文章编号: 1000_0887(2006) 02_0217_06

热方程的非古典势对称群与不变解*

秦茂昌[1,2], 梅凤翔[2], 许学军[2]

(1. 重庆工商大学 理学院, 重庆 400067;
2. 北京理工大学 理学院, 北京 100081)

(胡更开推荐)

摘要: 主要研究了热方程与波方程的非古典势对称群生成元及相应的群不变解• 研究表明对于守恒形式的偏微分方程, 可通过其伴随系统求得的非古典势对称群生成元来构造其显式解• 这些显式解不能由方程本身的 Lie 对称群生成元或 Lie_Bäcklund 对称群生成元构造得到•

关 键 词: 非古典势对称群生成元; 热方程; 波方程; 显式解

中图分类号: O152.5; O175.2 文献标识码: A

引 言

在微分方程(特别是对偏微分方程而言) 的约化及显式解的构造的各种方法中, 对称群方法是一种非常重要且应用广泛的方法• 文献[1~ 4] 论述的经典 Lie 对称群方法, 可用来构造偏微分方程的显式解, 并对方程本身进行约化• 偏微分方程的经典对称群, 通常是指定义在自变量及函数空间上将方程的解变为其它解的无限小连续变换• 同时将利用对称群方法构造得到的解, 称为方程的群不变解•

Bluman 和 Cole 在文献[5, 6] 中用一种新方法, 得到了守恒型偏微分方程的一种新的非局部对称, 这种对称既不是给定方程的 Lie 点对称也不是其 Lie_Bäcklund 对称, 这种对称被称为偏微分方程的势对称(古典势对称) • 一般而言, 由于偏微分方程的势对称确定方程比它的 Lie 对称群确定方程要少, 所以要找出其所有的对称是非常困难的, 但同时也产生了找到新的对称及群不变解的可能性, 正因为如此, 这种对称引起了广大研究者的兴趣•

最近, 古典势对称被进一步发展, 推广到了非古典势对称• 文献[7] 得到了波方程的几个非古典势对称群生成元及其群不变解• 文献[8] 利用 Burgers 方程的非古典势对称群生成元构造得到了新的显式解• 关于守恒型偏微分方程的非古典势对称群生成元的寻找及其相应群不变解的构造还有大量的工作要做•

在本文的第 1 节, 我们将给出一种求偏微分方程非古典势对称群生成元的方法; 第 2 节则以热方程及波方程为例, 说明方程非古典势对称群生成元的求法及其群不变解的构造•

---

* 收稿日期: 2004_03_19; 修订日期: 2005_10_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272021)
作者简介: 秦茂昌(1971—) , 男, 云南永胜人, 博士(联系人. Tel: + 86_23_60994796; E_mail: mcqin_7110037@ sina. com. cn)•

1 寻找对称的方法

考察阶数 $m \geqslant 2$ 的如下守恒形式的偏微分方程

$$D_i(f^i(y, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \cdots, u_{(m-1)})) = 0, \tag{1}$$

式中自变量 $y = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, u 为函数, $u_{(j)}(j = 1, 2, \cdots, m-1)$ 表示第j 次偏导数的全体: 例如 $u_{(1)} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $u_{(2)} = \{u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{nn}\}$, $\cdots$, (具体以 $x_1 = t$ 和$x_2 = x$ 为自变量来说, $u_{(1)} = \{u_t, u_x\}$, $u_{(2)} = \{u_{tt}, u_{tx}, u_{xx}\}$, $u_{(3)} = \{u_{ttt}, u_{ttx}, u_{txx}, u_{xxx}\}$)• 同时定义算子

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial}{\partial u} + u_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots + u_{ij_1j_2\cdots j_{m-1}}\frac{\partial}{\partial u_{j_1j_2\cdots j_{m-1}}} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)•$$

因为方程组(1) 是守恒形式, 所以存在 $n(n-1)/2$ 个函数 $\Psi^{i,j}$ 构成一个反对称张量$(i < j)$, 使得

$$f^i(x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \cdots, u_{(m-1)}) = \sum_{i<j}(-1)^j\frac{\partial}{\partial x_i}\Psi^{i,j} + \sum_{j<i}(-1)^{i-1}\frac{\partial}{\partial x_i}\Psi^{j,i} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)• \tag{2}$$

当 $j \neq i+1$, 则令函数 $\Psi^{i,j} = 0$, 引入函数 $v^i = \Psi^{i,i+1}(i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 可将方程(1) 的伴随系统(2) 变为如下形式的偏微分方程组

$$\begin{cases} f^1 = \dfrac{\partial v^1}{\partial x_2}, \\ f^j = (-1)^{j-1}\left(\dfrac{\partial v^j}{\partial x_{j+1}} + \dfrac{\partial v^{j-1}}{\partial x_{j-1}}\right), \qquad (1 < j < n), \\ f^n = \dfrac{\partial v^{n-1}}{\partial x_{n-1}}• \end{cases} \tag{3}$$

特别地, 若 $n = 2$, 令 $x_1 = t$, $x_2 = x$, $f^1 = f$ 和$f^2 = -g$, 则将方程组(1) 写成

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0• \tag{4}$$

选取函数 $\Psi^{1,2} = v^1 = v$, 于是伴随系统(2) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = f(t, x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \cdots, u_{(m-1)}), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = g(t, x, u, u_{(1)}, u_{(2)}, \cdots, u_{(m-1)})• \end{cases} \tag{5}$$

假设方程组(5) 具有如下形式的 Lie 对称群生成元

$$V = \tau(t, x, v)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x, v)\frac{\partial}{\partial x} + \phi(t, x, u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \eta(t, x, u, v)\frac{\partial}{\partial v}, \tag{6}$$

式中的对称群生成元系数函数 τ、ξ、ϕ 和 η 通过求解下面的对称群确定方程组得到

$$\begin{cases} V^{[m-1]}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - f\right)\Bigg|_{\frac{\partial v}{\partial x} - f = 0, \frac{\partial v}{\partial t} - g = 0} = 0, \\ V^{[m-1]}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - g\right)\Bigg|_{\frac{\partial v}{\partial x} - f = 0, \frac{\partial v}{\partial t} - g = 0} = 0• \end{cases} \tag{7}$$

只要对称群生成元系数函数 τ、ξ、ϕ 中的任何一个显含v(系数函数 η 不作此要求), 则得到的对称群生成元给出方程组(5) 的一个古典势对称群生成元• 为了寻找方程组(5) 的非古典势对称群生成元, 还要附加下列边条件

$$\tau u_t + \xi u_x - \phi = 0, \quad \tau v_t + \xi v_x - \eta = 0• \tag{8}$$

即, 首先利用式(5)和(8)求出偏导数 u_t、u_x、v_t、v_x, 再将它们代入对称群确定方程组(7), 求出系数函数 τ、ξ、ϕ 和 η•

2 应 用

在此节中, 将以用标准 Lie 对称群方法分析过的热方程及波方程为例, 对非古典势对称群生成元的求法及相应群不变解的构造进行具体讨论说明•

首先, 考察热方程的非古典势对称群生成元

$$u_t = u_{xx}. \tag{9}$$

将其写成守恒形式

$$\mathrm{D}_t(u) - \mathrm{D}_x(u_x) = 0. \tag{10}$$

相应的一阶微分方程组为

$$v_x = u, \quad v_t = u_x; \tag{11}$$

附加边条件为

$$\begin{cases} \tau u_t + \xi u_x = \phi, \\ \tau v_t + \xi v_x = \tau u_x + \xi u = \eta; \end{cases} \tag{12}$$

由条件(12)可以得到

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{\tau}(\eta - u\xi), \\ u_x = \dfrac{\phi}{\tau} - \dfrac{1}{\tau}u_x = \dfrac{\phi}{\tau} - \dfrac{\xi}{\tau^2}(\eta - u\xi). \end{cases} \tag{13}$$

方程组(11)的对称群确定方程组为

$$\begin{cases} V^{[m-1]}(v_x - u)\,|_{(\tau u_t + \xi u_x = \phi,\ \tau v_t + \xi v_x = \eta)} = 0, \\ V^{[m-1]}(v_t - u_x)\,|_{(\tau u_t + \xi u_x = \phi,\ \tau v_t + \xi v_x = \eta)} = 0. \end{cases} \tag{14}$$

将其展开得

$$\begin{cases} \eta_x + u_x(\eta_x - \tau_x) + u(\eta_v - \xi_x) - uu_x\tau_v - u^2\xi_v = \phi, \\ \eta_t - \phi_x - u_x(\phi_u - \xi_x - \eta_v + \tau_t) - \\ \qquad u(\phi_v + \xi_t) + u_t(\eta_u + \tau_x) + uu_t\tau_v - u_x^2\tau_v = 0. \end{cases} \tag{15}$$

将式(13)代入方程组(15), 则有

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\xi}{\tau}\tau_v - \xi_v\right)u^2 + \eta_x + \dfrac{\eta}{\tau}(\eta_u - \tau_x) - \phi + \left(\eta_v - \xi_x - \dfrac{\xi}{\tau}(\eta_u - \tau_x) - \dfrac{\eta}{\tau}\tau_v\right)u = 0, \\ \eta_t - \phi_x - \dfrac{\eta}{\tau}(\phi_u - \xi_x - \eta_v + \tau_t) + \dfrac{\xi}{\tau}(\tau_x + \eta_v) - \dfrac{\xi\eta}{\tau^2}(\tau_x + \eta_u) - \dfrac{\eta^2}{\tau^2}\tau_v + \\ \qquad \left(\dfrac{\xi}{\tau}(\phi_u - \xi_x - \eta_v + \tau_t) - \phi_v - \xi_t + \dfrac{\xi^2}{\tau^2}(\tau_x + \eta_u) + \dfrac{\phi}{\tau}\tau_v + \dfrac{\xi\eta}{\tau^2}\tau_v\right)u = 0. \end{cases} \tag{16}$$

至此, 我们只需要从方程组(15)或(16)中解出所有可能的系数函数就得到所有的对称• 要得到方程组(15)或(16)的一般解是非常困难的, 我们仅仅考察一些特解• 当系数函数 $\tau \neq 0$ 且 $\eta = u\xi$, 则显然有 $\phi = 0$, 它们构成方程组(16)的一组特解, 由这组特解得到非古典势对称群生成元为

$$V_1 = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + u\xi\frac{\partial}{\partial v}, \tag{17}$$

式中系数函数 $\tau\neq0$, ξ 显含变量 v• 虽然式(17) 给出方程组(11) 的无穷多的非古典势对称群生成元, 但是容易证明由这些对称群生成元得到的不变解仅为常数• 因而要得到对热方程有意义的非古典势对称群生成元, 系数函数 ξ 和 η 必须满足关系式 $\eta\neq u\xi$•

这里应该指出的是系数函数 $\tau\neq0$ 是从方程组(12) 得到关系(13) 的必要条件• 接下来, 首先考察系数函数 $\tau=0$ 的情况, 若 $\tau=0$, 从方程组(12), 得到 $u_x=\phi/\xi$, $v_x=\eta/\xi=u$, 将它们代入方程组(15), 则有

$$\begin{cases}\xi^2\eta_x+\xi\phi\eta_u+\xi\eta(\eta_v-\xi_x)-\eta^2\xi_v=\xi^2\phi,\\ \xi^3(\eta_t-\phi_x)-\xi^2(\phi(\phi_u-\xi_x-\eta_v)+\eta(\phi_v+\xi_t))+\\ \qquad(\mathrm{D}_t(\eta)\xi-\eta\mathrm{D}_t(\xi))\xi\eta_u=0\bullet\end{cases}\tag{18}$$

解方程组(18), 可以得到如下一组特解

$$\xi=-2at+b,\quad \phi=av+(ax+c)u+\alpha_x,\quad \eta=(ax+c)v+\alpha(x,t),$$

其中 a、b 和 c 为任意常数, 函数 $\alpha(x,t)$ 需要满足热方程• 由该组解得到的非古典势对称群生成元为

$$V_2=(2at+b)\frac{\partial}{\partial x}+(av+(ax+c)v+\alpha_x)\frac{\partial}{\partial u}+((av+c)v+\alpha)u\frac{\partial}{\partial v},\tag{19}$$

不过, 容易验证从(19) 式中并没有得到热方程的任何新的对称•

令系数函数 $\xi=-1/(v+d)$, $\eta=e$ (d, e 是非零常数), 则由方程组(18) 的第 1 个方程求得系数函数 $\phi=-e^2$, 它们构成方程组(18) 的一组特解, 其对应的非古典势对称群生成元为

$$V_3=\frac{1}{v+d}\frac{\partial}{\partial x}-e^2\frac{\partial}{\partial u}+e\frac{\partial}{\partial v}\bullet\tag{20}$$

由非古典势对称群生成元(20) 可构造得到热方程的如下显式解

$$u(x,t)=ex+f\bullet\tag{21}$$

当然, 解(21) 也可以利用非经典方法由热方程的经典 Lie 对称群生成元 ∂t 构造出来•

选取系数函数 $\xi=\tan(x+g)$, $\eta=v$ (g 是常数), 则由方程组(18) 的第 1个方程可得到系数函数 $\phi=-v\tan(x+g)$, 它们构成方程组(18) 的一组特解, 其对应的非古典势对称群生成元为

$$V_3=\tan(x+g)\frac{\partial}{\partial x}-v\tan(x+g)\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}\bullet\tag{22}$$

由式(22) 可构造得到热方程的如下显式解

$$u(x,t)=\sin(x+g)\mathrm{e}^{h-t},\tag{23}$$

式中 h 是常数•

选取系数函数 $\xi=\cot(x+g_1)$, $\eta=v$ (g_1 是常数), 则由方程组(18) 的第 1 个方程可得到系数函数 $\phi=-v\tan(x+g_1)$, 它们构成方程组(18) 的 1 组特解, 其对应的非古典势对称群生成元为

$$V_5=\cot(x+g_1)\frac{\partial}{\partial x}-v\cot(x+g_1)\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}\bullet\tag{24}$$

由(24) 可构造得到热方程的如下显式解

$$u(x,t)=\cos(x+g_1)\mathrm{e}^{h_1-t},\tag{25}$$

式中 h_1 是常数•

注 解(23) 和(25) 都不可能由热方程 Lie 对称群生成元构造得到•

现在, 考察系数函数 $\tau\neq 0$ 的情况, 当 $\tau\neq 0$ 时, 由方程组(16)可以得到下列特解

$$\begin{cases}\tau = 4it^2 + j,\ \ \xi = 4ixt + k,\\ \phi = -2ixy - (ix^2 + 6it + m)u + \alpha_x,\\ \eta = -(ix^2 + 2it + m)v + \alpha(x, t),\end{cases}$$

与其对应的非古典势对称群生成元为

$$V_6 = (4it^2 + j)\frac{\partial}{\partial t} + (4ixt + k)\frac{\partial}{\partial x} + (-(ix^2 + 2it + m)v + \alpha(x, t))\frac{\partial}{\partial v} + (-2ixv - (ix^2 + 6it + m)u + \alpha_x)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{26}$$

同样, 下列函数

$$\tau = n,\ \ \xi = -2t + o,\ \ \phi = v + xu,\ \ \eta = xv$$

也是方程组(16)的一组特解, 与其对应的非古典势对称群生成元为

$$V_7 = n\frac{\partial}{\partial t} + (-2t + o)\frac{\partial}{\partial x} + (v + xu)\frac{\partial}{\partial u} + xv\frac{\partial}{\partial v}. \tag{27}$$

很遗憾, 到目前为止, 未能利用非古典势对称群生成元(26)和(27)构造得到热方程的新显式解.

选取系数函数 $\tau = \tau(x, v)$(其显含 v), $\xi = 0$ 并且令 $\eta = p\tau$(p 是常数), 则由方程组(16)的第 1 个方程可以得到 $\phi = 0$, 它们构成方程组(16)的 1 组特解, 其对应的非古典势对称群生成元为

$$V_8 = \tau(x, v)\frac{\partial}{\partial t} + p\tau(x, v)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{28}$$

由式(28)可构造得到热方程的如下显式解

$$u(x, t) = (x + p)t + \frac{(x + p)^3}{6} + qx + r, \tag{29}$$

式中 q、r 是常数.

接下来, 我们考察(1+1)维波方程的非古典势对称群生成元

$$u_{tt} = u_{xx}. \tag{30}$$

写成守恒形式为

$$\mathrm{D}_t(u_t) - \mathrm{D}_x(u_x) = 0; \tag{31}$$

相应的一阶微分方程组为

$$v_x = u_t,\ \ v_t = u_x; \tag{32}$$

附加边条件为

$$\tau u_t + \xi u_x = \phi,\ \ \tau v_t + \xi v_x = \tau u_x + \xi u_t = \eta. \tag{33}$$

综合式(32)和(33), 可得到

$$u_t = \frac{\tau\phi - \xi\eta}{\tau^2 - \xi^2},\ \ u_x = \frac{\tau\eta - \xi\phi}{\tau^2 - \xi^2}. \tag{34}$$

若采用文献[7]的方法, 将式(34)代入非古典势对称群生成元确定方程

$$\begin{cases}\eta_t + u_t(\eta_u - \xi_t - \phi_v + \tau_x) + u_x(\eta_v + \xi_x - \phi_u - \tau_t) - \phi_x = 0,\\ \eta_x + u_x(\eta_u + \xi_t - \phi_v - \tau_x) - u_t(\eta_v - \xi_x - \phi_u + \tau_t) - \phi_t = 0.\end{cases} \tag{35}$$

化简求解是非常复杂而困难的. 由式(34), 可以直接得到

$$u_x + u_t = \frac{\eta + \phi}{\tau + \xi}. \tag{36}$$

令 $(\eta+\phi)/(\tau+\xi)=\psi(t,x,u,v)$, 综合式(30)和(36),可得

$$D_t(\psi)-D_x(\psi)=0. \tag{37}$$

由于 $v_x=u_t$ 和 $v_t=u_x$, 通过适当的选择待定函数 ψ, 可以很简单的得到文献[7]中所求得的非古典势对称群生成元及相应的不变解, 而且能够得到更多的非古典势对称群生成元, 且计算较为简单•

[参 考 文 献]

[1] Olver P J. Applications of Lie Groups to Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1996.

[2] Ibragimov N H. Transformation Groups Applied to Mathematical Physics[M]. New York: Springer_Verlag, 1987.

[3] Bluman G W, Kumei S. Symmetries and Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1989.

[4] Ovsiannikov L V. Group Analysis of Differential Equations[M]. New York: Academic, 1989.

[5] Bluman G W, Cole J D. The general similarity solutions of the heat equation[J]. Journal of Mathematics and Mechanics, 1969, **18**(5): 1025—1042.

[6] Bluman G W, Kumei S. New classes of symmetries for partial differential equation[J]. Journal of Mathematical Physics, 1988, **29**(4): 806—811.

[7] Johnpiliai A G, Kara A H. Nonclassical potential symmetry generators of differential equations[J]. Nonlinear Dynamics, 2002, **30**(2): 167—177.

[8] Gandaries M L. Nonclassical potential symmetries of the Burgers equation[A]. In: Shkil M, Nikitin A, Boyko V Eds. Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics[C]. Vol **1**. Klev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 1997, 130—137.

Nonclassical Potential Symmetries and Invariant Solutions of Heat Equation

QIN Mao_chang[1,2], MEI Feng_xiang[2], XU Xue_jun[2]

(1. School of Science, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, P. R. China;

2. School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China)

Abstract: Some nonclassical potential symmetry generators and group_invariant of heat equation and wave equation were determined. It is shown that new explicit solutions of conserved equations can be constructed by using the nonclassical potential symmetry generators which are derived from their adjoit system. These explicit solutions cannot be obtained by using the Lie or Lie_B¾cklund symmetry group generators of differential equations.

Key words: nonclassical potential symmetry generators; heat equation; wave equation; explicit solution