 7, 8 \rangle \\ \langle 4, 1, 5, 6 \rangle & \langle 4, 1, 5, 7 \rangle & \langle 4, 1, 5, 8 \rangle & \langle 4, 1, 7, 6 \rangle & \langle 4, 1, 8, 6 \rangle & \langle 4, 1, 7, 8 \rangle \\ \langle 1, 3, 5, 6 \rangle & \langle 1, 3, 5, 7 \rangle & \langle 1, 3, 5, 8 \rangle & \langle 1, 3, 7, 6 \rangle & \langle 1, 3, 8, 6 \rangle & \langle 1, 3, 7, 8 \rangle \\ \langle 1, 2, 5, 6 \rangle & \langle 1, 2, 5, 7 \rangle & \langle 1, 2, 5, 8 \rangle & \langle 1, 2, 7, 6 \rangle & \langle 1, 2, 8, 6 \rangle & \langle 1, 2, 7, 8 \rangle \end{pmatrix}, \quad (27)$$

由此归纳, G 的行列式由 $P_0 \cdot P_1 \cdot \dots \cdot P_n$ 给出. 在文献[7]中, 给出了这一表述的其它证明方法. 我们可以把每一变换看作线性函数 $F^*: V_4 \rightarrow V_4$. 它诱导出在所有张量集上的一个线性映射: $F^*: \mathcal{F}(V_4) \rightarrow \mathcal{F}(V_4)$. 特别地, F^* 映射把所有二阶交错协变张量映射到自身, 即 $F^*: \Lambda^2(V_4) \rightarrow \Lambda^2(V_4)$. 该导出映射是反同态的, 也就是说, 若 $H^* = F^* \circ G^*$, 则 $H^* = G^* \circ F^*$. 组合上述变换, 我们可以找到适当的同态映射. 在文献[7]中, 利用这一技巧于 6 维变换, 生成了 20×20 阶矩阵, 但因我们仅考虑面内振动, 仅需处理 6×6 阶矩阵. 因为在证明中用到交错协变张量, 通常称为外形式, 因此矩阵 P_j 称为外矩阵.

很容易计算, $P_0^{\text{clamped}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)$, $P_n^{\text{clamped}} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. 质点的外矩阵也可相当容易地计算, 由于行列式仅与质量 M_j 和倾角差 $\theta_j = \phi_{j+1}(0) - \phi_{j-1}(L_{j-1})$ 有关, 我们求得其外矩阵:

$$P_j^{\text{mass}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -M_j \lambda^2 & -\sin(\theta_j) \cos(\theta_j) & 0 & \sin^2(\theta_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin^2(\theta_j) & 0 & -\sin(\theta_j) \cos(\theta_j) & 0 & 0 \\ M_j \lambda^2 & 0 & 0 & -M_j \lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

当然, 索跨的外矩阵要复杂得多. 例如, 外矩阵 P_j^{cable} 左边下角项为:

$$\begin{aligned} \langle 1, 2, 5, 6 \rangle = & \frac{im_j}{M_j} \Omega_j^{1/3} \phi'(0) \phi'(L) [Ai(-z(0))Bi'(-z(0)) - Bi(-z(0))Ai'(-z(0))] + \\ & \frac{i \sinh(\lambda y_j) \Omega_j^{2/3}}{4 \sqrt{\tau(0)/M_j} \sqrt{4 \sqrt{\tau(L)/M_j}}} [Ai'(-z(0))Bi'(-z(L)) - Bi'(-z(0))Ai'(-z(L))] - \\ & \frac{im_j}{M_j} \Omega_j^{1/3} \frac{\sqrt{4 \sqrt{\tau(L)}}}{\sqrt{4 \sqrt{\tau(0)}}} (\phi'(L))^2 \cosh(\lambda y_j) [Ai(-z(L))Bi'(-z(0)) - \\ & Bi(-z(L))Ai'(-z(0))] - \frac{im_j}{M_j} \Omega_j^{1/3} \frac{\sqrt{4 \sqrt{\tau(0)}}}{\sqrt{4 \sqrt{\tau(L)}}} (\phi'(0))^2 \cosh(\lambda y_j) \times \\ & [Ai(-z(0))Bi'(-z(L)) - Bi(-z(0))Ai'(-z(L))] - \\ & \frac{im_j^2}{\lambda^2 M_j^{2/5}} (\phi'(0) \phi'(L))^2 \sqrt{4 \sqrt{\tau(0) \tau(L)}} \sinh(\lambda y_j) [Ai(-z(0))Bi(-z(L)) - \\ & Bi(-z(0))Ai(-z(L))] + \frac{im_j}{M_j} \Omega_j^{1/3} \phi'(0) \phi'(L) \times \\ & [Ai(-z(L))Bi'(-z(L)) - Bi(-z(L))Ai'(-z(L))], \end{aligned} \quad (29)$$

对于两端固定的单跨单元特别重要, 因为乘积 $P_0^{\text{clamped}} \cdot P_1^{\text{cable}} \cdot P_2^{\text{clamped}}$ 是仅有的非零项. P_j^{cable} 单元也是文献[6]和文献[9]的结果.

幸运的是, 我们可以利用 Airy 函数性质的优点, 例如 Wronsk 行列式性质

$$Ai(x) Bi'(x) - Bi(x) Ai'(x) = \frac{1}{\pi}. \quad (30)$$

然而, 我们还有 $z(L) - z(0) = L_j \Omega^{V/3}$, 其阶为 ϵ . 事实上, 我们定义

$$R_j = \sqrt[3]{\frac{4m_j \cos^2 \Phi \sin \Phi}{M_j}}, \quad (31)$$

则 $L_j \Omega^{V/3} = R_j \epsilon$, 有

$$Ai(-z(0)) Bi'(-z(L_j)) - Bi(-z(0)) Ai'(-z(L_j)) = \frac{1}{\pi} + \left[\frac{L_j^2 m_j}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2}{E_j A_j} + \frac{\phi(L_j/2)^2}{M_j} \right) \right] + O(\epsilon^3),$$

$$Ai(-z(L_j)) Bi'(-z(0)) - Bi(-z(L_j)) Ai'(-z(0)) = \frac{1}{\pi} + \left[\frac{L_j^2 m_j}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2}{E_j A_j} + \frac{\phi(L_j/2)^2}{M_j} \right) \right] + O(\epsilon^3),$$

$$Ai(-z(0)) Bi(-z(L_j)) - Bi(-z(0)) Ai(-z(L_j)) = -\frac{R_j \epsilon}{\pi} - \left[\frac{\epsilon R_j L_j^2 m_j}{6\pi} \left(\frac{\lambda^2}{E_j A_j} + \frac{\phi(L_j/2)^2}{M_j} \right) \right] + O(\epsilon^2),$$

$$\Omega^{V/3} [Ai'(-z(0)) Bi'(-z(L_j)) - Bi'(-z(0)) Ai'(-z(L_j))] = \frac{L_j m_j}{\pi} \left(\frac{\lambda^2}{E_j A_j} + \frac{\phi(L_j/2)^2}{M_j} \right) + \left[\frac{L_j^3 m_j^2}{6\pi} \left(\frac{\lambda^2}{E_j A_j} + \frac{\phi(L_j/2)^2}{M_j} \right)^2 \right] + O(\epsilon^2).$$

注意, 在上述几个实例中, 原变量项中的 (15) 式用 $\Omega^{2/3} z(L_j/2) \approx Q(L_j/2)$ 代之.

4 外矩阵的渐近分析

重要的问题是如何确定必须保留项 ϵ 的阶数. 通常我们仅需要保留一阶项, 但由文献[6]和文献[9]知道, 一阶项对于描述复杂的行为是不够的, 特别当一阶项小时更是如此. 事实上, 一阶项仅表示固有频率在不同点的“跃变(crossed over)”, 当保留二阶项后, 自然频率并不产生跃变, 尽管在这些区域中频率非常靠近. 这是由于在“混合模式(hybrid mode)”区域, 因 Airy 函数幅角由负变正, 从而引起波本性由正弦型变为指数型的改变. 不幸的是, 在这些区域, 矩阵中的高阶项每项都要保留. 因此, 对需要保留的高阶项, 首先必须发展某个理论.

给定两个 ϵ 中标准摄动级数

$$f(\lambda, \epsilon) = f_0(\lambda) + f_1(\lambda)\epsilon + f_2(\lambda)\epsilon^2 + \dots$$

和 $g(\lambda, \epsilon) = g_0(\lambda) + g_1(\lambda)\epsilon + g_2(\lambda)\epsilon^2 + \dots$,

若对所有 λ 有 $f_0(\lambda) = g_0(\lambda)$; 而当 $f_0(\lambda) = 0$ 时, 有 $f_1(\lambda) = g_1(\lambda)$; 当 $f_0(\lambda) \neq 0$ 且 $f_1(\lambda) = 0$ 时, 有 $f_2(\lambda) = g_2(\lambda)$, ... 我们就说 $f(\lambda, \epsilon) \sim g(\lambda, \epsilon)$. 一般说来, 若

$$f_k(\lambda) = g_k(\lambda) \text{ 其中 } f_j^{(i)}(\lambda) = 0 \text{ 当 } 0 \leq i + j < k, \quad (32)$$

则 $f(\lambda, \epsilon) \sim g(\lambda, \epsilon)$. 在标准摄动级数集上, 符号“ \sim ”表示它们关系等价. 事实上, 对任何其它形式的标准摄动级数 $h(\lambda, \epsilon)$, 若 $f(\lambda, \epsilon) \sim g(\lambda, \epsilon)$ 表示 $f(\lambda, \epsilon)h(\lambda, \epsilon) \sim g(\lambda, \epsilon)h(\lambda, \epsilon)$ 也成立.

引入这些等价关系的目的是, 对精确到 ϵ 阶的 λ 求解 $f(\lambda, \epsilon) = 0$, 这时需要知道 $f(\lambda, \epsilon)$ 的等价类函数. 知道 $f(\lambda, \epsilon)$ 的等价类, 是计算对应于每个特征值 λ 的特征函数的充分条件. 因此, 在矩阵中可以用属同一等价类中的最简单的函数代替原来的函数. 这一点通常是成立的, 但并不常能省略, 如果 $f(\lambda, \epsilon) \sim g(\lambda, \epsilon)$, 则 $f(\lambda, \epsilon) + h(\lambda, \epsilon) \sim g(\lambda, \epsilon) + h(\lambda, \epsilon)$. 幸运的是, 省略主要发生在构成外矩阵 P_j 时, 因此当我们作矩阵乘法时, 不会出现任何更主要的省

略。

对每项计算 ξ 阶时, 我们必须考虑到 λ 的阶数可能达到 $\xi^{1/2}$ 。我们定义

$$Z_j = \sqrt{\frac{L_j M_j \xi}{W_j}},$$

则 λZ_j 是无单位的, 并且是 1 阶。

我们还需要用如下的近似来简化静力分量表达式。利用(2)式得

$$V_j \sim H_j \left[\tan \Phi - \frac{1}{2} \sec \Phi \xi + \frac{\tan \Phi}{\xi + \delta} \xi^3 \right] + O(H_j \xi^4),$$

这里 $\delta = L_j W_j / (E_j A_j)$, 也是一个少量(通常小于 ξ)。从而得出

$$\phi(s) = \frac{\xi \cos \Phi}{L_j} \left[1 + \frac{L_j - 2s}{L_j} (\sin \Phi) \xi + \frac{(L_j - 2s)^2}{4L_j^2} (4\sin^2 \Phi - 1) \xi^2 - \frac{\sin^2 \Phi \xi^3}{6(\xi + \delta)} + O(\xi^3) \right],$$

$$\tau_j(s) = \frac{W L_j}{\xi} \left[1 - \frac{L_j - 2s}{2L_j} (\sin \Phi) \xi + \frac{(L_j - 2s)^2}{8L_j^2} (\cos^2 \Phi) \xi^2 + \frac{\sin^2 \Phi}{12(\xi + \delta)} \xi^3 + O(\xi^3) \right].$$

由此得

$$\phi(0) = \frac{\xi \cos \Phi}{L_j} \left[1 + \xi \sin \Phi + \xi^2 \left[\sin^2 \Phi - \frac{1}{4} \right] - \frac{\sin^2 \Phi}{6(\xi + \delta)} \xi^3 \right] + O(\xi^4), \quad (33)$$

$$\phi(L_j) = \frac{\xi \cos \Phi}{L_j} \left[1 - \xi \sin \Phi + \xi^2 \left[\sin^2 \Phi - \frac{1}{4} \right] - \frac{\sin^2 \Phi}{6(\xi + \delta)} \xi^3 \right] + O(\xi^4), \quad (34)$$

$$\phi\left(\frac{L_j}{2}\right) = \frac{\xi \cos \Phi}{L_j} \left[1 - \frac{\sin^2 \Phi}{6(\xi + \delta)} \xi^3 \right] + O(\xi^4), \quad (35)$$

$$\sqrt[4]{\tau_j(0)} = \sqrt[4]{\tau_j(\sigma)} \left[1 - \frac{\xi \sin \Phi}{8} + \frac{\xi^2}{32} \left[1 - \frac{7\sin^2 \Phi}{4} \right] + \frac{\sin^2 \Phi}{48(\xi + \delta)} \xi^3 \right] + O(\xi^3), \quad (36)$$

$$\sqrt[4]{\tau_j(L_j)} = \sqrt[4]{\tau_j(\sigma)} \left[1 + \frac{\xi \sin \Phi}{8} + \frac{\xi^2}{32} \left[1 - \frac{7\sin^2 \Phi}{4} \right] + \frac{\sin^2 \Phi}{48(\xi + \delta)} \xi^3 \right] + O(\xi^3), \quad (37)$$

$$Y_j = \sqrt{\frac{L_j M_j \xi}{W_j}} \left[1 + \frac{1}{96} \left(-2 + 5\sin^2 \Phi - 4\sin^2 \Phi \frac{\xi}{\xi + \delta} \right) \xi^2 + O(\xi^3) \right], \quad (38)$$

$$\frac{\phi(0) \sqrt[4]{\tau_j(0)}}{\phi(L_j) \sqrt[4]{\tau_j(L_j)}} = 1 + \frac{7}{4} \sin \Phi \xi + \frac{49}{32} \sin^2 \Phi \xi^2 + O(\xi^3), \quad (39)$$

$$\frac{\phi(L_j) \sqrt[4]{\tau_j(L_j)}}{\phi(0) \sqrt[4]{\tau_j(0)}} = 1 - \frac{7}{4} \sin \Phi \xi + \frac{49}{32} \sin^2 \Phi \xi^2 + O(\xi^3), \quad (40)$$

$$\left[\frac{\lambda^2}{E_j A_j} + \frac{\phi(L_j/2)^2}{M_j} \right] = \frac{\cos^2 \Phi \xi^2}{M_j L_j^2} \left[1 + \frac{M_j L_j \xi}{W_j r_j} \lambda^2 - \sin^2 \Phi \frac{\xi^3}{\xi + \delta} + O(\xi^4) \right], \quad (41)$$

在(41)式中, $r_j = E_j A_j \cos^2 \Phi \xi^2 / \tau_j(\sigma)$, 它表示弹性常数与悬链线刚度之比。注意, 在 $\delta \neq 0$ 时, 这些表达式与文献[6]和文献[9]中给出的表达式不尽一致。

我们仍就数据(1, 2, 5, 6)的例子, 如果我们先用 $\phi(0) \phi(L_j)$ 除, 则矩阵将更加对称。解得 ξ 的二阶结果为:

$$\frac{\langle 1, 2, 5, 6 \rangle}{(\phi(0) \phi(L_j))} = \frac{4i R_j \xi m_j}{\lambda_j M_j \pi} \left[\frac{1}{2} - \cosh(\lambda Z_j) \left[\frac{1}{2} + \frac{49}{64} \sin^2 \Phi \xi^2 \right] + \right.$$

$$\frac{\sinh(\lambda_j)}{4} \mathcal{N}_j \left[1 + (\lambda_j)^2 \frac{1}{r_j} - \sin^2 \Phi \frac{\xi^3}{\xi + \delta} - \frac{m_j \cos^2 \Phi \xi^2}{M_j (\lambda_j)^2} \right] + O(\xi^3), \quad (42)$$

我们必须确定属于这类摄动级数的等价突函数, 即我们必须在同一等价类函数中找到更简单的函数, 称之为精简摄动级数。

检查式(42)括号内的零阶项, 求得

$$f_0(\lambda) = \frac{1}{2}(1 - \cosh(\lambda_j)) + \frac{\sinh(\lambda_j)}{4} \mathcal{N}_j \left[1 + (\lambda_j)^2 \frac{1}{r_j} \right],$$

若 $\cosh(\lambda_j) = 1$, 或若 $\tanh(\lambda_j/2) = (1 + \lambda^2 Z_j^2/r_j)/2$, 我们求得 $f_0(\lambda) = 0$ 。因此在这两种情况下, 我们必须保留 ξ 的一阶项。特别地, 当该项 $f_1(\lambda) = 0$ 时, 我们可以转到 ξ 的下一阶计算。为了使 $f_0(\lambda)$ 和 $f_1(\lambda)$ 两者皆为 0, 我们取 $\lambda = \pm r_j i / Z_j$, 求得 $\cosh(\lambda_j) = 1$ 和 $\tanh(\lambda_j/2) = (1 + \lambda^2 Z_j^2/r_j)/2$ 。这正是在文献[6]和文献[9]中所谓的混合模型区域。因 $\cosh(\lambda_j) = 1$, 则 $\sinh(\lambda_j) = 0$, 因此 $f_2(\lambda)$ 可以被

$$g_2(\lambda) = \frac{49}{64} \sin^2 \Phi$$

取代。

$f_0(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ 不可能均为 0 时, 又按照(32)式, 则 ξ 的所有高阶项的集合为 0。因此

$$\frac{\langle 1, 2, 5, 6 \rangle}{(\phi(0)\phi(L_j))} \sim \frac{4i R_j \xi m_j}{\mathcal{N}_j M_j \pi} \left[\frac{1}{2}(1 - \cosh(\lambda_j)) + \frac{\sinh(\lambda_j)}{4} \mathcal{N}_j \left[1 + (\lambda_j)^2 \frac{1}{r_j} \right] + \frac{49}{64} \sin^2 \Phi \xi^2 \right]. \quad (43)$$

应该注意到式(43)括号内的部分可以改写为:

$$\sin(\Theta) \left[\Theta \cos(\Theta) \left[\frac{4\Theta^2}{r_j} - 1 \right] + \sin(\Theta) \right] - \frac{49}{64} \xi^2 \sin^2 \Phi \cos(2\Theta),$$

其中 $\Theta = \lambda_j / (2i)$ 。这与文献[6]和文献[9]中得到的结果是一致的。

没有比确定矩阵 P_j^{cable} 数据更困难了, 我们令

$$P_j^{\text{cable}} = \frac{\lambda \pi L_j M_j}{i \phi(0)\phi(L_j) R_j M_j} (P_j^{\text{cable}} \text{ 的精简矩阵}),$$

则

$$P_{j,(1,1)}^{\text{cable}} = P_{j,(6,6)}^{\text{cable}} = L_j M_j^2 \lambda^4 \sec^2(\Phi) \cosh(\lambda_j) / W_j,$$

$$P_{j,(1,2)}^{\text{cable}} = P_{j,(3,6)}^{\text{cable}} = -L_j m_j M_j Z_j \lambda^5 \sec(\Phi) \sinh(\lambda_j),$$

$$P_{j,(1,3)}^{\text{cable}} = P_{j,(4,6)}^{\text{cable}} = -M_j^2 Z_j \lambda^5 \sec^2(\Phi) \sinh(\lambda_j) / W_j,$$

$$P_{j,(1,4)}^{\text{cable}} = P_{j,(3,6)}^{\text{cable}} = L_j^2 m_j M_j^2 \lambda^6 \sec^2(\Phi) \cosh(\lambda_j) / W_j,$$

$$P_{j,(1,5)}^{\text{cable}} = \frac{M_j \xi \lambda^4 \sec(\Phi)}{m_j W_j} \left[M_j (M_j + m_j) \left[\cosh(\lambda_j) - 1 - \frac{5}{4} \sin(\Phi) \xi \right] - \mathcal{N}_j m_j^2 \sinh(\lambda_j) \left[1 - \frac{1}{4} \sin(\Phi) \xi \right] \right],$$

$$P_{j,(2,6)}^{\text{cable}} = \frac{M_j \xi \lambda^4 \sec(\Phi)}{m_j W_j} \left[M_j (M_j + m_j) \left[\cosh(\lambda_j) - 1 + \frac{5}{4} \sin(\Phi) \xi \right] - \mathcal{N}_j m_j^2 \sinh(\lambda_j) \left[1 + \frac{1}{4} \sin(\Phi) \xi \right] \right],$$

$$P_{j,(1,6)}^{\text{cable}} = L_j M_j^2 m_j Z_j \lambda^7 \sec^2(\Phi) \sinh(\lambda_j) / W_j,$$

$$\begin{aligned}
P_{j,(2,1)}^{\text{cable}} &= \frac{M_j \lambda^2 \xi \sec(\Phi)}{W_j} \left\{ 1 - \cosh(\lambda Y_j) - \frac{7}{4} \sin(\Phi) \xi \right\}, \\
P_{j,(6,5)}^{\text{cable}} &= \frac{M_j \lambda^2 \xi \sec(\Phi)}{W_j} \left\{ 1 - \cosh(\lambda Y_j) + \frac{7}{4} \sin(\Phi) \xi \right\}, \\
P_{j,(2,2)}^{\text{cable}} &= P_{j,(5,5)}^{\text{cable}} = M_j^2 L_j \lambda^4 \sec^2(\Phi) / W_j, \\
P_{j,(2,3)}^{\text{cable}} &= P_{j,(4,5)}^{\text{cable}} = -\lambda^3 Z_j^3 \sec(\Phi) \sinh(\lambda Y_j) / L_j^2, \\
P_{j,(2,4)}^{\text{cable}} &= \frac{\lambda^3 Z_j M_j (M_j + m_j)}{m_j} \sec(\Phi) \sinh(\lambda Y_j) - \lambda^4 Z_j^2 m_j \sec(\Phi) \cosh(\lambda Y_j) - \\
&\quad \frac{m_j \lambda^4 Z_j^2}{4} \tan(\Phi) \cosh(\lambda Y_j) \xi, \\
P_{j,(3,5)}^{\text{cable}} &= \frac{\lambda^3 Z_j M_j (M_j + m_j)}{m_j} \sec(\Phi) \sinh(\lambda Y_j) - \lambda^4 Z_j^2 m_j \sec(\Phi) \cosh(\lambda Y_j) + \\
&\quad \frac{m_j \lambda^4 Z_j^2}{4} \tan(\Phi) \cosh(\lambda Y_j) \xi, \\
P_{j,(2,5)}^{\text{cable}} &= \frac{\xi^2 \lambda^2}{m_j W_j L_j} \left(2M_j (M_j + m_j) \left(1 - \cosh(\lambda Y_j) \right) + \lambda Y_j m_j^2 \sinh(\lambda Y_j) \right), \\
P_{j,(3,1)}^{\text{cable}} &= P_{j,(6,4)}^{\text{cable}} = M_j L_j \lambda^3 Z_j \sec^2(\Phi) \sinh(\lambda Y_j) / \xi, \\
P_{j,(3,2)}^{\text{cable}} &= P_{j,(5,4)}^{\text{cable}} = -M_j m_j L_j^2 \lambda^4 \sec(\Phi) \cosh(\lambda Y_j), \\
P_{j,(3,3)}^{\text{cable}} &= P_{j,(4,4)}^{\text{cable}} = M_j^2 L_j \lambda^4 \sec^2(\Phi) \cosh(\lambda Y_j) / W_j, \\
P_{j,(3,4)}^{\text{cable}} &= M_j m_j L_j^2 \lambda^5 Z_j \sec^2(\Phi) \sinh(\lambda Y_j) / \xi, \\
P_{j,(4,1)}^{\text{cable}} &= \xi \left(\lambda^2 Z_j^2 + \lambda^4 Z_j^4 / r_j \right) \cosh(\lambda Y_j) / L_j - \xi \lambda Z_j \sinh(\lambda Y_j) \left\{ 1 - \frac{7}{4} \xi \sin(\Phi) \right\} \Big|_{L_j}, \\
P_{j,(6,3)}^{\text{cable}} &= \xi \left(\lambda^2 Z_j^2 + \lambda^4 Z_j^4 / r_j \right) \cosh(\lambda Y_j) / L_j - \xi \lambda Z_j \sinh(\lambda Y_j) \left\{ 1 + \frac{7}{4} \xi \sin(\Phi) \right\} \Big|_{L_j}, \\
P_{j,(4,2)}^{\text{cable}} &= P_{j,(5,3)}^{\text{cable}} = -M_j \lambda^3 Z_j \sec(\Phi) \sinh(\lambda Y_j), \\
P_{j,(4,3)}^{\text{cable}} &= M \lambda^3 Z \xi^2 (1 + \lambda^2 Z_j^2 / r_j) / (W_j L_j), \\
P_{j,(5,1)}^{\text{cable}} &= M_j L_j \lambda^2 \sec(\Phi) \left\{ 1 - \cosh(\lambda Y_j) - \frac{7}{4} \sin(\Phi) \xi \right\}, \\
P_{j,(6,2)}^{\text{cable}} &= M_j L_j \lambda^2 \sec(\Phi) \left\{ 1 - \cosh(\lambda Y_j) + \frac{7}{4} \sin(\Phi) \xi \right\}, \\
P_{j,(5,2)}^{\text{cable}} &= m_j L_j W_j \lambda^3 Z_j \sinh(\lambda Y_j), \\
P_{j,(6,1)}^{\text{cable}} &= 2\xi - 2\xi \cosh(\lambda Y_j) + \xi \lambda Z_j \sinh(\lambda Y_j) \left[1 + \frac{\lambda^2 Z_j^2}{r_j} - \frac{49}{16} \sin^2(\Phi) \xi^3 \right].
\end{aligned}$$

注意到这一矩阵的数据构成了一个独特的样式。在该矩阵中,用 $-\Phi$ 替换 Φ 并没有给出标准的交换,而宁可说该一矩阵是由右上角到左下角的“另一条”对角线安装而成的。文献[7]和文献[8]中,在求解 Euler-Bernoulli 耦合梁问题时,生成了类似样式的外矩阵。外矩阵有一个鲜明的性质, λ 的方程在索结构的镜像中不发生变化,因此,即使按逆序乘积时的外矩阵样式仍然不变。

5 结 论

该结果可以通过其他方法推广。通过求解索长 ξ 的下一阶项来增强外矩阵的作用。这种办法对决定一个耗散耦合是否导致振动衰减十分有效(经验表明由于实部相比于虚部要小,因此特征频率 λ 必须计算到 ϵ 的下一阶)。还可以考虑不在结构平面上的振动。这样本文可作

为将来进一步研究索结构的基础·

[参 考 文 献]

- [1] Irvine H M. Cable Structures [M]. Cambridge: M I T Press, 1981.
- [2] Simpson A. Determination of the inplane natural frequencies of multispan transmission lines by a transfer_matrix method[J]. Proc IEEE , 1966, **113**(5): 870—878.
- [3] Triantafyllou M S. The dynamics of taut inclined cable[J]. Quart J Mech Appl Math, 1984, **37**(3): 421—440.
- [4] Abramowitz M, Stegun I. Handbook of Mathematical Functions [M]. New York: Dover, 1981.
- [5] Bender C M, Orszag S A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers [M]. New York: Springer_Verlag, 1999.
- [6] Grinfogel L. Dynamics of elastic taut inclined cables[Z]. thesis presented to the Massachusetts Institute of Technoloy, at Cambridge M A, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science, 1984.
- [7] Paulsen W H. Eigenfrequencies of the non_collinearly coupled Euler_Bernoulli beam system with dissipative joints[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1997, **55**(3): 437—457.
- [8] Krantz S G, Paulsen W H. Asymptotic eigenfrequency distributions for the N_beam Euler_Bernoulli coupled beam equation with dissipative joints[J]. J Symbolic Computaion , 1991, **11**: 369—418.
- [9] Triantafyllou M S, Grinfogel L. Natural frequencies and modes of inclined cables[J]. J Struct Engrg , 1986, **112**(1): 139—148.
- [10] Boothby W. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry [M]. Orlando, Florida: Academic Press Inc, 1986.
- [11] Irvine H M, Caughey T K. The linear theory of free vibrations of a suspended cable[J]. Proc R Soc Lond , 1974, **341**: 299—315.

Eigenfrequency Analysis of Cable Structures With Inclined Cables

William Paulsen, Greg Slayton

(Department of Computer Science and Mathematics ,
Arkansas State University , Arkansas 72467, USA)

Abstract: The approximate eigenfrequencies for the in_plane vibrations of a cable structure consisting of inclined cables, together with point masses at various points were computed. It was discovered that the classical transfer matrix method was inadequate for this task, and hence the larger exterior matrices to determine the eigenfrequency equation were used. Then predictions of the dynamics of the general cable structure based on the asymptotic estimates of the exterior matrices were made.

Key words: eigenfrequency; transfer matrix; exterior matrix; cable structure