

文章编号: 1000-0887(2006)03-0351-06

# 任意支承梁的差分离散系统 及其刚度矩阵的振荡性\*

王其申<sup>1</sup>, 王大钧<sup>2,3</sup>

- (1. 安庆师范学院 物理与电气工程学院, 安徽安庆 246011;  
2. 北京大学 湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京 100871;  
3. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871)

(叶庆凯推荐)

摘要: 应用二阶中心差分公式, 建立了任意支承的 Euler 梁的差分离散系统, 导出了与之等效的弹簧-质点-刚杆模型。利用振荡矩阵理论, 证明了上述系统的刚度矩阵的符号振荡性, 完整的导出了正系统的充分必要条件。

关键词: Euler 梁; 差分离散系统; 刚度矩阵; 符号振荡性

中图分类号: O327; O241.3; O151.21 文献标识码: A

## 引言

考虑长为  $l$ 、线密度为  $\rho(x)$ 、截面抗弯刚度为  $S(x) = E(x)J(x)$  的 Euler 梁, 其自由无阻尼横振动的模态方程是

$$[S(x)u''(x)]' = \rho\omega^2 u(x) \quad (0 < x < l), \quad (1)$$

此处  $\omega$  是圆频率,  $u(x)$  是位移模态, “ $'$ ”表示对  $x$  的导数。为了显示方程(1)的物理意义, 我们用  $\phi$ 、 $M$ 、 $Q$  分别表示梁的横截面的转角、弯矩和剪力的幅值(为了叙述方便, 今后将省略“幅值”二字), 于是方程(1)等价于方程组

$$\phi = u'(x), \quad M = S\phi'(x), \quad Q = -M'(x), \quad \rho\omega^2 u = -Q'(x). \quad (2)$$

梁的最一般的支承方式可以统一表示为

$$[S(x)u''(x)]' \Big|_{x=0+} h_1 u(0) = 0 = [S(x)u''(x)]' \Big|_{x=l-} h_2 u(l), \quad (3)$$

$$S(0)u''(0) - \beta_1 u'(0) = 0 = S(l)u''(l) + \beta_2 u'(l), \quad (4)$$

这里  $h_r = 0 = \beta$  表示自由端;  $h_r = 0, \beta \rightarrow \infty$  表示滑支端;  $h_r \rightarrow \infty, \beta = 0$  表示铰支端;  $h_r, \beta$  同时趋于  $\infty$  表示固定端, 而  $r = 1$  或  $2$ 。

鉴于构造梁的离散模型进而证明其刚度矩阵的振荡性在研究梁的振动的定性性质以及振动的反问题等方面的重要性, Gantmakher 和 Krein 在专著<sup>[1]</sup>中建立了一套复杂的振荡矩阵和振荡核的理论, 成为研究杆、梁振动的频率和模态的定性性质的基础。Gladwell 发展了杆、梁振动

\* 收稿日期: 2004\_03\_26; 修订日期: 2005\_09\_12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60034010)

作者简介: 王其申(1947—), 男, 安徽桐城人, 教授(联系人, Tel: + 86\_556\_5500523; E\_mail: wulixi@aqtc.edu.cn)。

的定性性质的工作<sup>[2,3]</sup>。他在专著<sup>[2]</sup>中给出了一个 Euler 梁的物理离散模型,并论证了正系统的问题。何北昌和本文作者也曾研究梁振动的差分离散模型以及梁的模式定性性质<sup>[4,5]</sup>。但上述离散模型都只处理了特殊边界支承,因而还不是完善的。而关于正系统的讨论遗漏了一些重要的情形。为此,本文首先利用二阶中心差分公式建立与方程(1)相应的在最一般的边界条件下的差分离散系统,导出对应的物理离散系统,然后利用振荡矩阵理论证明这种系统的刚度矩阵的符号振荡性,同时导出上述差分离散系统为正系统的充分必要条件,完整地处理了正系统。

## 1 差分离散系统

利用函数 $f(x)$ 的如下泰勒展开式

$$f_{i+1} = f_i + f'_i l_{i+1} + f''_i l_{i+1}^2/2 + O(l_{i+1}^3), \quad f_{i-1} = f_i - f'_i l_i + f''_i l_i^2/2 + O(l_i^3), \quad (5)$$

可以导出有关函数导数的二阶中心差分公式:

$$f''_r = \frac{2}{l_r + l_{r+1}} \left[ \frac{f_{r-1} - f_r}{l_r} + \frac{f_r - f_{r+1}}{l_{r+1}} \right], \quad (6)$$

两次利用这一公式,即得梁的内点 $x_r (r = 2, \dots, n-2)$ 处的差分方程:

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho u_r = [S(x) u''(x)]' |_{x=x_r} = & \frac{4}{l_r + l_{r+1}} \left\{ \frac{s_{r-1}}{l_{r-1} l_r (l_{r-1} + l_r)} u_{r-2} - \right. \\ & \frac{1}{l_r^2} \left[ \frac{s_{r-1}}{l_{r-1}} + \frac{s_r}{l_{r+1}} \right] u_{r-1} + \left[ \frac{s_{r-1}}{l_r^2 (l_{r-1} + l_r)} + \frac{s_r}{l_r l_{r+1}} \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) + \frac{s_{r+1}}{l_{r+1}^2 (l_{r+1} + l_{r+2})} \right] u_r - \\ & \left. \frac{1}{l_{r+1}^2} \left[ \frac{s_r}{l_r} + \frac{s_{r+1}}{l_{r+2}} \right] u_{r+1} + \frac{s_{r+1}}{l_{r+1} l_{r+2} (l_{r+1} + l_{r+2})} u_{r+2} \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

此外还须考虑与边界点有关的方程,这时差分公式(6)并不完全适用,而需结合边界条件逐一加以讨论。我们首先考察左端的情况,由边条件(3)和(4)式有

$$-h_1 u(0) = [S(x) u''(x)]' |_{x=0}, \quad u'(0) = S(0) u''(0) / \beta_1.$$

于是由上式和(5)式之第1式可知

$$\begin{aligned} u_0 = \frac{2(u_1 - u_0)}{l_1(l_1 + 2s_0/\beta_1)}, \quad M_0 = \frac{2(M_1 - M_0)}{l_1^2} - \frac{2M_0}{l_1}, \\ \omega^2 \rho u_0 = M_0 = \frac{2[s_1 u_1 - s_0 u_0]}{l_1^2} - \frac{2\Phi_0}{l_1} = \\ \frac{4}{l_1^2} \left[ \left( \frac{s_0}{l_1 + \beta_1} + \frac{s_1}{l_1 + l_2} \right) \frac{u_0}{l_1} - \left( \frac{s_0}{l_1 + \beta_1} + \frac{s_1}{l_2} \right) \frac{u_1}{l_1} + \frac{s_1}{l_1 + l_2} \frac{u_2}{l_2} \right] - \frac{2\Phi_0}{l_1}, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 \rho_1 u_1 = 2 \left[ \frac{s_0 u_0}{l_1(l_1 + l_2)} - \frac{s_1 u_1}{l_1 l_2} + \frac{s_2 u_2}{l_2(l_1 + l_2)} \right] = \\ \frac{4}{l_1 + l_2} \left\{ - \left( \frac{s_0}{l_1 + \beta_1} + \frac{s_1}{l_2} \right) \frac{u_0}{l_1^2} + \left[ \frac{s_0}{l_1^2 (l_1 + \beta_1)} + \frac{s_1}{l_1 l_2} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{s_2}{l_2^2 (l_2 + l_3)} \right] u_1 - \left( \frac{s_1}{l_1} + \frac{s_2}{l_3} \right) \frac{u_2}{l_2^2} + \frac{s_2}{l_2 + l_3} \frac{u_3}{l_2 l_3} \right\}, \quad (9) \end{aligned}$$

这里,  $\Phi_0 = M_0 = [S(x) u''(x)]' |_{x=0} = -h_1 u_0, \beta_1 = 2s_0/\beta_1$ 。显然只要令 $h_1 = 0, \beta_1 = 0$ , 则(8)式和(9)式对自由端成立; 令 $h_1 = 0, \beta_1 \rightarrow \infty$ , 则(8)式和(9)式对滑支端成立。至于固支端或铰支端, 由于 $u_0 = 0$ , 相应于 $m_0$ 的运动方程成为平衡方程, 其具体形式无关紧要, 故不妨认为(8)式同样适用; 而对与 $m_1$ 相应的运动方程, 由于对固定端有 $u_0 = 0$ , 对铰支端有 $s_0 u_0 = 0$ , 这样只要在(9)式中分别令 $u_0 = 0, \beta_1 \rightarrow \infty$ 或 $u_0 = 0, \beta_1 = 0$ , (9)式也就适用于固支端和铰支

端。总之, 只要与适当的边条件相配合, (8) 式和 (9) 式就是任意支承梁的边界点处振动微分方程的差分形式。

至于梁的右端, 完全类似的可以写出

$$\omega^2 \varrho_{n-1} u_{n-1} = \frac{4}{l_{n-1} + l_n} \left\{ \frac{s_{n-2}}{l_{n-2} + l_{n-1}} \frac{u_{n-3}}{l_{n-2} l_{n-1}} - \left( \frac{s_{n-2}}{l_{n-2}} + \frac{s_{n-1}}{l_{n-1}} \right) \frac{u_{n-2}}{l_{n-1}^2} + \left[ \frac{s_{n-2}}{l_{n-1}^2 (l_{n-2} + l_{n-1})} + \frac{s_{n-1}}{l_{n-1} l_n} \left( \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) + \frac{s_n}{l_n^2 (l_n + \beta_2)} \right] u_{n-1} - \left( \frac{s_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{s_n}{l_n + \beta_2} \right) \frac{u_n}{l_n^2} \right\}, \quad (10)$$

$$\omega^2 \varrho_n u_n = \frac{2 \Phi_{n+1}}{l_n} + \frac{4}{l_n^2} \left[ \frac{s_{n-1}}{l_{n-1} + l_n} \frac{u_{n-2}}{l_{n-1}} - \left( \frac{s_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{s_n}{l_n + \beta_2} \right) \frac{u_{n-1}}{l_n} + \left( \frac{s_{n-1}}{l_{n-1} + l_n} + \frac{s_n}{l_n + \beta_2} \right) \frac{u_n}{l_n} \right], \quad (11)$$

此处  $\Phi_{r+1} = h_2 u_n$ ,  $\beta_2 = 2s_n/\beta_2$ 。(7) 式 ~ (11) 式就是梁的横振动的差分方程组。若记  $\lambda = \omega^2$  并引入变换

$$\begin{cases} k_r = 2s_r/(l_r + l_{r+1}), & m_r = \varrho(l_r + l_{r+1})/2 \quad (r = 1, \dots, n-1), \\ k_0 = 2s_0/l_1, & k_n = 2s_n/l_n, & m_0 = \varrho l_1/2, & m_n = \varrho l_n/2, \\ k_0^* = k_0/(1 + 2s_0/\beta_1 l_1), & k_n^* = k_n/(1 + 2s_n/\beta_2 l_n), \end{cases} \quad (12)$$

则上述方程组将变换为

$$\lambda m_0 u_0 = \frac{k_0^* + k_1}{l_1^2} u_0 - \left[ \frac{k_0^*}{l_1^2} + \frac{k_1}{l_1} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] u_1 + \frac{k_1}{l_1 l_2} u_2 - \Phi_0, \quad (13)$$

$$\lambda m_1 u_1 = - \left[ \frac{k_0^*}{l_1^2} + \frac{k_1}{l_1} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \right] u_0 + \left[ \frac{k_0^*}{l_1^2} + \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)^2 k_1 + \frac{k_2}{l_2^2} \right] u_1 - \left[ \frac{k_1}{l_2} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + \frac{k_2}{l_2} \left( \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right) \right] u_2 + \frac{k_2}{l_2 l_3} u_3, \quad (14)$$

$$\lambda m_r u_r = \frac{k_{r-1}}{l_{r-1} l_r} u_{r-2} - \left[ \left( \frac{1}{l_{r-1}} + \frac{1}{l_r} \right) \frac{k_{r-1}}{l_r} + \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) \frac{k_r}{l_r} \right] u_{r-1} + \left[ \frac{k_{r-1}}{l_r^2} + \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right)^2 k_r + \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}^2} \right] u_r - \left[ \left( \frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) \frac{k_r}{l_{r+1}} + \left( \frac{1}{l_{r+1}} + \frac{1}{l_{r+2}} \right) \frac{k_{r+1}}{l_{r+1}} \right] u_{r+1} + \frac{k_{r+1}}{l_{r+1} l_{r+2}} u_{r+2} \quad (r = 2, \dots, n-2), \quad (15)$$

$$\lambda m_{n-1} u_{n-1} = \frac{k_{n-2}}{l_{n-2} l_{n-1}} u_{n-3} - \left[ \left( \frac{1}{l_{n-2}} + \frac{1}{l_{n-1}} \right) \frac{k_{n-2}}{l_{n-1}} + \left( \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) \frac{k_{n-1}}{l_{n-1}} \right] u_{n-2} + \left[ \frac{k_{n-2}}{l_{n-1}^2} + \left( \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right)^2 k_{n-1} + \frac{k_n^*}{l_n^2} \right] u_{n-1} - \left[ \left( \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) \frac{k_{n-1}}{l_n} + \frac{k_n^*}{l_n^2} \right] u_n, \quad (16)$$

$$\lambda m_n u_n = \frac{k_{n-1}}{l_{n-1} l_n} u_{n-2} - \left[ \left( \frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) \frac{k_{n-1}}{l_n} + \frac{k_n^*}{l_n^2} \right] u_{n-1} + \frac{k_{n-1} + k_n^*}{l_n^2} u_n + \Phi_{n+1}. \quad (17)$$

容易验证, 上述方程组恰好是图 1 所示弹簧-质点-刚杆系统的运动方程组<sup>[3]</sup>。图中  $\{m_r\}_0^n$ ,

$\{k_r\}_0^n, \{l_r\}_1^n$  分别表示质点质量、弹簧刚度和刚杆长度, 方程组中的  $\{u_r\}_0^n$  则是第  $r$  个质点的模态值。这个系统就是 Euler 梁的差分离散系统的物理模型。鉴于这一物理模型及其相应方程组 (13) ~ (17) 的形式简单, 物理意义清晰, 加之从它们出发讨论问题易于应用已有结果, 所以下文我们将直接依据上述物理模型来进行。

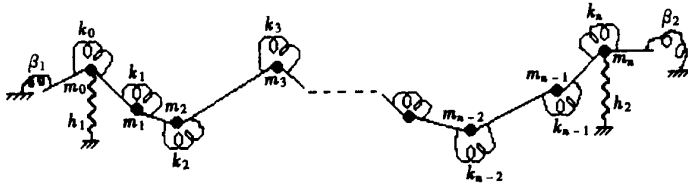


图 1 梁的弹簧\_质点\_刚杆模型

为了便于应用振荡矩阵的理论, 把方程组 (13) ~ (17) 改写为矩阵形式。仿照 (2) 式可以定

义

$$\begin{cases} \theta_r = (u_r - u_{r-1})/l_r \quad (r = 1, \dots, n), & w_r = \theta_{r+1} - \theta_r \quad (r = 0, \dots, n), \\ \tau_r = k_r w_r \quad (r = 0, \dots, n), & \phi_r = (\tau_{r+1} - \tau_r)/l_r \quad (r = 1, \dots, n), \end{cases} \quad (18)$$

这样定义的  $\tau_r$  正好是弯矩在相应分点处的差分量, 但  $\theta_r$  和  $\phi_r (r = 1, \dots, n)$  则分别是连接  $m_{r-1}$  和  $m_r$  的刚杆的转角和剪力的相应差分量的一级近似值。又  $\theta_0$  和  $\theta_{n+1}$  是梁的左、右两侧端部杆的转角。利用这些定义, 方程组 (13) ~ (17) 可以简单地表示为

$$\lambda m_r u_r = \phi_r - \phi_{r+1} \quad (r = 0, \dots, n), \quad (19)$$

对各种支承可取相应的边界条件。例如在梁左端, 固支:  $u_0 = \theta_0 = 0$ , 铰支:  $u_0 = \beta_1 = 0$ , 滑支:  $\theta_0 = \phi_0 = 0$ , 自由:  $\beta_1 = \phi_0 = 0$ 。这里  $\phi_0$  代表端点处的横向支反力。

为了便于应用振荡矩阵的理论, 把方程 (19) 进一步改写成向量形式。为此, 记

$$\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n)^T, \quad \boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T, \quad \boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_n)^T, \quad \boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$$

系统的质量矩阵  $\mathbf{M} = \text{diag}(m_0, \dots, m_n)$ , 刚度矩阵  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_0, \dots, k_n)$ ,  $\mathbf{L} = \text{diag}(l_1, \dots, l_n)$ ,  $n \times (n+1)$  阶矩阵  $\mathbf{E}$ 、 $n+1$  阶方阵  $\tilde{\mathbf{E}}$ 、 $(n+1)$  阶向量  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^{n+1}$  分别是

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{E}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}^1 &= (1, 0, \dots, 0)^T, \quad \mathbf{e}^{n+1} = (0, 0, \dots, 1)^T, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

于是方程 (19) 可以表示为

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{M} \mathbf{u} &= -\mathbf{E}^T \boldsymbol{\phi} - \phi_0 \mathbf{e}^1 + \phi_{n+1} \mathbf{e}^{n+1} = \\ & \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} (k_0 \theta_0 \mathbf{e}^1 - k_n \theta_{n+1} \mathbf{e}^{n+1}) + h_1 u_0 \mathbf{e}^1 - h_2 u_n \mathbf{e}^{n+1}, \end{aligned} \quad (21)$$

这里矩阵

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{K} \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}. \quad (22)$$

利用边界条件(3)、(4)式有

$$\theta_0 = \frac{S(0)u''(0)}{\beta_1} = \beta_1 \frac{u_1 - u_0}{l_1 + \beta_1}, \quad \theta_{n+1} = \frac{S(l)u''(l)}{\beta_2} = \beta_2 \frac{u_{n-1} - u_n}{l_n + \beta_2},$$

以此代入(21)式消去右端第2项, 向量形式的运动方程则将简化为

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u} + h_1 u_0 \mathbf{e}^1 + h_2 u_n \mathbf{e}^{n+1}, \quad (23)$$

这里  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{A}$  的差别仅在于把  $\mathbf{A}$  中的  $k_0, k_n$  换成(12)式中的  $k_0^*$  与  $k_n^*$ 。即

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{K} \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}, \quad (24)$$

其中  $\mathbf{K} = \text{diag}(k_0^*, k_1, \dots, k_{n-1}, k_n^*)$ 。下面从(23)式出发来讨论梁的离散系统的振荡特性。

## 2 刚度矩阵的符号振荡性

依据文<sup>[1]</sup>所给出的定义, 不难看出, 若  $\mathbf{E}$  由(20)式所定义, 因为  $\mathbf{E}^*$  的任意子式均为上三角阵或下三角阵而其主对角元素仅为0或1, 则  $\mathbf{E}^*$  为完全非负矩阵。记  $\mathbf{B} = \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}$ , 因为非负矩阵相乘仍是非负矩阵, 所以  $\mathbf{B}^* = (\mathbf{E}^T)^* \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E}^*$  是完全非负矩阵。

现在记  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}_0^n$ ,  $\mathbf{A}_1 = \{a_{ik}\}_1^n$ ,  $\mathbf{A}_n = \{a_{ik}\}_0^{n-1}$ ,  $\mathbf{A}_{1n} = \{a_{ik}\}_1^{n-1}$ 。以上讨论表明,  $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^* \mathbf{K} \mathbf{B}^*$  是完全非负矩阵。作为  $\mathbf{A}^*$  的截断矩阵,  $\mathbf{A}_1^*$ 、 $\mathbf{A}_n^*$ 、 $\mathbf{A}_{1n}^*$  当然也是完全非负矩阵。直接检验发现,  $\det \mathbf{A} = 0$ ,  $\det \mathbf{A}_{1n} > 0$ ,  $a_{r, r+1} = a_{r+1, r} < 0$ , 当  $k_0^*$  与  $k_n^*$  之一大于0时,  $\det \mathbf{A}_1 > 0$ ,  $\det \mathbf{A}_n > 0$ 。

为了进一步证明方程(23)的刚度矩阵的正定性, 把方程(23)改写为

$$\lambda \mathbf{M} \mathbf{u} = \mathbf{C} \mathbf{u},$$

此处刚度矩阵  $\mathbf{C} = \{c_{ik}\}_0^n$  的元素与  $\mathbf{A} = \{a_{ik}\}_0^n$  的元素之间的关系是:  $c_{00} = a_{00} + h_1$ ,  $c_{nn} = a_{nn} + h_2$ , 其余的  $c_{ik} = a_{ik}$ 。这样  $\mathbf{C}^*$  是完全非负矩阵。又由行列式按一列展开定理, 得到以下展开式

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + h_1 \det \mathbf{A}_1 + h_1 h_2 \det \mathbf{A}_{1n}, \quad (\text{当 } h_1 > 0 \text{ 时})$$

或

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + h_2 \det \mathbf{A}_n + h_1 h_2 \det \mathbf{A}_{1n}. \quad (\text{当 } h_2 > 0 \text{ 时}),$$

由此我们断定

1) 当  $h_1 + h_2 > 0$ ,  $\beta_1 + \beta_2 > 0$  时, 总有  $h_1 \det \mathbf{A}_1 > 0$  或者  $h_2 \det \mathbf{A}_n > 0$ , 这样  $\det \mathbf{C} > 0$ , 从而  $\mathbf{C}$  是符号振荡矩阵<sup>[3]</sup>。其全部特征值大于0。相应的系统称为正系统。

2) 当  $h_1 \cdot h_2 > 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  时, 尽管  $k_0^* = k_n^* = 0$ , 仍有  $\det \mathbf{C} > 0$ , 从而  $\mathbf{C}$  是符号振荡矩阵。相应系统也是正系统。

反之, 当  $h_1, h_2$  之一为0同时  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  或  $h_1, h_2$  同时为0时, 必有  $\det \mathbf{C} = 0$ 。这时, 系统存在一个或者两个零频率。对于这类系统, 当其边界参数  $h_1, h_2$  和  $\beta_1, \beta_2$  仅取特殊值(0,  $\infty$ ), 例如自由-自由梁等, 这时可以运用变换  $\tau = \mathbf{K} \mathbf{E}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{u}$  将其转换为共轭系统<sup>[6]</sup>, 所得共轭系统是正系统, 其固有频率和原系统的非零固有频率相同, 其模态和原系统的非零弯矩模态相同。

## 3 结 论

我们应用二阶中心差分公式, 建立了任意支承方式下 Euler 梁的差分离散系统, 导出了与之等效的弹簧-质点-刚杆这一物理模型。而差分离散系统比物理模型更具理论意义, 从它出发, 可以运用差分理论, 讨论离散系统的收敛性和误差问题。针对这个系统证明了刚度矩阵的

符号振荡性。与已有文献相比,这里所得结果的适用范围要广得多,不仅适用于由固定、铰支、滑支和自由这4种支承方式所组成的梁,更包括了两端由约束角位移的旋转弹簧和约束线位移的横向弹簧所构成的各种支承方式。

从本文的结果出发,根据振荡矩阵理论,可以得到任意支承梁的差分离散系统具有一系列关于固有频率和模态的定性性质。

### [参 考 文 献]

- [1] Гантма хер Ф Р, Крейн М Г. Осци лляционные Матрицы и Ядра и Ма лье Ко лбаия Механических Систем [M]. Москва: Государственный Издательство Технико\_Теоретической Литературы, 1950, 90—170.
- [2] Gladwell G M L. Inverse Problems in Vibrating [M]. Boston: Martinus Nijhoff Publishers, 1986, 23—26, 219—225.
- [3] Gladwell G M L. Qualitative properties of vibration systems[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1985, 401: 299—315.
- [4] 何北昌,王大钧,王其申. Euler 梁有限差分模型的振动逆问题[J]. 振动工程学报, 1989, 2(2): 1—9.
- [5] 王其申,何北昌,王大钧. Euler 梁的模态和频谱的一些定性性质[J]. 振动工程学报, 1990, 3(4): 58—66.
- [6] WANG Da\_jun, Chon C S, WANG Qi\_shen. Qualitative properties of frequencies and modes of beams modeled by discrete systems[J]. The Chinese J of Mechanics, Series A, 2003, 19(1): 169—175.

## Difference Discrete System of the Euler Beam With Arbitrary Supports and Sign Oscillatory Property of Stiffness Matrices

WANG Qi\_shen<sup>1</sup>, WANG Da\_jun<sup>2,3</sup>

(1. Department of Physics, Anqing Teachers College Anqing, Anqing, Anhui 246011, P. R. China;

2. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Peking University, Beijing 100871, P. R. China;

3. Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

**Abstract:** The difference discrete system of Euler beam with arbitrary supports was constructed by using the two order central difference formulas. This system is equivalent to the spring mass point rigid rod model. By using the theory about oscillatory matrix, the sign oscillatory property of stiffness matrices of this system was proved, and necessary and sufficient condition for the system to be positive is obtained completely.

**Key words:** Euler beam; difference discrete system; stiffness matrix; sign oscillatory property