

文章编号: 1000\_0887(2006) 03\_0253\_07

# 不同理论下圆板特征值之间的解析关系<sup>\*</sup>

马连生, 王铁军

(西安交通大学 工程力学系, 强度与振动教育部重点实验室, 西安 710049)

(本刊编委王铁军来稿)

**摘要:** 基于经典板理论(CPT)、一阶剪切变形板理论(FPT)以及 Reddy 三阶剪切变形板理论(RPT)之间, 圆板轴对称特征值问题在数学上的相似性, 研究了不同理论之间圆板特征值间的解析关系。将特征值问题的求解转化为代数方程的求解, 并导出了不同理论之间圆板特征值的显式精确解析关系。从而, 只要已知圆板特征值(临界屈曲载荷和固有频率)的经典结果, 便很容易从这些解析关系中得到一阶和三阶理论下圆板特征值的相应结果, 这便于工程应用, 同时也可检验一阶和三阶理论下板特征值的数值结果的有效性、收敛性以及精确性等问题。

**关键词:** 经典板理论; 剪切变形板理论; 特征值; 屈曲; 固有频率

**中图分类号:** O322      **文献标识码:** A

## 引 言

在高阶剪切变形板理论和经典板理论之间, 板弯曲、屈曲和振动问题的控制方程存在数学上的相似性, 可望用经典结果来表示相应高阶理论下的解。有关高阶板理论和经典板理论之间弯曲解的精确关系已经有很多的报道<sup>[1]</sup>。Wang 和 Lee<sup>[2]</sup>、Wang 和 Reddy<sup>[3]</sup> 分别就圆板和简支多边形板屈曲问题, 研究了 Reddy 三阶板理论和经典板理论间临界载荷的解析关系。Wang 等人<sup>[4]</sup> 还进一步研究了一个置于 Pasternak 基础上的简支多边形板的屈曲问题, 并给出了经典理论、一阶理论和 Reddy 三阶板理论之间临界载荷的解析关系。Wang 等人<sup>[5]</sup> 分析了简支多边形板的固有频率问题, 并给出了经典理论和 Reddy 三阶理论之间固有频率关系的一个用超越方程表示的关系式。Cheng 和 Kitipornchai<sup>[6]</sup> 将板的临界屈曲载荷和固有频率这样的特征值问题统一处理, 研究了简支边界多边形对称复合材料层合板的特征值问题。并将 Reddy 三阶理论、一阶理论和经典理论的结果用振动膜的固有频率统一来表示。最近, Ma 和 Wang<sup>[7]</sup> 分别得到了基于高级和经典板理论的功能梯度圆板弯曲解间的解析关系、屈曲解之间的解析关系。

本文也将圆板的临界屈曲载荷问题和固有频率问题统一作为特征值问题处理, 利用经典理论(CPT)、一阶剪切变形理论(FPT)以及 Reddy 三阶剪切变形理论(RPT)之间, 圆板轴对称特征值问题在数学上的相似性, 研究不同理论间圆板特征值的解析关系。将特征值问题的求解

\* 收稿日期: 2005\_02\_16; 修订日期: 2005\_11\_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10125212)

作者简介: 马连生(1963—), 男, 山东临朐人, 博士;

王铁军(联系人, Tel: + 86\_29\_82665168; Fax: + 86\_29\_83237910; E-mail: wangtj@mail.xjtu.edu.cn)。

转化为求解代数方程, 导出了不同理论间圆板特征值显式表达的解析关系。因此, 只要已知板的经典结果, 便很容易从这些关系中得到一阶和三阶理论下的相应结果, 便于工程应用, 同时也可检验一阶和三阶理论下板特征值的数值结果的有效性、收敛性和精确性等问题。

## 1 基于 Reddy 三阶理论的圆板运动方程

考虑半径为  $b$ 、厚度为  $h$  的均匀各向同性圆板。  $r$ 、 $\theta$  分别为径向和环向坐标,  $r$ 、 $\theta$  面置于变形前板的中面,  $z$  轴垂直于  $r$ 、 $\theta$  面。 Reddy 三阶板理论位移场为<sup>[8]</sup>

$$U_r(r, z; t) = z \phi(r, t) - \beta z^3 (\phi + w, r), \quad (1)$$

$$U_z(r, z; t) = w(r, t), \quad (2)$$

式中  $U_r$  和  $U_z$  分别是  $r$  和  $z$  方向的位移,  $w$  为挠度,  $\phi$  表示变形前板中面上的微垂线段在变形后的转动,  $\beta = 4/(3h^2)$ 。 基于该位移场的几何方程为

$$\varepsilon_r = z \phi, r - \beta z^3 (\phi, r + w, r), \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = z \phi/r - \beta z^3 (\phi/r + w, r/r), \quad (4)$$

$$\gamma_{rz} = \phi + w, r - 3\beta z^2 (\phi + w, r). \quad (5)$$

利用 Hamilton 原理, 可得 Reddy 板的运动方程

$$\frac{1}{r} M_\theta - \frac{1}{r} (r M_r), r + Q_r = - I_1 \phi, u + \mathcal{H} 2 w, r u, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} - \beta \frac{1}{r} (r P_r), r + \beta \frac{1}{r} P_\theta, r - \frac{1}{r} (r Q_r), r + p \frac{1}{r} (r w, r), r = \\ - I_0 w, u - \mathcal{H} 2 \frac{1}{r} (r \phi, u), r + \beta^2 I_3 \frac{1}{r} (r w, r u), r, \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $p$  为板边界上的均布径向压力。 各阶弯矩、剪力以及各种系数如下

$$M_r = D_{11} (\phi, r + \nu \phi/r) - \mathcal{H} F_{11} (w, r + \mathcal{W} w, r/r),$$

$$M_\theta = D_{11} (\mathcal{V} \phi, r + \phi/r) - \mathcal{H} F_{11} (\mathcal{W} w, r + w, r/r),$$

$$P_r = F_{11} (\phi, r + \nu \phi/r) - \mathcal{H} H_{11} (w, r + \mathcal{W} w, r/r),$$

$$P_\theta = F_{11} (\mathcal{V} \phi, r + \phi/r) - \mathcal{H} H_{11} (\mathcal{W} w, r + w, r/r),$$

$$Q_r = A_{44} (\phi + w, r), \quad R_r = D_{44} (\phi + w, r), \quad M_r = M_r - \mathcal{H} P_r,$$

$$M_\theta = M_\theta - \beta P_\theta, \quad Q_r = Q_r - 3\beta R_r,$$

$$(D_{11}, F_{11}, H_{11}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1 - \nu^2} (z^2, z^4, z^6) dz,$$

$$(A_{44}, D_{44}, F_{44}) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{2(1 + \nu)} (1, z^2, z^4) dz,$$

$$D_{11} = D_{11} - \beta F_{11}, \quad F_{11} = F_{11} - \mathcal{H} H_{11}, \quad A_{44} = A_{44} - 3\beta D_{44},$$

$$D_{44} = D_{44} - 3\beta F_{44}, \quad (I_0, I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho (1, z^2, z^4, z^6) dz,$$

$$I_1 = I_1 - \mathcal{H} 2, \quad I_1 = I_1 - \beta I_2, \quad I_2 = I_2 - \mathcal{H} 3,$$

式中  $E$ 、 $\nu$ 、 $\rho$  分别为弹性模量、泊松比和质量密度。

## 2 Reddy 与 Kirchhoff 圆板特征值间的解析关系

设谐振动形式为

$$(\phi, w) = [\phi(r), w(r)] e^{i\omega t}, \quad (8)$$

式中  $\omega$  为固有频率。将(8)式代入(6)、(7)式,并仍以  $(\phi, w)$  代  $(\phi, w)$ , 可得如下静态形式的运动方程

$$\frac{1}{r}M_0 - \frac{1}{r}(rM_r)_{,r} + Q_r = I_1 \omega^2 \phi - \mathcal{H}_2 \omega^2 w_{,r}, \quad (9)$$

$$-\beta \frac{1}{r}(rP_r)_{,r} + \beta \frac{1}{r}P_{0,r} - \frac{1}{r}(rQ_r)_{,r} + p \frac{1}{r}(rw_{,r})_{,r} = I_0 \omega^2 w + \mathcal{H}_2 \omega^2 \frac{1}{r}(r\phi)_{,r} - \beta^2 I_3 \omega^2 \frac{1}{r}(rw_{,r})_{,r} \quad (10)$$

从式(9)和(10)可得

$$-\frac{1}{r}(rM_r)_{,r} + \frac{1}{r}M_{0,r} + p \cdot^2 w = I_0 \omega^2 w + I_1 \omega^2 \phi - \mathcal{H}_2 \omega^2 \cdot^2 w, \quad (11)$$

式中  $\cdot^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right), \quad \phi = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi)$

从方程(11)和(9)可以得到

$$\beta F_{11} \cdot^4 w + (p + \mathcal{H}_2 \omega^2) \cdot^2 w - D_{11} \cdot^2 \phi - I_0 \omega^2 w - I_1 \omega^2 \phi = 0, \quad (12)$$

$$\beta F_{11} \cdot^4 w + (A_{44} + \mathcal{H}_2 \omega^2) \cdot^2 w - D_{11} \cdot^2 \phi (A_{44} - I_1 \omega^2) \phi = 0, \quad (13)$$

式中  $D_{11} = D_{11} - \beta F_{11}, \quad A_{44} = A_{44} - 3\mathcal{H}_2 \omega^2$

把(12)、(13)两式写成以下矩阵形式

$$\mathbf{K} \mathbf{Y} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

这里  $\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix}^T, \mathbf{K}$  是一个二阶算子矩阵,各元素含义如下

$$K_{11}(\cdot^2) = \beta F_{11} \cdot^2 + (p + \mathcal{H}_2 \omega^2) \cdot^2 - I_0 \omega^2, \quad K_{12}(\cdot^2) = -D_{11} \cdot^2 - I_1 \omega^2,$$

$$K_{21}(\cdot^2) = \beta F_{11} \cdot^4 + (A_{44} + \mathcal{H}_2 \omega^2) \cdot^2, \quad K_{22}(\cdot^2) = -D_{11} \cdot^2 + (A_{44} - I_1 \omega^2),$$

在(14)式中,消去  $\phi$  可以得到,

$$\det[K(\cdot^2)]w = \beta(F_{11}^2 - D_{11}H_{11})(\cdot^2 + \lambda_1)(\cdot^2 + \lambda_2)(\cdot^2 + \lambda_3)w = 0, \quad (15)$$

其中  $\lambda(i = 1, 2, 3)$  是以下3次方程的3个根

$$\det[K(-\lambda)] = K_{11}(-\lambda)K_{22}(-\lambda) - K_{12}(-\lambda)K_{21}(-\lambda) = 0 \quad (16)$$

(15)式就是问题最终的特征方程。考虑相应的边界条件,从中可以得到三阶理论下圆板振动和屈曲问题的特征值以及特征向量。将(15)式改写为

$$(\cdot^2 + \lambda_i)y = 0, \quad (17)$$

式中  $y \equiv \beta(F_{11}^2 - D_{11}H_{11})(\cdot^2 + \lambda_2)(\cdot^2 + \lambda_3)w$

根据具有实系数3次代数方程的性质,方程(16)至少有1个实根存在,另外2个根或是实数或是共轭复数。不失一般性,我们假设  $\lambda_1$  是实根,那么,  $y$  将是1个实函数。下面考察边界条件。对于简支情况

$$w = 0, \quad M_r = 0, \quad P_r = 0 \quad (18)$$

对于夹紧情况

$$w = 0, \quad \phi = 0, \quad dw/dr = 0 \quad (19)$$

板中心的条件

$$\phi = 0, \quad dw/dr = 0, \quad V_r = 0, \quad (20)$$

式中等效剪力  $rV_r \equiv rQ_r + \beta \left[ \frac{d}{dr}(rP_r) - P_0 \right]$

由于  $y$  仅为  $r$  的函数,因此,在外边界  $r = b$  处,

$$y = C_1, \quad (21)$$

式中  $C_1$  为常数。由条件(20)、方程(9)、(12)以及(13)式可得到

$$dy/dr = 0, \quad \text{板中心 } r = 0 \text{ 处} \quad (22)$$

经典理论下,圆板的轴对称特征值问题为

$$(\nabla^2 + \lambda_C)m = 0, \quad (23)$$

$$m = C_2 \quad \text{外边界 } r = b \text{ 处}, \quad (24)$$

$$dm/dr = 0, \quad \text{板中心 } r = 0 \text{ 处}, \quad (25)$$

式中  $C_2$  为常数。对于屈曲问题<sup>[9]</sup>,  $\lambda_C = p/D$ ,  $m = -D\nabla^2 w^C$ ; 对于振动问题<sup>[10]</sup>,  $\lambda_C = \sqrt{\rho h/D} \omega_C$ ,  $m = w^C$ 。基于特征值问题(17)、(21)、(22)与问题(23)~(25)的相似性,可以得到

$$\lambda_1 = \lambda_C \quad (26)$$

将(26)式代入(16)式,得到

$$\det[K(-\lambda_C)J] = A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \quad (27)$$

这里  $A = \beta^2(I_{11}I_3 - I_2^2)\lambda_C + I_0I_1$ ,  $(28)$

$$B = \beta(F_{11}I_1 + D_{11}I_2 - D_{11}I_2 - F_{11}I_1)\lambda_C^2 + (pI_1 - D_{11}I_0 - A_{44}I_1)\lambda_C - A_{44}I_0, \quad (29)$$

$$C = [\beta^2(D_{11}H_{11} - F_{11}^2)\lambda_C - D_{11}A_{44}]\lambda_C^2 - (D_{11}\lambda_C + A_{44})\lambda_C p. \quad (30)$$

令式(27)中  $\omega = 0$ , 即  $C = 0$ , 可得 Reddy 板与 Kirchhoff 板临界屈曲载荷  $p_{cr}^R$  和  $p_{cr}^C$  之间的解析关系为

$$p_{cr}^R = \frac{\beta^2(D_{11}H_{11} - F_{11}^2)\lambda_C + D_{11}A_{44}}{D_{11}\lambda_C + A_{44}}\lambda_C = \frac{1 + p_{cr}^C/(70Gh)}{1 + 14p_{cr}^C/(17Gh)}p_{cr}^C, \quad (31)$$

这与文献[3]结果相同。从(27)式可得 Reddy 板与 Kirchhoff 板固有频率  $\omega_R$  和  $\omega_C$  之间解析关系

$$\omega_R^2 = (-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC})/(2A). \quad (32)$$

自由振动时,  $p = 0$ , Reddy 板与 Kirchhoff 板固有频率间解析关系为

$$\omega_R^2 = \frac{G}{\rho h^2} \frac{a - \sqrt{a^2 - bc}}{c}, \quad (33)$$

式中  $a$ 、 $b$  和  $c$  可从(28)~(30)式求得。令  $p = 0$ ,  $a$ 、 $b$  和  $c$  的表达式如下

$$a = 8 \left[ 1 + \frac{h^2}{15} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right] + \frac{h^2}{21(1-\nu)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \left[ 34 + \frac{h^2}{15} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right],$$

$$b = \frac{8\rho h^5 \omega_C^2}{3(1-\nu)D} \left[ 1 + \frac{h^2}{420(1-\nu)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right],$$

$$c = \frac{1}{21} \left[ 34 + \frac{h^2}{30} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right].$$

### 3 其它解析关系与讨论

#### 3.1 一阶理论与经典的理论下圆板特征值间的解析关系

一阶理论下,矩阵形式的圆板特征方程在形式上依然如同式(14),令前述各算子矩阵元素中的  $\beta = 0$ , 并以  $k_s A_{44}$  代替  $A_{44}$ , 即可得到相应的矩阵元素。在消去  $\psi$  后,特征方程变为

$$D_{11}(k_s A_{44} - p)(\nabla^2 + \lambda_1)(\nabla^2 + \lambda_2)w = 0, \quad (34)$$

式中,  $k_s$  为剪切修正系数。通过上述类似分析,可得一阶理论与经典理论下,圆板临界屈曲载荷  $p_{cr}^F$  和  $p_{cr}^C$  间的解析关系为

$$p_{\alpha}^F = \frac{p_{cr}^C}{1 + p_{\alpha}^C / (k_s A_{44})} \quad (35)$$

一阶理论和经典理论下圆板固有频率间的解析关系仍然为式(32),此时只需令式(28)~(30)式中的  $\beta = 0$ , 并以  $k_s A_{44}$  代替  $A_{44}$ , 即

$$\begin{aligned} A &= I_0 I_1, \\ B &= (p I_1 - D_{11} I_0 - k_s A_{44} I_1) \lambda_C - k_s A_{44} I_0, \\ C &= k_s A_{44} D_{11} \lambda_C^2 - (D_{11} \lambda_C + k_s A_{44}) \lambda_C p \end{aligned}$$

对于板的自由振动,  $p = 0$ , 一阶理论和经典理论下圆板固有频率间的解析关系成为

$$\omega_F^2 = \frac{6k_s G}{\rho h^2} \left\{ \left[ 1 + \frac{h^2 \omega_C}{12} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left[ 1 + \frac{2}{k_s(1-\nu)} \right] \right] - \sqrt{\left[ 1 + \frac{h^2 \omega_C}{12} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left[ 1 + \frac{2}{k_s(1-\nu)} \right] \right]^2 - \frac{\rho h^2}{3k_s G} \omega_C^2} \right\}, \quad (36)$$

该结果与文献<sup>[11,12]</sup>结果是一致的。

### 3.2 各种理论下圆板横向振动固有频率间的解析关系

忽略转动惯性和耦合惯性, 即  $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ , 仅考虑横向振动时, 由(27)式可得 Reddy 圆板与 Kirchhoff 圆板固有频率间的解析关系为( $p = 0$ )

$$\omega_R^2 = \omega_C^2 \left( 1 + \frac{h^2}{140(1-\nu)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right) \left\| \left( 1 + \frac{17h^2}{84(1-\nu)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right) \right\}. \quad (37)$$

一阶理论和经典理论下圆板固有频率间的解析关系为

$$\omega_F^2 = \omega_C^2 \left\| \left( 1 + \frac{D}{k_s Gh} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right) \right\}. \quad (38)$$

### 3.3 关于这些解析关系的讨论

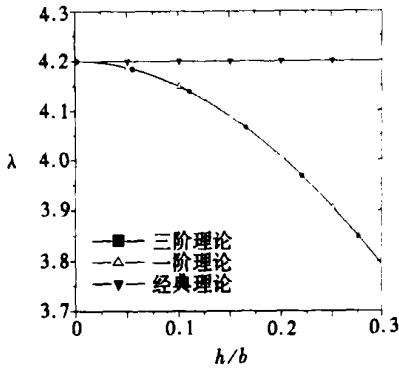
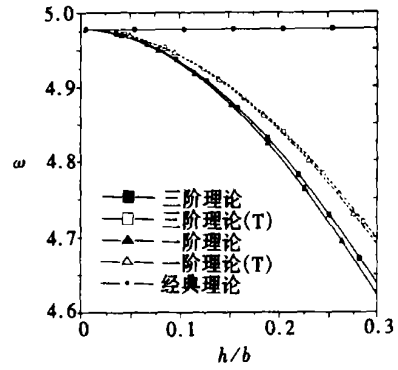
以上得到了用经典结果表示的, 一阶和三阶板理论下的圆板临界屈曲载荷和固有频率的解析表达式。比较式(31)和(35), 通过下式可把不同理论下圆板临界屈曲载荷联系起来,

$$p_{\alpha}^C = p_{cr}^F \left( 1 + \frac{p_{\alpha}^C}{k_s A_{44}} \right) = p_{cr}^R \frac{1 + 14p_{\alpha}^C / (17Gh)}{1 + p_{\alpha}^C / (70Gh)}, \quad (39)$$

同理, 比较式(37)和(38), 通过下式可把不同理论下圆板横向振动固有频率联系起来,

$$\omega_C^2 = \omega_F^2 \left( 1 + \frac{D}{k_s Gh} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C \right) = \omega_R^2 \frac{1 + \frac{17h^2}{84(1-\nu)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C}{1 + \frac{h^2}{140(1-\nu)} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_C} \quad (40)$$

方程(39)和(40)给出了不同理论下圆板临界屈曲载荷间的联系与差别, 固有频率间的联系与差别, 其中也清楚地显示了横向剪切变形对板临界屈曲载荷和固有频率的影响。图1给出了不同理论下, 简支圆板无量纲临界屈曲载荷  $\lambda = (p_{cr}^R, p_{\alpha}^F, p_{cr}^C) b^2 / D$  随板的厚度半径比  $h/b$  变化的数值结果, 其中无量纲临界载荷的经典理论结果<sup>[13]</sup>为4.20, 一阶理论和三阶理论结果几乎没有差别。图2给出了不同理论下, 简支圆板无量纲固有频率  $\omega = (\omega_R, \omega_F, \omega_C) b^2 \sqrt{\rho h / D}$  随板的厚度半径比  $h/b$  变化的数值结果, 其中无量纲固有频率的经典理论结果<sup>[14]</sup>为4.9774, 虚线表示横向振动的结果, 可见, 转动惯性和耦合惯性的影响是明显的。从(39)和(40)以及图1和图2可见, 经典理论总是高估了板的特征值。

图 1  $\lambda$  随板厚度半径比  $h/b$  的变化图 2  $\omega$  随板厚度半径比  $h/b$  的变化

## 4 结 论

基于经典板理论、一阶剪切变形板理论以及 Reddy 三阶剪切变形板理论之间, 圆板轴对称特征值问题在数学上的相似性, 本文将微分方程特征值问题的求解转化为求解一个代数方程, 导出了不同理论下圆板特征值间的解析关系。从而, 只要已知经典板的临界屈曲载荷和固有频率, 便可很容易地从这些关系中得到一阶理论和三阶理论下, 板的临界屈曲载荷和固有频率。

进一步讨论了上述关系间的联系, 比较了不同理论下板的临界屈曲载荷间的联系与差别, 固有频率间的联系与差别。清楚地显示了横向剪切变形对板的临界屈曲载荷和固有频率的影响, 可见, 经典理论总是高估板的特征值。文中所得关系便于工程应用, 同时也可用来检验一阶和三阶理论下, 板的特征值的数值结果的有效性、收敛性和准确性等。

### [参 考 文 献]

- [1] Reddy J N, Wang C M. An overview of the relationships between solutions of the classical and shear deformation plate theories[J]. Composites Science and Technology, 2000, 60(12/13): 2327—2335.
- [2] Wang C M, Lee K H. Buckling load relationship between Reddy and Kirchhoff circular plates[J]. Journal of Franklin Institute, 1998, 335(6): 989—995.
- [3] Wang C M, Reddy J N. Buckling load relationship between Reddy and Kirchhoff plates of polygonal shape with simply supported edges[J]. Mechanics Research Communications, 1997, 24(1): 103—108.
- [4] Wang C M, Kitipornchai S, Xiang Y. Relationships between buckling loads of Kirchhoff, Mindlin, and Reddy polygonal plates on Pasternak foundation[J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1997, 123(11): 1134—1137.
- [5] Wang C M, Kitipornchai S, Reddy J N. Relationship between vibration frequencies of Reddy and Kirchhoff polygonal plates with simply supported edges[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 2000, 122(1): 77—81.
- [6] Cheng Z Q, Kitipornchai S. Exact eigenvalue correspondences between laminated plate theories via membrane vibration[J]. International Journal of Solids and Structure, 2000, 37(16): 2253—2264.
- [7] Ma L S, Wang T J. Relationships between the solutions of axisymmetric bending and buckling of functionally graded circular plates based on the third\_order plate theory and the classical solutions of isotropic circular plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(1): 85—101.

- [8] Reddy J N. A simple higher\_order theory for laminated composite plates[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1984, **51**(4): 745—752.
- [9] Wang C M. Discussion on “ Postbuckling of moderately thick circular plates with edge elastic restraint” [J]. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 1996, **122**(2): 181—182.
- [10] Pnueli D. Lower bounds to the gravest and all higher frequencies of homogeneous vibrating plates of arbitrary shape[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1975, **42**(4): 815—820.
- [11] Wang C M. Vibration frequencies of simply supported polygonal sandwich plates via Kirchhoff solutions[J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, **190**(2): 255—260.
- [12] Wang C M. Natural frequencies formula for simply supported Mindlin plates[J]. ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1994, **116**(4): 536—540.
- [13] Timoshenko S P, Gere J M. Theory of Elastic Stability [M]. New York McGraw\_Hill, 1961, 226.
- [14] Timoshenko S, Young D H W, Weaver J R. Vibration Problems in Engineering [M]. New York: John Wiley & Sons, 1974, 124.

## Analytical Relations Between the Eigenvalues of Circular Plate Based on Various Plate Theories

MA Lian\_sheng, WANG Tie\_jun

(Department of Engineering Mechanics, MOE Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P.R.China)

**Abstract:** Based on the mathematical similarity of the axisymmetric eigenvalue problems of a circular plate between the classical plate theory (CPT), the first\_order shear deformation plate theory (FPT) and the Reddy's third\_order shear deformation plate theory (RPT), analytical relations between the eigenvalues of circular plate based on various plate theories are investigated. The eigenvalue problem was transformed to solve an algebra equation. Analytical relationships that were expressed explicitly between various theories were presented. Therefore, from these relationships obtained one can easily obtain the exact RPT and FPT solutions of critical buckling load and natural frequency for a circular plate with CPT solutions. The relationships are useful for engineering application, and can be used to check the validity, convergence and accuracy of numerical results for the eigenvalue problem of plates.

**Key words:** classical plate theory; shear deformation plate theory; eigenvalue; buckling; natural frequency