

文章编号: 1000-0887(2006) 01-0053-07

垂直与水平渗透作用下潜水非稳定 渗流运动规律*

陶月赞¹, 席道瑛²

(1. 合肥工业大学 土木建筑学院, 合肥 230009;
2. 中国科学技术大学 地空学院, 合肥 230026)

(李家春推荐)

摘要: 对河渠边界控制的半无限含水层, 建立垂向入渗与河渠水平渗透共同作用下的潜水非稳定渗流模型; 利用 Boussinesq 第一线性化方法, 通过 Laplace 变换, 给出模型的解析解. 证明相关经典公式与模型特定解之间的转换关系, 分析经典公式适用范围. 根据模型解, 逐一定量研究下述变量, 如垂向入渗强度、河渠水位变动幅度、含水层结构参数如给水度和导压系数、计算点与边界之间的距离, 对渗流过程的影响. 这些变量的变化, 对潜水位获最大上升速度的时间产生延迟效应; 论证一些变量间产生等效延迟效应的条件. 根据解的数学特征, 讨论其对应的物理意义和潜水位变动规律.

关键词: 河渠边界; 半无限含水层; 垂直入渗; 水平渗透; 潜水非稳定流

中图分类号: O357.3 **文献标识码:** A

引 言

河渠边界控制的半无限含水层中潜水非稳定渗流问题, 是地下水渗流力学中的经典问题之一, 它对地下水资源评价^[1~4]、人工灌溉系统设计^[5,6]、水工建筑物附近及沿海地区的潜水渗流模拟^{[4],[7,8]}、土壤盐碱化改良设计^[1]等, 都具有重要的基础意义. 现有文献在研究水平渗透时, 往往忽略垂向入渗^{[1~4],[6~10]}、或是对其进行简单的削减^[5]; 而研究垂向入渗时, 多又忽略河渠边界的影响. 本文建立河渠渗透和垂向入渗共同作用的非稳定渗流模型, 以研究潜水位变动规律.

1 渗流模型

一顺直河渠附近的水文地质条件概画如图 1, 叙述如下:

- ① 含水层均质各向同性, 半无限延伸且隔水底板水平.
- ② 河水位迅速升至某高度并长时间不变, 升幅为 ΔH .
- ③ 垂向入渗强度 ε 处处相等.

* 收稿日期: 2004_08_17; 修订日期: 2005_09_12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40174050, 4047065)

作者简介: 陶月赞(1964—), 男, 安徽巢湖人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_551_3640158; Fax: + 86_551_2903658; E_mail: taoyuezan@sohu.com).

④ 潜水位 $h(x, 0)$ 初始水平。

⑤ 潜水水流可视为一维流。

上述水文地质概念模型, 仅是在经典的 J. G. Ferris 公式^[2]所对应的模型中, 增加了条件 ③, 上述问题可描述成数学模型(I)。

$$(I) \begin{cases} \mu \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + \varepsilon & (0 < x < +\infty, t > 0), \\ h(x, t) |_{t=0} = h(x, 0) & (x > 0), \\ h(x, t) |_{x=0} = \Delta H & (t \geq 0), \\ h(x, t) |_{x \rightarrow \infty} = h(x, 0) + \frac{\varepsilon}{\mu} t & (t \geq 0), \end{cases}$$

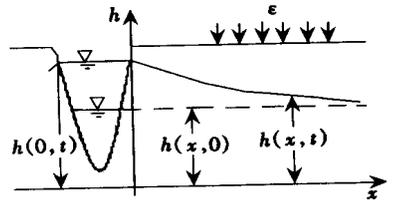


图 1 河渠附近潜水渗流场

式中: μ 是给水度、 k (m/d) 是渗透系数、 h (m) 是地下水水位、 ΔH (m) 是河水迅速变化幅度、 ε (m/d) 是入渗强度(补给含水层为正, 如降水入渗等; 排泄含水层为负, 如潜水蒸发等)、 x (m) 是计算点距边界的距离。

2 模型的解析解

对模型(I), 当 $h(x, t) - h(x, 0) \leq 0.1h_m$ (h_m 为潜水流体的平均厚度, 这在实际中大都能满足) 时, 可利用 Boussinesq 方程第一线性化方法, 令 $u(x, t) = h(x, t) - h(x, 0)$; 再对(I) 求关于 t 的拉氏变换, 得模型(II)。

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} - \frac{s}{a} \bar{u} + \frac{\varepsilon}{\mu a} \frac{1}{s} = 0, \\ \bar{u} |_{x=0} = \frac{1}{s} \cdot \Delta H, \quad \bar{u} |_{x \rightarrow \infty} = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{1}{s}, \end{cases}$$

(II) 中: \bar{u} 为 u 关于 t 的拉氏变换的象函数, s 为拉氏算符, $a = kh_m/\mu$ 为导压系数。

对微分方程组(II) 的特定解进行拉氏逆变换, 并注意 μ 与 h 的转换关系, 有:

$$h(x, t) = h(x, 0) + \Delta H \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{\varepsilon}{\mu} \int_0^t \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) dt, \quad (1)$$

(1) 式就是在河渠边界控制下的半无限含水层中, 在垂向入渗与瞬时上升的河渠水位所形成的水平渗透共同作用下, 潜水非稳定流过程的解析解。式中 $\operatorname{erf}(z)$ 和 $\operatorname{erfc}(z)$ 分别是误差函数和余误差函数。

3 模型与解的数理特征

3.1 特定解与物理概念

3.1.1 当 $\varepsilon = 0$

当 $\varepsilon = 0$, 模型(I) 的其它初边条件不变。此时对应的物理概念模型是: 在无垂向入渗作用或其可忽略期间, 河渠水位瞬时上升对一侧的半无限含水层中形成水平渗透补给时, 潜水非稳定运动过程。此时, (1) 式转化为(2) 式:

$$h(x, t) = h(x, 0) + \Delta H \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right), \quad (2)$$

(2) 式是 J. G. Ferris 公式, 它是模型(I) 的一个特例, 适用于垂向入渗可忽略的条件下。

3.1.2 当 $x \rightarrow \infty$

当 $x \rightarrow \infty$, 模型(I) 的其它初边条件不变。此时对应的物理概念模型是: 在离河渠边界的距离足够远处, 河渠水平渗透作用和边界控制作用的影响都趋于零, 此时, 潜水位变动仅受垂向入渗作用的影响。

由于 $\operatorname{erfc}(z) |_{z \rightarrow \infty} = 0$, $\operatorname{erf}(z) |_{z \rightarrow \infty} = 1$, 此时, (1) 式转化为(3) 式:

$$h(x, t) = h(x, 0) + \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot t, \quad (3)$$

(3) 式是写在各有关教科书中, 关于垂向入渗形成潜水位变动的经典计算公式。但它仅是在无河渠边界控制(或边界作用可忽略)的条件下, 才可适用。

3.1.3 当 $\Delta H = 0$

当 $\Delta H = 0$, 模型(I) 的其它初边条件不变。此时对应的物理概念模型是: 在一侧为定水头透水边界的半无限潜水含水层中, 在垂向入渗作用下, 潜水非稳定运动过程。此时, (1) 式转化为(4) 式:

$$h(x, t) = h(x, 0) + \frac{\varepsilon}{\mu} \int_0^t \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}\right] dt, \quad (4)$$

(4) 式的物理意义在于: 在河渠边界控制下, 潜水接受垂向入渗, 潜水位变动抬高, 潜水在水位升高的同时产生排泄河渠作用; 此时, 潜水渗流过程实质上是入渗补给和排泄河渠共同作用的结果。(4) 式说明, 在半无限潜水含水层中, 即使河渠水位保持不变, 潜水非稳定流运动也受河渠边界条件的控制。

3.2 解的数学特征与潜水位变动规律

3.2.1 边界对 ε 作用的影响

在无边界条件下和有边界控制条件下, ε 形成的潜水水位变动速度分别为 v_3 和 v_4 ; 对(3) 式和(4) 式, 求 $\partial h / \partial t$, 可相应得 v_3 和 v_4 。

边界条件使得 v_3 减小的数值和幅度为分别为 v_c 和 v_r :

$$v_c = v_3 - v_4 = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}\right], \quad (5)$$

$$v_r = 1 - \left[\frac{v_4}{v_3}\right] = \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{2\sqrt{at}}\right], \quad (6)$$

由(5) 式, $\operatorname{erfc}(z)$ 是一递减函数, 随 x 减小和 t 增大, v_c 逐渐增大。当计算点趋向河渠时(x 减小), 河渠边界影响趋明显, 所以 v_c 增大。对于同一计算点, 随着时间的延长(t 增大), ε 作用将使潜水位逐渐升高, 由此产生的含水层向河道渠排泄作用逐渐加大; 因此, 含水层从 ε 作用中获得的净补给逐渐变小; 所以 v_c 也逐渐增大。

根据文献[1] 中第 238 页的实例 ($a = 1.0 \times 10^4 \text{ m}^2/\text{d}$), 在不同距离点上, v_r 关于时间的变化如图 2。

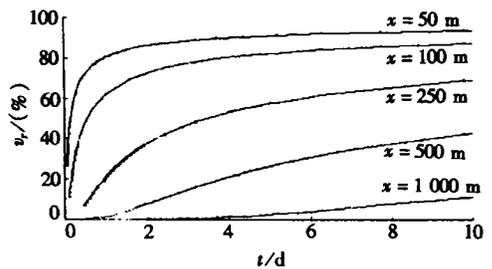


图 2 边界对 ε 作用的影响幅度

图 2 v_r 随距离、时间的变化趋势, 与 v_c 的变化趋势基本一致。在距离河渠 50 m, 100 m, 250 m 和 500 m 处, 当时间为 5 d 时, v_r 分别为 91%, 82%, 57% 和 27%。即使在 1 000 m 处, 5 d 时的

v_r 值也达到 3%; 而且自第 5 d 开始, v_r 上升迅速, 在第 10 d v_r 达 9%~10%。

在河渠密度较大地区, 河渠边界的影响较明显, 经典公式(3)的计算精度, 可能难以满足有关研究的要求。如安徽省淮北平原, 沟间距一般小于 2 000 m ($x < 1\ 000$ m); 我国地下水位观测时间间距多为 5 d^[10]; 此时, 若计算过程超过 5 d (即两个观测时段), v_r 将为 9%~10%。因此, 在河渠密度较大地区进行有关研究时, 河渠边界的作用不宜忽略。

3.2.2 ε 对 ΔH 作用的影响

在 ΔH 和 ε 共同作用下, 潜水水位的变动为非匀速变动, 变动速度为 $v_t(x, t)$ 。由(1)式:

$$v_t(x, t) = \frac{\Delta H \cdot x}{2 \sqrt{\pi a}} t^{-3/2} \exp\left[-\frac{x^2}{4at}\right] + \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \operatorname{erf}\left[\frac{x}{2 \sqrt{at}}\right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial t} = \frac{x}{2 \sqrt{\pi a}} t^{-3/2} \exp\left[-\frac{x^2}{4at}\right] \left[\frac{\Delta H}{t} \left[-\frac{3}{2} + \frac{x^2}{4at} \right] - \frac{\varepsilon}{\mu} \right], \quad (8)$$

由(8)式, $v_t(x, t)$ 存在一拐点。在 ΔH 和 ε 共同作用下, 拐点处的时间为 t_k , 令 $R = \varepsilon / (\mu \Delta H)$, 有:

$$t_k = \begin{cases} \frac{1}{2R} \left[\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{Rx^2}{a}} - \frac{3}{2} \right] & (R > 0), \\ \frac{1}{2R} \left[-\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{Rx^2}{a}} - \frac{3}{2} \right] & (R < 0), \end{cases} \quad (9)$$

由(9)式, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 拐点处的时间为 t_h , $t_h = x^2/6a$ 。当 $R > 0$ 时, 因为 $x^2/4at_k - 3/2 = R/t_k > 0$, 所以有 $t_k < t_h = x^2/6a$, 且有 $t_k \xrightarrow{R \rightarrow 0} t_h$ 。

上述数学规律表明: v_4 (对应边界条件下 ε 作用) 与 v_2 (对应 ΔH 作用, 由(2)式求 $\partial h/\partial t$ 获得) 合成为 v_t , 由于 v_4 关于 t 呈递减变化, 所以相对 v_2 而言, v_t 曲线的最高点 (此时潜水位具最大上升速度) 在 t 轴上将前移, 即 $t_k \leq t_h$ 。

该数学规律的物理含义: ε ($\varepsilon > 0$) 的持续作用使潜水位不断抬高, 潜水位被抬高的同时使含水层要排泄河渠, 随着潜水位逐渐升高, 排泄作用也逐渐增大, 这使得含水层从 ε 中获得的净补给越来越小; ΔH 独立作用时, 河渠补给含水层的强度是随时间递减的; 所以两者相迭加, 相对 ε 的独立作用而言, 潜水获得最大补给强度的时间将被提前。

v_2 、 v_4 与 v_t 间关系如图 3。图中 $a = 1 \times 10^4$ (m^2/d), $\varepsilon = 0.02$ (m/d), $\mu = 0.02$, $\Delta H = 1.0$ m, $x = 100$ m。潜水位实际上升速度曲线 (v_t) 在拐点处的时间 t_k 为 3.6 h (0.15 d), 比 t_h 提前 0.4 h。在计算求 a 时, 若忽略了 ε 的影响, 有 $a = x^2/6t = 100 \text{ m} \times 100 \text{ m}/(6 \times 0.15 \text{ d}) = 1.11 \times 10^4$ (m^2/d), 这比 a 的真值大 11%。

以上讨论中的 ε 为正值 (如降水入渗, 灌溉回渗等), 在 ε 为负值时 (排泄, 如潜水蒸发), 产生相反的效应。值得指出的是, 关于 t_k 的计算公式与正值条件下不同, 如(9)中的 $R < 0$, 另外, 此时 $t_k \geq t_h$ 。

3.2.3 a 、 x 对 v_t 的影响

利用 3.2.2 中的 a 值 ($a = 1 \times 10^4$ (m^2/d)), 在 x 为 80 m、100 m 和 120 m 处, v_t 随 t 的变化 ($v_t \sim t$) 分别如图 4 中的曲线 A、B 和 C。

当 x 增大时, $v_t \sim t$ 曲线形态渐变宽缓, t_k 增大 (参见表 1)。这是因为 ΔH 的补给作用在向 x 点处传导中, 沿途所受到的总阻力将随 x 增大而增大; 越靠近边界, 潜水位被雍高的速度越快; 因此 ΔH 的补给作用应随 x 增大而变平缓 (见图 3 中的 v_4)。同理, 形成的向边界排泄作

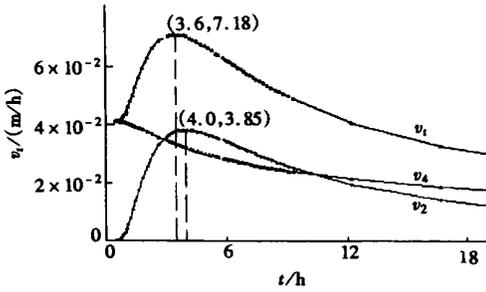


图3 ε 对 ΔH 引起的潜水上过程的影响

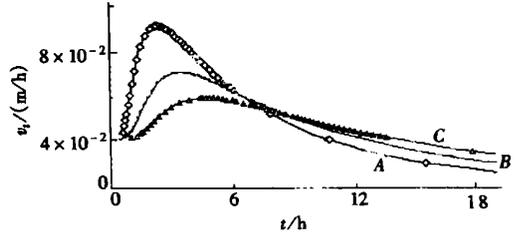


图4 a 与 x 对 v_t 的影响

用也随 x 增大而趋于平缓(参见图 3 中的 v_2)。由上述两者迭加成的 v_t 曲线形态将随 x 增大而越加宽缓。曲线 v_t 的峰值向远处传导需时间过程, x 越大, 传导过程所需的时间 t_k 也将越长。

表 1 $1/a$ 与 x^2 对 v_t 影响的等效性

	曲线 A	曲线 B	曲线 C
a (10^4 (m^2/d))	1.0	0.64	1.0
x (m)	80	100	120
t_k (h)	2.3	3.6	4.7
$\max v_t$ (m/h)	9.32	7.18	6.03

a 是反映含水层压力传导能力的, a 越大意味着补给作用在传导中克服沿途阻力的能力越强, 它与 x 值变化产生的效果相反。 a 的变化, 可导致潜水具最大变动速度的时间发生提前或延迟; 可论证, $1/a$ 与 x^2 具等效性; 如曲线 A, 既是 $a = 0.64 \times 10^4 (m^2/d)$ 且 $x = 100$ m 的 v_t 曲线, 也是 $a = 1.0 \times 10^4 (m^2/d)$ 且 $x = 80$ m 处 v_t 曲线(见表 1)。

3.2.4 R 对 v_t 的影响

μ 和 ΔH 为恒量时, R 的增大, 就意味着 ε 在 v_t 中的比重增大。仍用 3.2.2 中的有关参数值, 不同 R 值时的 $v_t \sim t$ 如图 5。图 5 中, 曲线 A、B、C、和 D, 分别表示 R 为 1.0、0.75、0.5 和 0.0 时的 $v_t \sim t$ 曲线, 对应的拐点时间分别是 3.63、3.71、3.85 和 4.03 h, 拐点处地下水位上升速度分别是 7.18、6.33、5.05 和 3.85 (m/h); 其中 $R = 0$ 时, 是 ΔH 独立作用的曲线。随着 R 的增大, $v_t \sim t$ 曲线形态逐渐变窄陡, t_k 也逐渐变小。这是由于在同一个地点接受同等 ΔH 所产生的补给时 ($x, \Delta H$ 不变), ε 越大, 就意味着 t_k 被提前得越多(相对 t_h 而言, 参见 3.2.1), 从而 v_t 形态也就变得越窄陡。可论证, μ 与 $1/\varepsilon$ 具有等效性。

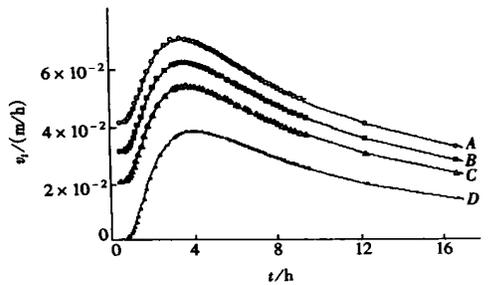


图5 R 对 v_t 的影响

以上述参数条件为例, 当 $R = 0.5$ 时, 若不考虑 ε 作用, a 的计算误差(参见 3.2.2)将偏大 7.81%。此时入渗强度为 10 (mm/d) (在降水入渗系数为 0.25 地区, 40 (mm/d) 的降水或灌溉强度就可形成这一入渗强度), 这在我国大部分灌区是可较普遍达到的。所以, 在研究河渠水位变动条件下的潜水非稳定渗流问题时, 垂向入渗作用不宜轻易忽略, 也不宜简单地用(3)来

削减。

4 结 语

根据上述对一侧为河渠边界的半无限潜水含水层中、垂向入渗与河渠水平渗透共同作用下的潜水非稳定渗流问题的研究, 得出以下结论:

1) 垂直与水平渗透共同作用下的潜水非稳定渗流运动, 不等于这两因素独立作用效果的简单代数和。在河渠密度较大地区, 不宜忽略河渠边界的影响; 在垂向入渗强度较大时, 垂向入渗作用既不宜忽略也不宜采用公式(3)来进行简单的削减。

2) 垂向入渗在抬高潜水位的同时, 还伴有排泄河渠的作用。在这种垂向入渗的影响下, 河渠补给作用形成的潜水位上升速度曲线(v_4), 形态上由宽缓变窄陡, 最大补给强度的发生时间将被提前; 垂向入渗强度在总补给强度中的比例越大(即 R 值增大), 这种效应越明显。就对潜水实际最大上升速度的延迟效应而言, μ 与 $1/\varepsilon$ 以及 $1/a$ 与 x^2 具等效性。

3) 在垂向入渗不可忽略的条件下, 当模型(I)中的边值条件发生变化时, 如有限域内问题^[1]、变水头透水边界问题^[3]、含水层非水平问题^[5,6]等, 将文中的方法原理与相关文献中的边值处理方法相结合, 可获得相应问题的解。对于模型(I), 根据解的数学特征, 在计算含水层参数时, 既可用配线法^{[1],[3]}、也可用拐点法。

4) 文中的垂向入渗作用是按恒量处理的, 当它在空间、时间上变化较大时, 对计算精度上有多大影响, 值得探讨。

[参 考 文 献]

- [1] 张蔚榛. 地下水非稳定流计算和地下水资源评价[M]. 北京: 科学出版社, 1983.
- [2] 陈崇希. 地下水不稳定井流计算方法[M]. 北京: 地质出版社, 1983.
- [3] 阿里木·土尔逊, 周志芳, 木塔力甫·依明尼亚孜. 河渠附近潜水非稳定运动的一种通解[J]. 河海大学学报(自然科学版), 2003, 31(6): 649—651.
- [4] 杨红坡, 谢新宇, 张继发, 等. 潜水一维非稳态运动的解析理论及应用[J]. 水科学进展, 2004, 24(1): 82—86.
- [5] 李清平, 崔玉兰. 黄河侧渗补给浅层地下水试验研究[J]. 水文, 2004, 13(2): 26—30.
- [6] Valentijn R N P, Niko E C V, Francois P D T. Analytical solution for transient water table heights and outflows from inclined ditch drained terrains[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2002, 128(6): 358—364.
- [7] Seung B W, Philip L F L. Water table profiles and discharges for an inclined ditch drained aquifer under temporally variable recharge[J]. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 2003, 129(2): 93—99.
- [8] Frederic C W, David J C, William E S. Stream/ aquifer interactions at great sand dunes national monument, Colorado: Influences on interdunal wetland disappearance[J]. Journal of Hydrology, 2003, 271(1): 77—100.
- [9] Manglik A, Rai S N, Sign V. Modelling of aquifer response to time varying recharge and pumping from multiple basins and wells[J]. Journal of Hydrology, 2004, 292(1): 23—29.
- [10] SL/T183-96. 地下水监测规范[S]. 北京: 中国水利水电出版社, 1997.

Rule of Transient Phreatic Flow Subjected to Vertical and Horizontal Seepage

TAO Yue_zan¹, XI Dao_ying²

(1. School of Civil Engineering, Hefei University of Technology,
Hefei 230007, P. R. China;

2. Department of Earth Science, University of Science and Technology of China,
Hefei 230026, P. R. China)

Abstract: In a semi_infinite aquifer bounded by a channel, a transient flow model is constructed for phreatic water subjected to vertical and horizontal seepage. Based on the first linearized Boussinesq equation, the analytical solution of the model is obtained by Laplace transform. Having proven the transformation between the analytical solution and some relevant classic formulas, suitable condition for each of these formulas is demonstrated. According to the analytical solution, the variation of transient flow process caused by the variables, such as vertical infiltration intensity, fluctuation range of river stage, aquifer parameters such as transmissivity and specific yield, and the distance from calculating point to channel boundary, is analyzed quantitatively one by one. Lagging effect will happen to the time, when phreatic water gets its maximum fluctuation velocity, response to the varying of the variables stated above. The condition for some variables that can form equivalent lagging effect is demonstrated. Corresponding to the mathematical characteristics of the analytical solution, the physical implication and the fluctuation rule of groundwater level are discussed.

Key words: channel boundary; semi_infinite aquifer; vertical seepage; horizontal seepage; transient phreatic flow