

# 非均匀温度场中组合热超弹性球体的 动态孔穴生成\*

程昌钧<sup>1,2</sup>, 梅波<sup>1,2</sup>

(1. 上海大学 力学系, 上海 200072;  
2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 在有限变形动力学的框架下, 研究了在非均匀温度场中组合热超弹性球体, 在表面均布拉伸死载荷作用下的动态孔穴的生成和增长问题. 首先建立了相应的非线性数学模型, 利用换元积分方法求得了孔穴半径与外加载荷之间的一个精确的微分关系, 并进行了数值计算, 得到了不同温度下球体中孔穴生成时的临界载荷和分叉曲线. 考察了参数对孔穴生成与增长的影响, 并与相应的静态结果进行了比较. 结果表明孔穴是以一个有限的半径突然出现的, 且随时间的演变孔穴半径呈现周期性的非线性振动; 当温度升高, 临界值降低, 同时在相同的条件下动态临界载荷低于静态临界载荷.

关键词: 组合热超弹性球体; 非均匀温度场; 动态的孔穴生成和增长; 非线性的周期振动; 温度的影响

中图分类号: O343 文献标识码: A

## 引 言

孔穴的生成和增长或者孔穴分岔现象是材料失稳的一个基本特征, 是材料破坏的先兆而受到人们的广泛关注<sup>[1]</sup>. 孔穴生成现象最初是 Gent 和 Lindley<sup>[2]</sup>于 1958 年在拉伸均匀密实的硫化橡胶圆柱体的试验中发现的. Williams 和 Schapery<sup>[3]</sup>于 1965 年在对橡胶球体的类似实验中也观察到孔穴的突然生成现象, 此后许多类似的现象陆续被发现. 孔穴的非线性理论是从 1982 年 Ball 的工作开始的, Ball<sup>[4]</sup>建立了这类问题的理论框架, 找到了一类存在分岔解的超势函数, 给出了孔穴萌生的条件. Horgan 和 Abeyaratne<sup>[5]</sup>于 1986 年分析了超弹性材料中预存微孔在外加载荷作用下的突然增长问题, 并将此描述成一个分叉问题. 此后, Horgan 和 Polignone<sup>[6]</sup>对超弹性材料中的孔穴生成问题做了综述性的评论. 关于超弹性材料中的动力学问题, Kowles<sup>[7]</sup>分析了不可压圆柱体的振动问题, Guo 和 Sulecki<sup>[8]</sup>, Calderer<sup>[9]</sup>等人研究了球体和球壳的振动问题, 着重分析了产生周期性运动的条件. Chou\_Wang 和 Horgan<sup>[10]</sup>分析了 neo-Hookean 材料球体受到表面突加载荷动态孔穴生成问题, 指出外加载荷大于临界值时, 球体中存在一个

\* 收稿日期: 2004\_06\_30; 修订日期: 2005\_12\_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科建设项目(Y0103)

作者简介: 程昌钧(1937—), 女, 重庆人, 教授、博士生导师(联系人. Tel: + 86\_21+ 56331454; Fax: + 86\_21\_36033287; E\_mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn).

内部孔穴的分叉解. 最近, 任和程<sup>[11, 12]</sup>分析了一种横观各向异性超弹性材料中孔穴的动态生成问题, 指出物体的周期性运动和各向异性程度有关.

由于橡胶、聚合物等材料经常在高温和有限制的环境中使用, 在这种情况下必须考虑材料的热力学性能. 非线性热超弹性材料的本构模型由热弹性势能描述, 最新进展见 Casey<sup>[13]</sup>, 其中, 所提出热超弹性本构模型的基本假设认为温度是线性的, 且其热力学影响仅存在于热扩散过程. Nicholson 和 Nelson<sup>[14]</sup>提出了广义不可压 Mooney 热超弹性模型, Nicholson 和 Lin<sup>[15]</sup>提出了关于近似不可压弹性体的一般热超弹性本构模型.

本文的目的是研究组合热超弹性材料中的动态空穴生成问题. 首先, 建立了非均匀不可压组合热超弹性材料在表面均匀拉伸死载荷作用下的动态孔穴生成和增长问题的非线性数学模型, 采用换元积分方法求得了孔穴半径与外加载荷之间的一个精确的微分关系(孔穴半径满足的一个 2 阶微分方程); 给定外加载荷, 在初始条件下求解此微分方程, 可以得到孔穴半径随时间变化的演化规律, 同时可得到不同温度下球体中孔穴生成时的临界载荷和分叉曲线. 数值结果证明: 孔穴是以一个有限的半径突然出现的, 且随时间的演变孔穴半径呈现周期性的非线性振动; 当温度升高, 载荷的临界值降低. 振动的相图, 最大振幅, 近似周期和临界载荷都得到了. 与静态情况进行了比较指出, 在相同条件下, 动态孔穴生成时的临界载荷小于静态孔穴生成时的临界载荷.

## 1 问题的数学描述

考察由两种不可压缩热超弹性材料组合成的球体, 在表面突加径向均匀拉伸死载荷  $p_0$  作用下的有限变形动力学问题. 设一个半径为  $B$  的实心球, 在其内部嵌入一个半径为  $A$  的小球, 在半径为  $A$  处, 两球体永远粘合在一起, 因此, 两球体满足径向位移和径向应力的连续性条件. 设变形前组合球体所占区域为球坐标系  $(R, \Theta, \Phi)$  中的区域:  $D_0 = \{(R, \Theta, \Phi) \mid 0 \leq R < B, 0 < \Theta \leq 2\pi, 0 < \Phi \leq \pi\}$ , 并设变形前球体中位于  $(R, \Theta, \Phi)$  的点在时刻  $t$  运动到  $(r, \theta, \varphi)$  位置, 则球体的球对称运动可表示为

$$r^{[i]} = r^{[i]}(R, t) > 0; r(0^+, t) \geq 0, \theta^{[i]} = \Theta^{[i]}, \varphi^{[i]} = \Phi^{[i]} \quad (i = 1, 2), \quad (1)$$

式中,  $r^{[i]}(R, t)$  为两个待定函数. 如没有特殊申明, 当  $0 \leq R \leq A$  时,  $[i] = 1$  表示为与内圆球相关的量; 当  $A \leq R \leq B$  时,  $[i] = 2$  表示与外圆球体相关的量. 当  $r(0^+, t) = 0$  时, 球体中没有孔穴生成, 当  $r(0^+, t) > 0$ , 有孔穴生成现象.

由材料的不可压缩性条件, 可得

$$r^{[i]} = r^{[i]}(R, t) = \sqrt[3]{R^3 + (c^{[i]}(t))^3}, \quad c^{[i]}(t) \geq 0, t \geq 0, \quad (2)$$

式中,  $c^{[i]}(t)$ (孔穴的半径) 为时间的待定函数. 利用  $r = a$  表面处径向位移连续性条件, 可得,  $c^{[1]}(t) = c^{[2]}(t) = c(t)$ ,  $r^{[1]}(R, t) = r^{[2]}(R, t) = \sqrt[3]{R^3 + (c(t))^3}$ . 于是, 有

$$\lambda_R = h(r, c)^{2/3}, \quad \lambda_\Theta = \lambda_\Phi = h(r, c)^{-1/3}, \quad h(r, c) \equiv 1 - \left(\frac{c(t)}{r}\right)^3, \quad (3)$$

这里  $\lambda_R^{[i]} = \frac{\partial r^{[i]}(R, t)}{\partial R}$ ,  $\lambda_\Theta^{[i]} = \lambda_\Phi^{[i]} = \frac{r^{[i]}(R, t)}{R}$ .

为相应的主伸长. 设球体的材料为与不可压 Gent\_Thomas 材料对应的热超弹性材料, 其应变能函数可写为如下形式<sup>[16]</sup>:

$$W = C_1^{[i]}(I_1 - 3) + C_2^{[i]} \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) + \rho^{[i]} C_3^{[i]} T_0 \left(\frac{T}{T_0}\right) \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + 2C_4^{[i]}(T - T_0)(I_1 - 3), \quad (4)$$

其中,  $T - T_0$  是温度的改变量,  $I_1, I_2$  为应变张量的第一和第二不变量; 取材料参数<sup>[16]</sup>  $C_1^{[1]} = 0.117 \text{ MPa}$ ,  $C_2^{[1]} = 0.172 \text{ MPa}$ ,  $C_3^{[1]} = 1506 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\rho^{[1]} = 950 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $C_4^{[1]} = -\alpha^{[1]} \lambda^{[1]}$ ,  $\alpha^{[1]} = 6.36 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ,  $\lambda^{[1]} = 0.4225 \text{ MPa}$ , 初始温度  $T_0 = 300 \text{ K}$ .

根据连续统理论<sup>[17]</sup>, Cauchy 应力张量的非零分量为

$$\begin{cases} \tau_r^{[ij]}(r, t) = 2C_1^{[ij]} h(r, c)^{3/4} - 2C_2^{[ij]} \frac{1}{1 + 2h(r, c)^2} + \\ \quad 4C_4^{[ij]} (T - T_0) h(r, c)^{3/4} - p^{[ij]}(r, t), \\ \tau_{\theta\theta}^{[ij]}(r, t) = \tau_{\phi\phi}^{[ij]}(r, t) = 2C_1^{[ij]} h(r, c)^{-2/3} - 2C_2^{[ij]} \frac{1}{1 + 2h(r, c)^{-2}} + \\ \quad 4C_4^{[ij]} (T - T_0) h(r, c)^{-2/3} - p^{[ij]}(r, t), \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $p^{[ij]}(r, t)$  为待定的静水压力.

假设球体的温度改变量为  $\Delta T = T - T_0$ , 其中,  $T_0$  是初始温度. 并设温度场  $\Delta T$  是球对称的, 则通过解热传导方程, 容易得到内外球体的温度场

$$\Delta T^{[1]} = \frac{\alpha b \Delta T_b + [(1 - \alpha)bc - ac] \Delta T_c}{(1 - \alpha)bc + \alpha ab - ac} + \frac{\alpha bc (\Delta T_c - \Delta T_b)}{(1 - \alpha)bc + \alpha ab - ac} \cdot \frac{1}{r} \quad (c \leq r \leq a), \quad (6)$$

$$\Delta T^{[2]} = \frac{[(1 - \alpha)bc + \alpha ab] \Delta T_b - ac \Delta T_c}{(1 - \alpha)bc + \alpha ab - ac} + \frac{abc (\Delta T_c - \Delta T_b)}{(1 - \alpha)bc + \alpha ab - ac} \cdot \frac{1}{r} \quad (a \leq r \leq b), \quad (7)$$

式中,  $\alpha = \lambda_1 / \lambda_2$ ,  $\lambda_1, \lambda_2$  分别是内外球体的热传导系数, 并且  $\Delta T_c, \Delta T_b$  分别为球体内外表面的温度改变量.

当忽略体积力时, 球体应力分量满足的运动微分方程为

$$\frac{\partial \tau_r^{[ij]}}{\partial r} + \frac{2}{r} (\tau_r^{[ij]} - \tau_{\theta\theta}^{[ij]}) = \rho^{[ij]} \ddot{r}; \quad t \geq 0, \quad (8)$$

式中,  $\rho^{[ij]}$  为材料的密度. 球体表面受突加死载荷  $p_0 > 0$  作用时的边界条件为

$$\begin{cases} \tau_r^{[2]}(b, t) = 0, & t < 0, \\ \tau_r^{[2]}(b, t) = p_0 \left[ \frac{B}{b} \right]^2, & t \geq 0, \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $b = r(B, t) = \sqrt[3]{B^3 + (c(t))^3}$  为已变形球体的外半径. 当有孔穴生成时, 则表面自由的孔穴的边界条件为

$$\tau_r^{[ij]}(c, t) = 0, \quad c(t) > 0, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

假设  $t = 0$  时球体处于自然状态, 则  $r(R, 0) = R, \dot{r}(R, 0) = 0$ . 因此, 初始条件为

$$c(0) = 0, \quad \dot{c} \geq 0. \quad (11)$$

由径向应力的连续性条件, 得

$$\tau_r^{[1]}(a, t) = \tau_r^{[2]}(a, t). \quad (12)$$

因此, 问题是对给定的突加死载荷  $p_0 > 0$ , 求满足运动微分方程(8), 边界条件(9)、(10)和初始条件(11)及连续性条件(12)的待定函数  $p^{[ij]}(r, t)$  和  $c(t) \geq 0$ . 如果存在  $c(t) > 0$  的解, 意味着球体中有一个半径为  $c(t)$  的孔穴生成, 它将随时间  $t$  而演化, 故问题有分叉解存在; 若  $c = 0$ , 则球体仍保持为实心球体, 没有孔穴生存, 问题不存在分叉解.

## 2 问题的求解

不难看出,对任意的  $p_0 > 0$  问题总存在一个平凡解

$$p^{[ij]}(r, t) = -p_0, \quad c(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

它对应于初始的未变形状态  $r(R, t) = R$ , 相应的应力状态为均匀应力状态, 即  $\tau_r^{[ij]}(r, t) = \tau_{\theta\theta}^{[ij]}(r, t) = \tau_{\phi\phi}^{[ij]}(r, t) = p_0$ . 为寻求  $c(t) > 0$  的解, 将不可压条件(2)对  $t$  微分两次, 并将结果及应力分量(5)代入运动方程(8)可得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2C_1^{[ij]} h(r, c)^{4/3} - 2C_2^{[ij]} \frac{1}{1+2h(r, c)^2} + 4C_4^{[ij]} \Delta T^{[ij]} h(r, c)^{4/3} - p^{[ij]}(r, t) \right\} + \\ & \frac{2}{r} \left[ 2C_1^{[ij]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3}) - 2C_2^{[ij]} \left( \frac{1}{1+2h(r, c)^2} - \frac{1}{2+h(r, c)^{-2}} \right) \right] + \\ & \frac{2}{r} [4C_4^{[ij]} \Delta T^{[ij]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3})] = \\ & 2cr^{-5}(r^3 - c^3) \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 + r^{-2} c^2 \frac{d^2 c}{dt^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

将上式对自变量  $r$  从  $c$  到  $r$  积分, 可得

$$\begin{aligned} & 2C_1^{[ij]} h(r, c)^{4/3} - 2C_2^{[ij]} \frac{1}{1+2h(r, c)^2} + 4C_4^{[ij]} \Delta T^{[ij]} h(r, c)^{4/3} - p^{[ij]}(r, t) + \\ & p^{[ij]}(c, t) + J^{[ij]}(r) = 2\rho^{[ij]} c \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \left[ \frac{c^3}{4r^4} - \frac{1}{r} + \frac{3}{4c} \right] + \rho^{[ij]} c^2 \frac{d^2 c}{dt^2} \left[ \frac{1}{c} - \frac{1}{r} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} J^{[1]}(r) &= \int_c^r \frac{2}{r} \left[ 2C_1^{[1]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3}) - \right. \\ & \quad \left. 2C_2^{[1]} \left( \frac{1}{1+2h(r, c)^2} - \frac{1}{2+h(r, c)^{-2}} \right) \right] dr + \\ & \quad \int_c^r \frac{2}{r} [4C_4^{[1]} \Delta T^{[1]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3})] dr \quad (0 \leq r \leq a), \\ J^{[2]}(r) &= \int_c^a \frac{2}{r} \left[ 2C_1^{[1]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3}) - \right. \\ & \quad \left. 2C_2^{[1]} \left( \frac{1}{1+2h(r, c)^2} - \frac{1}{2+h(r, c)^{-2}} \right) \right] dr + \\ & \quad \int_c^a \frac{2}{r} [4C_4^{[1]} \Delta T^{[1]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3})] dr + \\ & \quad \int_a^r \frac{2}{r} \left[ 2C_1^{[2]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3}) - \right. \\ & \quad \left. 2C_2^{[2]} \left( \frac{1}{1+2h(r, c)^2} - \frac{1}{2+h(r, c)^{-2}} \right) \right] dr + \\ & \quad \int_a^r \frac{2}{r} [4C_4^{[2]} \Delta T^{[2]} (h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3})] dr \quad (a \leq r \leq b), \end{aligned} \right. \quad (16)$$

这里,  $a = \sqrt[3]{A^3 + c^3}$ . 将(15)式代入(5)式, 可得

$$\tau_r^{[ij]}(r, t) = 2\rho^{[ij]} c \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \left[ \frac{c^3}{4r^4} - \frac{1}{r} + \frac{3}{4c} \right] +$$

$$\rho^{ij} c^2 \frac{d^2 c}{dt^2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{r} \right) - J^{[ij]}(r) - p^{[ij]}(c, t). \quad (17)$$

再将其代入(12)式得到

$$p^{[2j]}(c, t) - p^{[1j]}(c, t) = 2(\rho^{2j} - \rho^{1j})c \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \left[ \frac{c^3}{4r^4} - \frac{1}{a} + \frac{3}{4c} \right] + (\rho^{2j} - \rho^{1j})c^2 \frac{d^2 c}{dt^2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right). \quad (18)$$

利用(10)式, 得  $p^{[1j]}(c, t) = 0$ . 在(17)式中令  $r = r(B, t) = b = \sqrt[3]{A^3 + c^3}$  并代入(9)式得到

$$p_0 \left[ 1 + \left( \frac{c}{B} \right)^3 \right]^{-2/3} = 2\rho^{2j}c \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \left[ \frac{c^3}{4b^4} - \frac{1}{b} + \frac{3}{4c} \right] + \rho^{2j}c^2 \frac{d^2 c}{dt^2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) - 2(\rho^{2j} - \rho^{1j})c \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 \left[ \frac{c^3}{4a^4} - \frac{1}{a} + \frac{3}{4c} \right] + (\rho^{2j} - \rho^{1j})c^2 \frac{d^2 c}{dt^2} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) - J^{[2j]}(b). \quad (19)$$

二阶非线性常微分方程(19)给出了孔穴半径  $c$  和外加载荷  $p_0$  之间的一个精确的微分关系, 当给定外加载荷  $p_0$  时, 在初始条件(11)下求解此方程, 可以得到孔穴半径  $c(t)$  随时间变化的演化规律.

### 3 数值计算与结果分析

令  $x(t) = c(t)/B$ , 则(19)式可以改写为

$$p_0(1+x^3)^{-2/3} = 2\rho^{2j}B^2x \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \left[ \frac{x^3}{4(1+x)^{4/3}} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}} + \frac{3}{4x} \right] + \rho^{2j}B^2x^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x)^{1/3}} \right] - 2(\rho^{2j} - \rho^{1j})B^3x \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \left[ \frac{B^3x^3}{4a^4} - \frac{1}{a} + \frac{3}{4Bx} \right] + (\rho^{2j} - \rho^{1j})B^3x^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \left[ \frac{1}{Bx} - \frac{1}{a} \right] - f(x). \quad (20)$$

注意到  $J^{[2j]}(b)$  是  $c(t)$  的函数, 因此, 也是  $x(t) = c(t)/B$  的函数, 记为  $f(x)$ .  $x(t)$  应满足的初始条件为

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \quad (21)$$

应用关系  $v = dx/dt$ ,  $d^2x/dt^2 = vdv/dx$ , 容易得到如下微分方程

$$2p_0x^2(1+x^3)^{-2/3} = \rho^{2j}B^2 \frac{d}{dx} \left\{ x^4v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} \right] \right\} - 2x^2f(x) - (\rho^{2j} - \rho^{1j})B^2 \frac{d}{dx} \left\{ x^4v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} \right] \right\}. \quad (22)$$

将(22)对自变量  $x$  从 0 到  $x$  积分可得

$$2p_0((1+x^3)^{1/3} - 1) = \rho^{2j}B^2x^4v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} \right] - (\rho^{2j} - \rho^{1j})B^2x^4v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(\alpha+x^3)^{1/3}} \right] - g(x), \quad (23)$$

式中,  $\alpha = A/B$ , 而  $g(x)$  为

$$g(x) = 8 \int_0^x y^2 \int_{B_y}^a \frac{1}{r} \left[ C_1^{[1j]}(h(r, c)^{4/3} - h(r, c)^{-2/3}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& C_2^{[1]} \left[ \frac{1}{1+2h(r,c)^2} - \frac{1}{2+h(r,c)^{-2}} \right] dr dy + \\
& 8 \int_0^x y^2 \int_{By}^a \frac{2}{r} \left[ C_4^{[1]} \Delta T^{[1]} (h(r,c)^{4/3} - h(r,c)^{-2/3}) \right] dr dy + \\
& 8 \int_0^x y^2 \int_a^b \frac{1}{r} \left[ C_1^{[2]} (h(r,c)^{4/3} - h(r,c)^{-2/3}) - \right. \\
& \left. C_2^{[2]} \left[ \frac{1}{1+2h(r,c)^2} - \frac{1}{2+h(r,c)^{-2}} \right] \right] dr dy + \\
& 8 \int_0^x y^2 \int_a^b \frac{2}{r} \left[ C_4^{[2]} \Delta T^{[2]} (h(r,c)^{4/3} - h(r,c)^{-2/3}) \right] dr dy \quad (a \leq r \leq b). \quad (24)
\end{aligned}$$

根据振动理论, 当且仅当在相平面  $x\dot{v}$  中, 相图是一条封闭曲线, 且有一个有限的周期  $T = \oint \frac{dx}{v}$ , 运动  $x(t)$  是周期的. 对给定的  $p_0$ , 如果当  $v = 0$  时方程(23) 存在  $x > 0$  根, 则周期性运动  $x(t)$  就会产生. 在方程(23) 中令  $v = 0$  可得

$$2p_0(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) = -g(x). \quad (25)$$

对给定的  $p_0 > 0$ , 如果方程(25) 存在  $x > 0$  的根, 则这个根相应振动过程中孔穴半径的最大值, 记作  $x_m$ . 此时, 球体内部有一个孔穴生成且可以扩展, 直到达到其最大值  $x_m$ , 然后这个孔穴半径逐渐减至零, 再重复这个循环过程. 在不同的内外边界温度的情况下, 对(25) 式进行数值计算. 当  $x \rightarrow 0^+$  时可得到  $p_0$  的临界值  $p_{cr}$ , 其数值结果列在表 1 和表 2 中. 计算中我们选取两种材料参数, 即, 情况 1: 外球体的材料参数均为内球体材料参数的 2 倍; 情况 2: 外球体的材料参数均为内球体材料参数的 0.5 倍. 从表 1、表 2 可以看出, 在内边界温度相同的情况下, 随外边界温度的升高, 临界载荷降低, 球体容易发生孔穴生成; 在外边界温度相同的情况下, 随内边界温度的升高, 临界载荷也会降低, 球体容易发生孔穴生成. 同时, 在相同条件下, 动态孔穴生成时的临界载荷小于静态孔穴生成时的临界载荷(见表 1~ 3).

表 1 温度和临界载荷的关系(情况 1)

$T_c/K$	$T_b/K$	$p_{cr}/MPa$
0	60	0.303 3
	90	0.274 0
30	60	0.298 7
	90	0.269 4

表 2 温度和临界载荷的关系(情况 2)

$T_c/K$	$T_b/K$	$p_{cr}/MPa$
0	60	0.295 4
	90	0.252 7
30	60	0.288 1
	90	0.245 5

孔穴生成后, 孔穴的增长情况(孔穴的分叉曲线)可由(25) 式计算得到, 数值结果示于图 1、图 2 中. 临界载荷与温度的关系示于图 3 和图 4 中. 能够看到, 当载荷  $p_0 > p_{cr}$  时, 球体突然发生生成孔穴, 并随之得到迅速的增长; 孔穴生成时的临界载荷随温度升高而降低. 在图 5 中示出了几何参数对于  $x_m p_0$

表 3 静态孔空生成时的临界载荷  
(情况 1,  $A/B = 0.25$ )

$\Delta T_c/K$	$\Delta T_b/K$	$p_{cr}/MPa$
0	60	0.528 4
	90	0.448 3
30	60	0.454 5
	90	0.423 6

曲线的影响, 从图中可以看到随内外半径比  $A/B$  的增大(相应于  $a/b = 0.25, 0.6, 0.8, 0.9$ ), 分别有  $p_0 = 0.269 4, p_0 = 0.265 4, p_0 = 0.263 8, p_0 = 0.263 0$ . 可见内外半径比对  $p_0$  的影响不大.

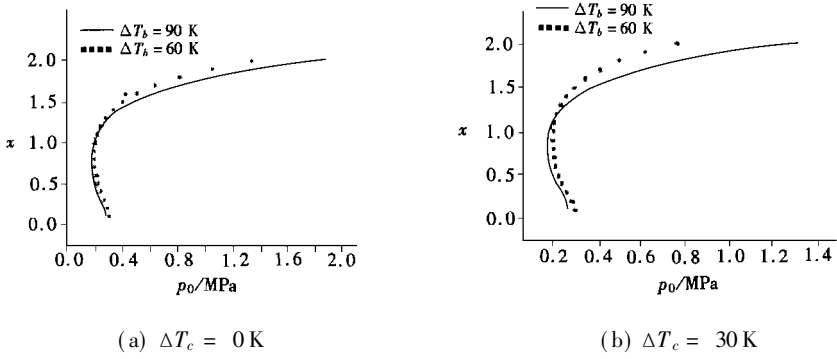


图 1 外表面温度不同时的孔穴分叉曲线(情况 1)

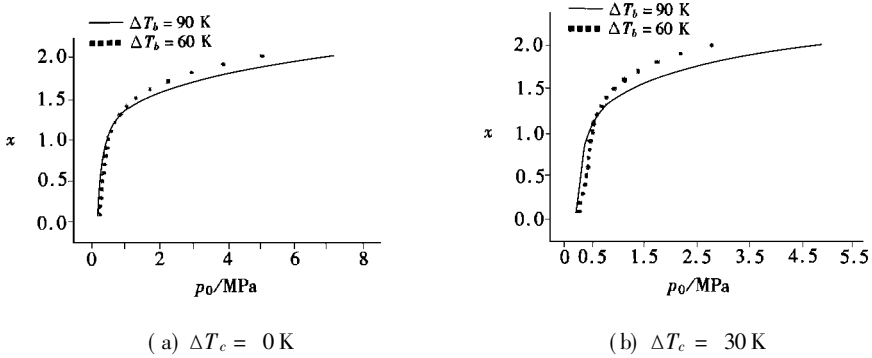
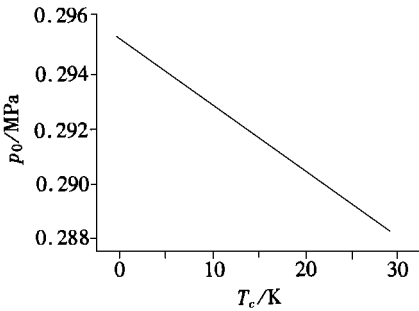
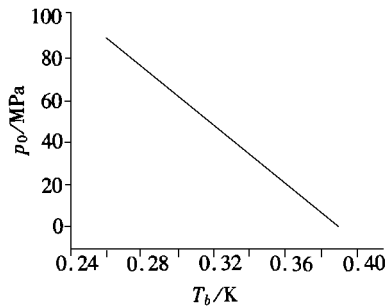


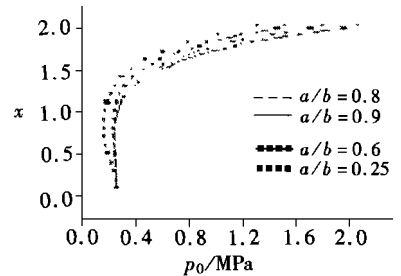
图 2 外表面温度不同时的孔穴分叉曲线(情况 2)

图 3 临界载荷与  $\Delta T_c$  的关系  
(对情况 1 和  $\Delta T_b = 60 \text{ K}$ )图 4 临界载荷与  $\Delta T_b$  的关系  
(对情况 1 和  $\Delta T_c = 60 \text{ K}$ )

对(23)式进行数值积分,可求得在不同 $p_0$ 值情况下 $x_{\text{分叉}}$ 的关系曲线,即相图.在图6和图7中示出的是情况1和情况2的孔穴振动相图,从图中可以看到,在孔穴生成以后,孔穴随着时间的演化呈现周期性的非线性振动,它们的周期分别是105.32和494.57.

## 4 结 论

本文研究了考虑热传导时,组合热超弹性材料球体

图 5 不同半径比的空穴分叉曲线  
(对情况 1 和  $\Delta T_c = 0 \text{ K}$ ,  $\Delta T_c = 60 \text{ K}$ )

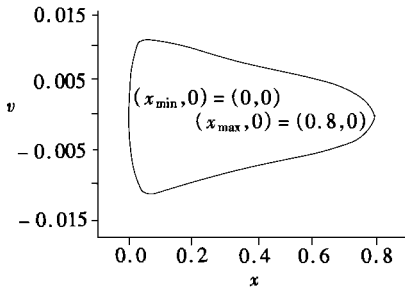


图 6 情况 1 的相图

( $\Delta T_c = 30 \text{ K}$ ,  $\Delta T_b = 60 \text{ K}$ )

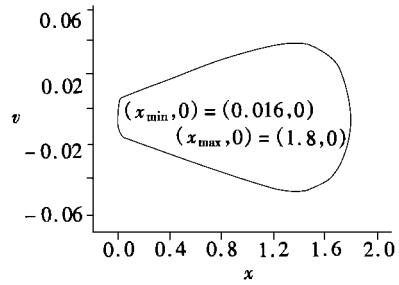


图 7 情况 2 的相图

( $\Delta T_c = 30 \text{ K}$ ,  $\Delta T_b = 60 \text{ K}$ )

在非均匀温度场和突加表面均匀拉伸载荷作用下空穴的动态生成问题. 得到了空穴半径和外加载荷之间的一个精确的微分关系. 通过数值计算, 得到了不同温度下球体空穴的分叉曲线, 结果表明随着温度的升高, 临界载荷将会降低; 在相同温度情况下, 动态空穴生成的临界载荷低于静态空穴的临界载荷. 数值证明了空穴是以一个有限的半径突然出现的, 且随时间的演变是周期性的非线性振动.

### [参 考 文 献]

- [1] 朱兆祥. 材料和结构的不稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1994.
- [2] Gent A N, Lindley P B. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension[J]. Proc R Soc London Ser A, 1958, **249**: 195—205.
- [3] Williams M L, Schapery R A. Spherical flaw instability in hydrostatic tension[J]. Internat J Fracture, 1965, **1**(1): 64—71.
- [4] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitations in nonlinear elasticity[J]. Phil Trans R Soc Lond, Ser A, 1982, **306**: 557—610.
- [5] Horgan C O, Abeyaratne R. A bifurcation problem for a compressible nonlinearly elastic medium: growth of a microvoid[J]. J Elasticity, 1986, **16**(1): 189—200.
- [6] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinear elastic solids: A review[J]. Appl Mech Rev, 1995, **48**: 471—485.
- [7] Knowles J K. On a class of oscillations in the finite deformation theory of elasticity[J]. J Appl Meth, 1962, **29**(2): 283—286.
- [8] Guo Z H, Soledki R. Free and forced finite amplitude oscillations of an elastic thick\_walled hollow sphere made of incompressible material[J]. Arch Mech Stos, 1963, **15**: 427—433.
- [9] Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells[J]. J Elasticity, 1983, **13**(1): 17—47.
- [10] Chou Wang M\_S, Horgan C O. Cavitation in nonlinear elastodynamic for neo\_Hookean materials[J]. Internat J En gng Sci, 1989, **27**: 967—973.
- [11] REN Jiu\_sheng, CHENG Chang\_jun. Dynamical formation of cavity in transversely isotropic hyperelastic spheres[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, **19**(3): 320—323.
- [12] 任九生, 程昌钧. 超弹性材料中空穴的动态生成[J]. 固体力学学报, 2004, **25**(1): 42—46.
- [13] Casey J, Abeyaratne R. Finite Thermoelasticity [M]. The American Society of Mechanical Engineers, 1999.
- [14] Nicholson D W, Nelson N. Finite element analysis in design with rubber elasticity[J]. Rubber Chem Technol, 1990, **63**: 358—406.



- [15] Nicholson D W, Lin B. Theory of thermoelasticity for bear\_incompressible elastomers[ J]. Acta Mech, 1996, 116(1): 15—28.
- [16] Eringen A C. Mechanics of Continua [M]. Second Edition. New York: Robert E Krieger Publishing Cmppany, 1980. (中译本:程昌钧,俞焕然译,戴天民校.连续统力学[M].,北京:科学出版社,1990.)

## Dynamical Formation of Cavity for Composed Thermal Hyperelastic Spheres in Non\_Uniform Temperature Fields

CHENG Chang\_jun<sup>1,2</sup>, MEI Bo<sup>1,2</sup>

( 1. Department of Mechanics, Shanghai University,  
Shanghai 200072, P. R. China ;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai 200072, P. R. China )

**Abstract:** Dynamical formation and growth of cavity in a sphere composed of two incompressible thermal\_hyperelastic Gent\_Thomas materials are discussed under the case of a non\_uniform temperature field and surface dead loading. The mathematical model was first presented based on the dynamical theory of finite deformations. An exact differential relation between the void radius and surface load was obtained by using the variable transformation method. By numerical computation, critical loads and cavitation growth curves were obtained for different temperatures. The influence of the temperature and material parameters of the composed sphere on the void formation and growth are considered and compared with that for static analysis. The results show that the cavity occurs suddenly with a finite radius and its evolvement with time displays a non\_linear periodic vibration and that the critical load decreases with the increase of temperature and also the dynamical critical load is lower than the static critical load under the same conditions.

**Key words:** composed thermal\_hyperelastic sphere; non\_uniform temperature field; dynamical formation and growth of cavity; nonlinear periodic vibration; influence of temperature