

文章编号: 1000-0887(2006)03-0267-08

损伤粘弹性 Timoshenko 梁的拟 静态力学行为分析

程昌钧¹, 盛冬发^{1,2}, 李晶晶¹

(1. 上海大学 力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;

2. 福建工程学院 机电及自动化工程系, 福州 350014)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 从考虑损伤的粘弹性材料 一种卷积型本构关系出发, 应用 Timoshenko 梁的基本变形假设, 建立损伤粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为研究的数学模型. 分析了损伤粘弹性 Timoshenko 梁在阶跃载荷作用下的准静态力学行为, 在 Laplace 域中得到了挠度和损伤的解析表达式. 应用数值逆变换技术, 考察了材料粘性参数对梁的挠度和损伤的影响, 得到不同时刻损伤和挠度随时间的变化曲线

关键词: 损伤粘弹性固体; Timoshenko 梁; 拟静态力响应

中图分类号: O345 **文献标识码:** A

引 言

粘弹性材料是自然界广泛存在的一类材料, 例如聚合物, 复合材料, 岩石, 混凝土等. 同时, 工程中所用的材料, 有的在自然状态下就是一种明显的多孔介质, 如混凝土, 木材, 石料和陶瓷等; 有的材料由于冷热加工过程, 载荷与温度的变化, 化学和射线的作用以及其它多种环境的影响, 使材料内部存在和产生微观的以至宏观的缺陷, 造成材料力学性能的逐步劣化, 从而使结构强度明显削弱, 寿命缩短. 所以通常材料的劣化_损伤是不可避免的, 这早就引起材料科学, 力学, 工程设计和生产部门工作者的相当重视.

对粘弹性 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的静、动力学行为的研究常常采用 Galerkin 方法, 其本构关系多为微分型^[1], Boltzmann 叠加原理^[2]或 Leademan 本构关系^[3]. 但对于线性的 Timoshenko 梁的拟静态和动态问题可以采用 Laplace 变换技术使问题转化到拉氏空间中进行求解, 然后进行 Laplace 逆变换或数值 Laplace 逆变换, 得到原问题的解. Akoz 和 Kadioglu^[2] 利用对应原理和数值 Laplace 逆变换方法讨论了线性粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为. 朱正佑等^[4] 利用粘弹性材料的三维分数导数型本构关系, 分析粘弹性 Timoshenko 梁的在阶跃载荷作用下的准静态力学行为, 得到了问题的精确表达式, 并考察了一些材料参数对梁的变形的影响. 本文既考虑材料的粘性, 同时又计及材料的损伤, 从材料的 Boltzmann 本构定律^[5,6] 和考虑

收稿日期: 2004_04_20; 修订日期: 2005_11_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50278051); 上海市重点学科建设项目(Y0103)

作者简介: 程昌钧(1937), 女, 重庆人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: + 86_21_56331454; Fax: + 86_21_36033287; E_mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn)

空洞损伤的线弹性本构规律^[7]出发,建立了损伤粘弹性铁木辛柯梁拟静态的运动微分方程,并应用 Jacobi 多项式作正交函数系的数值逆变换方法,在数值上分析了拟静态的损伤粘弹性 Timoshenko 梁丰富的准静态力学行为,考察了材料参数对损伤粘弹性 Timoshenko 梁准静态力学行为的影响

1 损伤粘弹性固体的动力学方程

设 u_i 、 i_j 、 \bar{j} 和 D 分别是损伤粘弹性体的位移、应变、应力分量及损伤变量,它们均是坐标 x_i 和 t 时间的函数 根据连续介质力学的基本规律,它们满足如下方程

运动微分方程

$$\bar{j}_{,j} + f_i - u_i = 0, \tag{1}$$

$$kD - D\ddot{u} + D + (D - D^0) - kk + l = 0 \tag{2}$$

几何方程

$$ij = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{3}$$

本构方程^[7,8]

$$\bar{j} = C_1 ij + C_2 kk ij - (D - D^0) ij, \tag{4}$$

上式中 C_1 和 C_2 为粘弹性材料的性质函数^[9],它们和蠕变函数 J_1 和 J_2 的关系为 $C_1 = L^{-1}[1/(s^2J_1)]$, $C_2 = L^{-1}[(J_1 - J_2)/s^2J_1(J_1 + 2J_2)]^{[9]}$ 式中, $(\bar{\quad})$ 和 L^{-1} 分别表示 Laplace 变换和逆变换, s 是变换参数 符号 $\bar{\quad}$ 是 Boltzmann 算子,定义为

$$\bar{1}(t) \quad \bar{2}(t) = \bar{1}(0^+) \bar{2}(t) + \bar{1}(t) * \bar{2}(t) = \bar{1}(0^+) \bar{2}(t) + \int_0^t \bar{1}(t - \tau) \bar{2}(\tau) d\tau,$$

在(1)式~(4)式中, f_i 为已知体积力, ρ 为参考构形的已知密度, k 为已知平衡惯量, l 是已知外在平衡体积力, γ , β , δ 为材料的特征常数, D^0 是初始损伤

2 损伤粘弹性 Timoshenko 梁的运动微分方程

Euler-Bernoulli 梁的理论是建立咱平截面假设的基础之上,该理论对于细长梁能够给出较为精确的结果 但对于短而粗的梁,这种理论就不再适用 20 世纪 20 年代, Timoshenko 提出了梁的修正理论,保留了平截面的假设,但认为梁的横截面变形后发生了一个转角 Timoshenko 梁理论计及了横截面剪切变形和转动惯性的影响

考虑如图 1 所示的梁,设 Ox 轴为截面的中性轴, Oy , Oz 轴为截面的惯性主轴 设梁是等截面的,横截面面积为 A ,高为 h ,长为 l ,密度为 ρ ,作用于梁的载荷平行于 yz 平面,在 xy 和 xz 平面上的分量分别记为 $q(x, t)$, $p(x, t)$

假定梁的位移场为^[10]

$$u_1 = u(x) + y \theta(x) + z \phi(x), \quad u_2 = v(x), \quad u_3 = w(x), \tag{5}$$

其中, θ 和 ϕ 是绕 z -轴和 y -轴的转动角 在小变形的假设下,相应地应变分量为

$$\epsilon_x = \frac{u}{x} + y \frac{\theta}{x} + z \frac{\phi}{x}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left[\frac{v}{x} + \frac{w}{y} \right], \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left[\frac{w}{x} + \frac{v}{z} \right], \tag{6}$$

这时,由(4)和(6)式可得

$$\begin{cases} \epsilon_x = (C_1 + C_2) \left[\frac{u}{x} + y \frac{\theta}{x} + z \frac{\phi}{x} \right] - D, \\ \epsilon_{xy} = C_1 \left[\frac{v}{x} + \frac{w}{y} \right], \quad \epsilon_{xz} = C_1 \left[\frac{w}{x} + \frac{v}{z} \right] \end{cases} \tag{7}$$

容易求得内力分量的表达式

$$\begin{aligned}
 T_x &= \int_A \sigma_x dA = \int_A \left[(C_1 + C_2) \left(\frac{u}{x} + y \frac{v}{x} + z \frac{w}{x} \right) - \mathcal{D} \right] dA = \\
 & A \left[(C_1 + C_2) \frac{u}{x} - \mathcal{D} \right] dA, \\
 Q_y &= \int_A \sigma_{xy} dA = \frac{1}{2} \int_A C_1 \left[\frac{v}{x} + \frac{w}{x} \right] dA = \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{v}{x} + \frac{w}{x} \right], \\
 Q_z &= \int_A \sigma_{xz} dA = \frac{1}{2} \int_A C_1 \left[\frac{w}{x} + \frac{v}{x} \right] dA = \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{w}{x} + \frac{v}{x} \right], \\
 M_y &= \int_A \sigma_{xz} z dA = \int_A \left[(C_1 + C_2) \left(\frac{u}{x} + y \frac{v}{x} + z \frac{w}{x} \right) - \mathcal{D} \right] z dA = \\
 & I_y (C_1 + C_2) \frac{u}{x} - \mathcal{D} z dA, \\
 M_z &= \int_A \sigma_{xy} y dA = \int_A \left[(C_1 + C_2) \left(\frac{u}{x} + y \frac{v}{x} + z \frac{w}{x} \right) - \mathcal{D} \right] y dA = \\
 & I_z (C_1 + C_2) \frac{u}{x} - \mathcal{D} y dA,
 \end{aligned}$$

这里 T_x 、 Q_y 、 Q_z 分别表示横截面上沿坐标 Ox 、 Oy 、 Oz 轴方向的拉伸和剪切内力; M_y 、 M_z 分别表示绕 Oy 、 Oz 轴的内弯矩 A 为横截面的面积; I_y 、 I_z 分别为横截面对 Oy 、 Oz 轴的惯性矩, 它们分别定义为: $I_y = \int_A z^2 dA$, $I_z = \int_A y^2 dA$, \mathcal{D} 为剪切修正系数; $\mathcal{D} = D - D_0$ 为损伤增量 由 Timoshenko 梁微元的平衡, 不难求出其运动微分方程

$$\begin{cases} \frac{T_x}{x} = Au, \quad \frac{Q_y}{x} + T_x \frac{2v}{x^2} + q = Av, \quad \frac{M_z}{x} - Q_y = I_z, \\ \frac{Q_z}{x} + T_x \frac{2w}{x^2} + p = Aw, \quad \frac{M_y}{x} - Q_z = I_y \end{cases} \quad (8)$$

将力的各表达式代入(8), 可得到用位移 $u(x, t)$, $v(x, t)$, $w(x, t)$, 转动 $\theta(x, t)$, $\phi(x, t)$ 和损伤增量 $\mathcal{D}(x, t)$ 表示的损伤线性粘弹性 Timoshenko 梁的位移形式的运动微分方程

$$\begin{cases} A(C_1 + C_2) \frac{2u}{x^2} - \int_A \frac{\mathcal{D}}{x} dA = Au, \\ \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{2v}{x^2} + \frac{w}{x} \right] + T_x \frac{2v}{x^2} + q = Av, \\ I_z(C_1 + C_2) \frac{2u}{x^2} - \int_A \frac{\mathcal{D}}{x} y dA - \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{v}{x} + \frac{w}{x} \right] = I_z, \\ \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{2w}{x^2} + \frac{v}{x} \right] + T_x \frac{2w}{x^2} + p = Aw, \\ I_y(C_1 + C_2) \frac{2u}{x^2} - \int_A \frac{\mathcal{D}}{x} z dA - \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{w}{x} + \frac{v}{x} \right] = I_y \end{cases} \quad (9)$$

损伤增量 \mathcal{D} 的运动微分方程为

$$-k\mathcal{D} = -\mathcal{D} \cdot \ddot{u} + \mathcal{D} + \mathcal{D} - \left[\frac{u}{x} + y \frac{v}{x} + z \frac{w}{x} \right] + l \quad (10)$$

梁的边界条件一般给定如下

- 1) 端部自由: 在 $x = 0$ 或 $x = l$ 处有端部条件

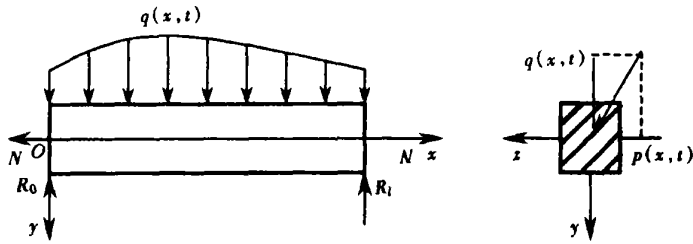


图 1 Timoshenko 梁示意图

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = 0, \quad \frac{1}{x} = 0, \quad \frac{1}{2} C_1 \left[\frac{v}{x} + \right] - N \frac{v}{x} = 0, \\ \frac{2}{2} C_1 \left[\frac{w}{x} + \right] - N \frac{w}{x} = 0, \quad \frac{D}{x} = 0 \end{cases} \quad (11a)$$

2) 端部简支: 在 $x = 0$ 或 $x = l$ 处有端部条件

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad / x = 0, \quad / x = 0, \quad D = 0 \quad (11b)$$

3) 端部固定: 在 $x = 0$ 或 $x = l$ 处有端部条件

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad = 0, \quad = 0, \quad D = 0 \quad (11c)$$

梁的初始条件

设粘弹性物体初始时 ($t < 0$) 处于自然状态, 且当 $t = 0$ 时满足如下初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u^0, \quad u|_{t=0} = u^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \quad v|_{t=0} = v^0, \\ w|_{t=0} = w^0, \quad w|_{t=0} = w^0, \quad |_{t=0} = 0, \quad |_{t=0} = 0, \quad |_{t=0} = 0, \\ |_{t=0} = 0, \quad D|_{t=0} = 0, \quad D|_{t=0} = D^0 \end{cases} \quad (12)$$

其中, $u^0, u^0, v^0, v^0, w^0, w^0, 0, 0, 0, 0, D^0, D^0$ 是 x 的已知函数 微分方程和边界与初始条件(9)~(12)构成了损伤线性粘弹性 Timoshenko 梁动力学行为的初边值问题

3 梁的拟静态行为

3.1 梁的拟静态行为的数学模型和拉氏数值反变换

考察简支损伤粘弹性 Timoshenko 梁在准静态情况下的力学行为 设梁受到均布载荷 $q(x, t) = q_0 H(t)$ 的作用, 这里 q_0 为常数, $H(t)$ 是单位 Heaviside 函数 则弯曲只发生在 xy 平面内, 因而 $= 0, w = 0$, 若不受轴力作用, 故可认为位移 $u = 0$ 此时损伤增量可假设为坐标 y 三次函数, 即

$$D(x, y, z, t) = D(x, t) \left[\frac{y^3}{3} - \frac{h^2}{4} y \right],$$

因此, (9) 式简化为

$$\begin{cases} \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{2v}{x^2} + \frac{1}{x} \right] + q = 0, \\ I_z (C_1 + C_2) \frac{2}{x^2} + \frac{Ah^4}{60} \frac{D}{x} - \frac{A}{2} C_1 \left[\frac{v}{x} + U \right] = 0 \end{cases} \quad (13)$$

损伤 $D(x, t)$ 的运动微分方程为

$$- A \frac{5^2 D}{5x^2} + \frac{D}{x} + \frac{84B}{17h^2} \frac{5U}{5x} = 0 \quad (14)$$

其边界条件由(11b)可写为

$$v(x, t) = 0, \frac{5U}{5x} = 0, \bar{D} = 0 \quad (x = 0, l) \quad (15)$$

利用弹性与粘弹性的对应原理, 得到在 Laplace 变换域中损伤粘弹性 Timoshenko 梁满足的方程

$$\begin{cases} \frac{EA}{2} s C_1(s) \left[\frac{5^2 v}{5x^2} + \frac{5U}{5x} \right] + \frac{q_0}{s} = 0, \\ I_z s [C_1(s) + C_2(s)] \frac{5^2 U}{5x^2} + \frac{Ah^4}{60} B \frac{5 \bar{D}}{5x} - \frac{EA}{2} s C_1(s) \left[\frac{5v}{5x} + U \right] = 0, \\ -A \frac{5^2 \bar{D}}{5x^2} + Xs \bar{D} + N\bar{D} - \frac{84B}{17h^2} \frac{5U}{5x} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $v(x, s) = \mathcal{L}[v(x, t)]$, $U(x, s) = \mathcal{L}[U(x, t)]$, $C_1(s) = \mathcal{L}[C_1(t)]$, $C_2(s) = \mathcal{L}[C_2(t)]$,

$\bar{D}(x, s) = \mathcal{L}[\bar{D}(x, t)]$ 为相应函数的 Laplace 变换# 对应的边界条件为

$$\begin{cases} v(0, s) = 0, v(l, s) = 0, \frac{5U(0, s)}{5x} = 0, \\ \frac{5U(l, s)}{5x} = 0, \bar{D}(0, s) = 0, \bar{D}(l, s) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

对于标准线性固体, 材料的松弛函数 $C_1(t) = C_1(0)[c_0 + c_1 \exp(-A_1 t)]$ # 假定材料的泊松比 $M = \text{const}$, 即 $C_2(t)/C_1(t) = M(1 - M) = M$ # 由(16)可得在 Laplace 域内损伤的微分方程为

$$\frac{5^4 \bar{D}}{5x^4} - \left[\frac{X}{A} s + \frac{N}{A} + \frac{84B^2}{85As(1+M)C_1(s)} \right] \frac{5^2 \bar{D}}{5x^2} - \frac{84q_0 B}{17h^2 I_z A s^2 (1+M)C_1(s)} = 0, \quad (18a)$$

对于上式在给定的边界条件下的解可写为

$$\bar{D} = a(s) e^{\sqrt{F(s)}x} + b(s) e^{-\sqrt{F(s)}x} + d(s) + \frac{G(s)l^2}{2} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{x}{l} \right], \quad (18b)$$

其中

$$\begin{cases} a(s) = \frac{G(s)}{(e^{\sqrt{F(s)l}} + 1)F(s)}, \quad b(s) = \frac{e^{\sqrt{F(s)l}} G(s)}{(e^{\sqrt{F(s)l}} + 1)F(s)}, \quad d(s) = -\frac{G(s)}{F(s)}, \\ F(s) = \frac{X}{As} + \frac{N}{A} + \frac{84B^2(s + A_1)}{85AC_1(0)(1+M)(s + c_{0A1})}, \\ G(s) = \frac{q_0 B(s + A_1)}{I_z s [(1+M)C_1(0)(s + c_{0A1})(Xs + N) - B^2(s + A_1)]} \end{cases} \quad (19)$$

将(18b)代入到方程(16)的第3式中, 可得

$$\begin{aligned} v(x, s) = & \frac{q_0(s + A_1)l^2}{EA C_1(0)s(s + c_{0A1})} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{x}{l} \right] + \\ & \frac{A}{B} \left[a(s) e^{\sqrt{F(s)}x} + b(s) e^{-\sqrt{F(s)}x} + \frac{G(s)l^2}{2} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{x}{l} \right] \right] - \\ & \frac{(Xs + N)}{B} \left\{ \frac{a(s) e^{\sqrt{F(s)}x} + b(s) e^{-\sqrt{F(s)}x}}{F(s)} - \frac{d(s)l^2}{2} \frac{x}{l} \left[1 - \frac{x}{l} \right] + \right. \\ & \left. \frac{G(s)l^2}{2} \left[\frac{x^3}{6l} - \frac{x^4}{12l^2} - \frac{l}{12x} - \frac{2B^2(s + A_1)}{F(s)^2 l^2 C_1(0)(1+M)(s + c_{0A1})(Xs + N)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

求得拉氏空间中的解答后, 用数值方法作逆变换可以计算 $v(x, t)$ # 象函数 $f(t)$ 的拉氏

变换已知为 $f(s)$, 则相应的原函数 $f(t)$ 可以表示为^[7]

$$f(t) = \int_0^1 C_i \zeta_i(t), \quad (21)$$

式中 C_i 是常数; $\zeta_i(t)$ 为一组用 Jacobi 多项式表示的正交函数# 引入参量 D , 经变量代换 $x = 2\exp(-D) - 1$, 则有

$$t = -\frac{1}{D} \ln \left[\frac{1+x}{2} \right], \quad e^{-st} = \left[\frac{1+x}{2} \right]^{s/D}, \quad (22)$$

记 $g(t) = f \left[-\frac{1}{D} \ln \left[\frac{1+x}{2} \right] \right] = f(t)$, 于是, 拉氏变换式 $f(s) = \int_0^1 f(t) e^{-st} dt$ 可以写作

$$f(s) = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2D} \right] Q_{-1} \left[\frac{1+x}{2} \right]^{s/D-1} g(x) dx, \quad (23)$$

设 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 区间可展开成 Jacobi 多项式的级数, 即

$$g(x) = \int_0^1 C_n P_n^{(0, K)}(x), \quad (24)$$

式中, $P_n^{(0, K)}(x)$ 为 n 阶标准的 Jacobi 多项式, 即

$$P_n^{(0, K)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1+x)^{-K} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^n (1+x)^{n+K}] \quad (25)$$

将式(25)代入(24), 并令 $s = (K+k+1)D$ 可得

$$\mathcal{L}\{f((K+k+1)D)\} = 2^{-(K+k+1)} \int_{-1}^1 (1+x)^{K+k} \left[\int_0^1 C_n P_n^{(0, K)}(x) \right] dx, \quad (26)$$

式中, K 为一参数# 利用展式

$$(1+x)^k = \int_{-1}^1 a_r P_r^{(0, K)}(x) \quad (27)$$

和 Jacobi 多项式的正交性, 得

$$\int_{-1}^1 (1+x)^k (1+x)^{K+k} P_r^{(0, K)}(x) dx = a_r \frac{2^{K+1}}{2r+K+1}, \quad (28)$$

将 $P_r^{(0, K)}$ 表示为

$$P_r^{(0, K)}(x) = \int_0^r b_n (1+x)^n \quad (29)$$

将(29)代入(28)得到

$$a_r \frac{2^{K+1}}{2r+K+1} = \int_{-1}^1 (1+x)^{k+K} \left[\int_0^r b_n (1+x)^n \right] dx = b_0 \frac{2^{k+K+1}}{k+K+1} + b_1 \frac{2^{k+K+2}}{k+K+2} + \dots + b_r \frac{2^{k+K+r+1}}{k+K+r+1} \quad (30)$$

假设 a_r 是参量 k 的函数, 则上式可写为

$$a_r \frac{2^{K+1}}{2r+K+1} = \frac{Q_r(k)}{[k+(K+1)][k+(K+2)] \dots [k+(K+r+1)]},$$

其中, $Q_r(k)$ 是 k 的 r 阶多项式# 利用(27)和(28)可定出 $Q_r(k)$

$$Q_r(k) = 2^{k+K+1} [k-(r-1)][k-(r-2)] \dots [k-r], \quad (31)$$

将(27)代入(26), 考虑到 Jacobi 多项式的正交性, 得

$$\mathcal{L}\{f((K+k+1)D)\} = \int_0^k \frac{k(k-1) \dots (k-r+2)(k-r+1)}{(k+K+1)(k+K+2) \dots (k+K+r+1)} C_r, \quad (32)$$

式中, $k = 0, 1, 2, \dots$ 都成立# 当 $k = 0$, 该式右边应为 $C_0/(K+1)$ # 由(32)能得到相应于 k

$= 0, 1, 2, \dots$ 的一组方程, 从而求出系数 C_0, C_1, C_2, \dots 和 K 是较小的可调数, 调整 D 及 K 可改善收敛情况# 而相应的原函数可以表示为

$$f(t) = \sum_{i=0}^N C_i P_i^{(0, K)} [2\exp(-Dt) - 1], \quad (33)$$

取 $N = 10, D = 0.3, K = 0$ # 结合 (32) 和 (18)、(20) 可分别得到损伤和挠度的 Jacobi 多项式的系数, 代入 (33) 后可得到损伤和挠度随时间的变化的表达式#

3.2 数值算例

取一个等截面的粘弹性梁, 密度 $Q = 500 \text{ kg/m}^3$, 长度 $l = 4 \text{ m}$, 截面积 $A = 1 \text{ m}^2$, 高 $h = 1 \text{ m}$, 材料的常数为 $X = 1 \text{ MPa}\cdot\text{s}, A = 8 \text{ GPa}\cdot\text{m}^2, N = 12 \text{ GPa}, B = 10 \text{ GPa}, c_0 = 0.9, C_1(0) = 10 \text{ GPa}, M = 0.3$, 剪切常数 $F = 5/6$, 载荷 $q_0 = 1 \times 10^6 \text{ N/m}$ # 应用上述的数值反变换方法, 分别计算在不同的材料的粘性参数 A_1 下梁中点的挠度和损伤随时间变化的曲线#

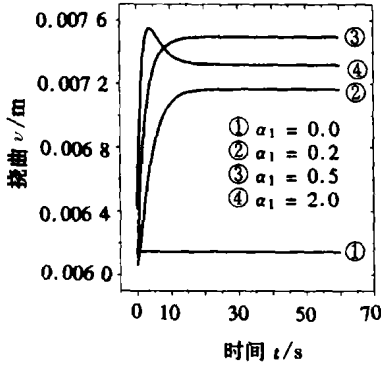


图2 $x = l/2$ 处挠度随时间变化曲线

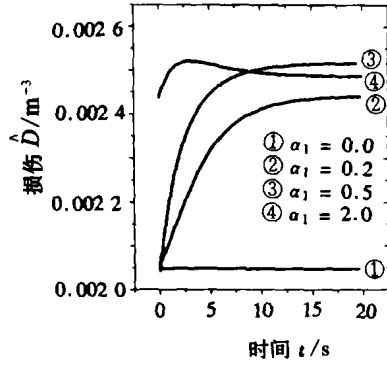


图3 $x = l/2$ 处损伤随时间变化曲线

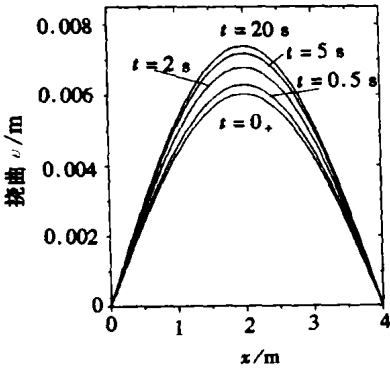


图4 $A_1 = 0.5$ 时, 不同时刻的挠度曲线

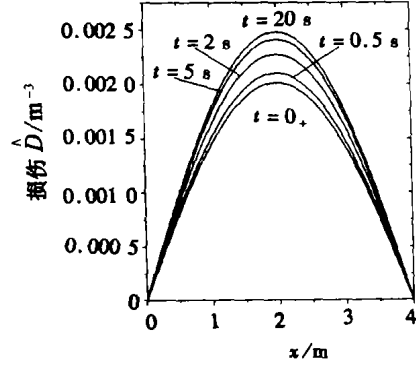


图5 $A_1 = 0.5$ 时, 不同时刻的损伤曲线

在不同的材料参数 A_1 下, 图 2 和图 3 分别示出了梁中点处的挠度和损伤随时间的变化曲线# 表明损伤和梁的挠度有相同的变化规律, 同时说明材料参数 A_1 对梁的拟静态行为的影响比较明显# 当 $A_1 = 0$ 时, 梁的挠度和损伤都不会随时间产生变化, 当 A_1 增大时, 梁的挠度和损伤增大# 但当 A_1 增大到一定值时, 由于材料粘性作用, 梁的挠度和损伤随时间减小, 最后达到稳定的平衡状态#

当 $A_1 = 0.5$ 时, 图 4 和图 5 分别给出了梁在不同时刻的挠度和损伤曲线# 说明梁在突加载荷作用下的初始一段时间挠度和损伤增大较快, 长时间的行为终将趋于一个稳态值#

[参 考 文 献]

- [1] Argyris J. Chaotic vibrations of a nonlinear viscoelastic beam[J]. Chaos Solitons Fractals, 1996, 7(1): 151) 163.
- [2] Akoz Y, Kadioglu F. The mixed finite element method for the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams[J]. Int J Numer Meth Engng, 1999, 44(12): 1909) 1932.
- [3] 陈立群,程昌钧. 非线性粘弹性柱的稳定性和混沌运动[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 890) 896.
- [4] ZHU Zheng_you, LI Gen_guo, CHENG Chang_jun. Quasi-static and dynamical analysis for viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation[J]. Appl Math Mech, 2002, 23(1): 1) 10.
- [5] YANG Ting_qing. Theory of Viscoelasticity[M]. Wuhan: Huazhong Unviersity of Science and Technology Press, 1990.
- [6] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity, An Introduction[M]. Beijing: Academic Press, 1990.
- [7] Cowin S C, Nunziato J W. Linear elastic materials with voids[J]. Journal of Elasticity, 1983, 13: 125) 147.
- [8] SHENG Dong_fa, CHENG Chang_jun, FU Ming_fu. Stress around a hole in viscoelastic body with voids[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2003, 24(1): 30) 35.
- [9] CHENG Chang_jun, ZHANG N H. Variational principles on static_dynamic analysis of viscoelastic thin plates with applications[J]. Int J Solids and Structures, 1998, 35(33): 4491) 4505.
- [10] Miller M K, Guy W T. Numerical inversion of the Laplace transform by use of Jacobi polynomials[J]. SIAM J Numer Anal, 1966, 3(4): 624) 635.

Q u a s i _ S t a t i c A n a l y s i s f o r V i s c o e l a s t i c
T i m o s h e n k o B e a m s W i t h D a m a g e

CHENG Chang_jun¹, SHENG Dong_fa^{1,2}, LI Jing_jin¹

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P R China;
2. Department of Electromechanic and Automatic Engineering,
Fujian University of Technology, Fuzhou 350014, P R China)

Abstract: Based on convolution_type constitutive equations for linear viscoelastic materials with damage and the hypotheses of Timoshenko beams, the equations governing quasi-static and dynamical behavior of Timoshenko beams with damage were first derived. The quasi-static behavior of the viscoelastic Timoshenko beam under step loading was analyzed and the analytical solution was obtained in the Laplace transformation domain. The deflection and damage curves at different time were obtained by using the numerical inverse transform and the influences of material parameters on the quasi-static behavior of the beam were investigated in detail.

Key words: viscoelastic solids with damage; Timosenko beam; quasi-static response