应用数学和力学, 第 25 卷 第 5 期(2004 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 05_0497_14

定常 Navier_Stokes 方程流函数形式两重网格算法的残量型后验误差估计*

任春风, 马逸尘

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(我刊原编委吴启光推荐)

摘要: 运用七种两重网格协调元方法得出了不可压 Navier_Stokes 方程流函数形式的残量型后验误差估计• 对比标准有限元方法的后验误差估计, 两重网格算法的后验误差估计多了一些额外项(三线性项)• 说明了这些额外项在误差估计中对研究离散解渐近性的重要性, 推出了对于最优网格尺寸, 这些额外项的收敛阶不高于标准离散解的收敛阶•

关 键 词: 两重网格方法; Navier_Stokes 方程; 残量型后验误差估计; 有限元方法; 流函数形式

中图分类号: O357.1; O241.85 文献标识码: A

引 言

模拟物理和工程的模型中经常会遇到非线性偏微分方程, 例如不可压 Navier_Stokes 方程• 数值求解 Navier_Stokes 方程会遇到两大困难: 非线性性和不可压性• 本文我们研究它的流函数形式, 因此压力不包含在弱形式中, 并且不可压条件可以自动满足• 假定问题(1) 有充分光滑的非奇异解或满足适当的小条件, 那么用协调有限元算法, 在[1~ 3] 中, 作者已经给出了它的两重网格算法数值解的先验误差估计•

实际上, 由于 Navier_Stokes 方程的非线性性, 因此数值求解时, 会花费很长的时间• 两重网格算法只是在粗网格上求解一个非线性方程, 因此能节省大量的计算量, 同时也能保持最优的收敛精度• 两重网格方法是建立在粗网格和细网格的基础上, 首先将给定的问题在粗网格有限元空间上求解一个非线性方程, 然后在细网格有限元空间上求解一个线性方程• 近来, 很多作者用求解一个粗网格校正线性问题作为两重网格算法的第三步, 并且已经证明了当粗网格和细网格尺寸满足某种关系时, 两重网格方法有渐近最优的先验估计•

近二十年来, 两重网格方法已经受到很多人的欢迎, 例如在[4~ 7] 中, 作者用此方法研究了半线性椭圆方程和标量型的非线性偏微分方程的误差估计, 在[8] 中, 作者用四种两重网格方法研究 Navier_Stokes 方程的误差估计• 在本文, 我们用七种两重网格方法(见[1~ 3] , [9]) 讨

* 收稿日期: 2002_06_03; 修订日期: 2003_12_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50136030, 10371096)
作者简介: 任春风(1972—) , 女, 河南人, 讲师, 博士(E_mail: chfenren@ yahoo. com. cn) ;
马逸尘, 教授(联系人. Tel: + 86_29_82660051, Fax: + 86_29_82668559; E_mail: ycma@ mail. xjtu. edu. cn) .

论了Navier_Stokes方程流函数形式的后验误差估计• 对比先验误差估计,后验误差可以由一些已知量和计算量来具体计算,例如右端项和离散解,这能够在计算中控制误差• 对于每一种两重网格算法,在[10]、[11]的基础上,我们可以推出 H^2, H^1 两种范数的后验误差估计• 在[10]、[11]中,作者分别证明了Navier_Stokes方程标准有限元算法和四种两重网格算法的后验误差估计• 对比标准有限元算法的后验误差估计,由于两重网格算法的离散解仅仅满足逼近的(或违反的)Galerkin正交性(见[12]),两重网格算法的后验误差估计包括一个(些)额外项• 我们分析了这些额外项的渐近性,得知关于在细网格上求解不同的线性方程,应用最后的粗网格校正步和额外的三线性项的估计都对得到最优的网格尺寸(粗网格尺寸的阶数)有很大的影响,证明了在残量型后验误差估计中对于最优的网格尺寸,额外项的渐近阶数没有用标准有限元算法而得到的阶数高• 因此在实际计算中,这些额外项必须被估计•

1 数学符号和预备知识

考虑定常不可压Navier_Stokes方程的流函数形式:

$$\begin{cases} -\lambda\Delta^2\psi + \operatorname{rot}\psi\cdot\nabla(\Delta\psi) = -\operatorname{rot}f & (\text{在 }\Omega\text{ 中}),\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{n}} = \psi = 0 & (\text{在}\partial\Omega\text{ 上}),\end{cases} \tag{1}$$

其中 ψ 是流函数, Ω 是 R^2 中具有Lipschitz连续边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外单位法向量, $\lambda > 0$ 是动力粘性系数, f 是体力•

贯穿全文,我们假定流体为层流,并且 ψ 是问题(1)的非奇异解• 问题(1)的弱形式为:求 $\psi\in X$, 使得

$$a(\psi,\Phi) + b(\psi,\psi,\Phi) = (\operatorname{rot}f,\Phi) \qquad (\forall\Phi\in X), \tag{2}$$

其中

$$X = H_0^2(\Omega) = \left\{v\in H^2(\Omega): v|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$
$$a(\psi,\Phi) = \lambda(\Delta\psi,\Delta\Phi),$$
$$b(\psi,\eta,\Phi) = -(\operatorname{rot}\psi\cdot\nabla(\Delta\psi),\Phi) = -\int_\Omega\Delta\psi(\Phi_x\eta_y - \Phi_y\eta_x)\,\mathrm{d}\Omega \qquad (\forall\Phi\in H_0^1(\Omega))•$$

$L^2(\Omega)$ 空间的范数和内积分别为 $\|\cdot\|_0$ 和 $(\cdot,\cdot)$, 标准Sobolev空间 $H^k(\Omega)$ 中的半范和全范分别为 $|\cdot|_k$ 和 $\|\cdot\|_k$• 由Poincar's不等式知空间 $H_0^k(\Omega)$ 中的半范 $|\cdot|_k$ 和全范 $\|\cdot\|_k$ 是等价的• 在子区域 $\omega\subset\Omega$ 中的双线性项,三线性项和范数分别用 $a_\omega(\cdot,\cdot)$, $b_\omega(\cdot,\cdot,\cdot)$ 和 $\|\cdot\|_{0,\omega}$ 来表示•

假定 $\Pi_h(\Omega)$ 是 Ω 的三角剖分族, h_e 是每个单元 e 的直径, h_Γ 是每一个边 Γ 的长度, L 是所有边 Γ 的集合, 并且设 $h = \max\limits_{e\in\Pi_h(\Omega)}\left\{h_e\right\}$, 以及剖分 $\left\{\Pi_h(\Omega)\right\}_h$ 是通常意义下的一致正规剖分• 现在可以建立协调有限元空间 X^h 满足 $X^h\subset X$ (见[1]、[3])• 问题(2)的标准有限元算法是:

算法1 求 $\psi_h\in X^h$, 使得对于 $\forall\Phi\in X^h$

$$a(\psi_h,\Phi) + b(\psi_h,\psi_h,\Phi) = (\operatorname{rot}f,\Phi)• \tag{3}$$

假定问题(2)的解 $\psi\in H^4(\Omega)$, 则由[1]可得如下的先验误差估计:

$$|\psi-\psi_h|_0 + h|\psi-\psi_h|_1 + h^2|\psi-\psi_h|_2 \leqslant ch^4|\psi|_4, \tag{4}$$

其中 $c > 0$ 是不依赖于 $\Pi_h(\Omega)$ 的常数.

假定 ψ 是问题(2) 的非奇异解, 考虑问题(2) 的线性对偶问题: 求 $z \in X$, 使得对于 $\forall w \in X$

$$a(w, z) + b(\psi, w, z) + b(w, \psi_h, z) = (\nabla(\psi - \psi_h), \nabla w). \tag{5}$$

假定问题(5) 具有 $H^4(\Omega)$ 正则性, 即 z 存在唯一, 且满足

$$|z|_4 \leqslant c_s(\psi, \psi_h, \lambda) \|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0. \tag{6}$$

由[1~3], [9], 知三线性项满足如下估计:

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2|\eta|_2|\phi|_2 \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{7}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2|\eta|_2|\phi|_1^{1/2}|\phi|_2^{1/2} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{8}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2|\phi|_2|\eta|_1^{1-\epsilon}|\eta|_2^{\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{9}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_4|\phi|_1|\eta|_1 \quad (\forall \psi \in H^4(\Omega), \eta, \phi \in X), \tag{10}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2|\eta|_2|\phi|_1^{1-\epsilon}|\phi|_2^{\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{11}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_1|\eta|_2|\phi|_4 \quad (\forall \psi, \eta \in X, \phi \in H^4(\Omega)), \tag{12}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2|\eta|_1^{1-\epsilon}|\eta|_2^{\epsilon}|\phi|_2^{\epsilon}|\phi|_2^{1-\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{13}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_2|\eta|_1|\phi|_4 \quad (\forall \psi, \eta \in X, \phi \in H^4(\Omega)), \tag{14}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_1^{1-\epsilon}|\psi|_2^{\epsilon}|\eta|_2|\phi|_2 \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{15}$$

$$|b(\psi, \eta, \phi)| \leqslant c|\psi|_1^{1-\epsilon}|\psi|_2^{\epsilon}|\eta|_2|\phi|_1^{\epsilon}|\phi|_2^{1-\epsilon} \quad (\forall \psi, \eta, \phi \in X), \tag{16}$$

其中 ϵ 是任意小的正常数.

假定 R_X 是[13] 中具有 L^2 投影性质的Clément 插值算子, 并且对于 $0 \leqslant l \leqslant m \leqslant 1$ 满足

$$\begin{cases} |v - R_X v|_{l,e} \leqslant c_i h_e^{m-l+1}|v|_{m+1,\omega(e)} & (\forall v \in X \cap (H^{m+1}(\Omega))), \\ \|v - R_X v\|_{0,\Gamma} \leqslant c_i h_\Gamma^{m+1/2}|v|_{m+1,\omega(\Gamma)} & (\forall v \in X \cap (H^{m+1}(\Omega))), \end{cases} \tag{17}$$

其中 c_i 为插值常数, $\omega(e)$ 是元素 e 的影响元素集, $\omega(\Gamma)$ 是边 Γ 的影响元素集. Clément 插值算子满足

$$|v - R_X v|_i \leqslant c|v|_i \quad (\forall v \in X;\ i = 2 \text{ 或 } 4). \tag{18}$$

由于 $\Pi_h(\Omega)$ 是正规剖分, 故

$$\begin{cases} \left(\sum_{e \in \Pi_h(\Omega)} |w|_{i,\omega(e)}^2\right)^{1/2} \leqslant c(\theta_{\min})|w|_i, \\ \left(\sum_{\Gamma \in \Pi_h(\Omega)} |w|_{i,\omega(G)}^2\right)^{1/2} \leqslant c(\theta_{\min})|w|_i \quad (i = 2 \text{ 或 } 4). \end{cases} \tag{19}$$

由(18) 和 Poincaré's 不等式, 知

$$\|R_X v\|_2 \leqslant c|R_X v|_2 \leqslant c|v|_2 \leqslant c\|v\|_2 \quad (\forall v \in X). \tag{20}$$

定义函数 v 在 X^h 中关于 Γ 的跃度 $[v]_\Gamma$ 为

$$[v_h]_\Gamma(x) := \begin{cases} \lim_{t \to +0}(v_h(x + t n_\Gamma) - v_h(x - t n_\Gamma)) & (\forall x \in \Gamma \notin \partial\Omega), \\ \lim_{t \to +0}(-v_h(x - t n_\Gamma)) & (\forall x \in \Gamma \in \partial\Omega), \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{n}_\Gamma$ 为 Γ 的单位法向量, 如果 $\Gamma \in \partial\Omega$, 则 $\boldsymbol{n}_\Gamma$ 表示外单位法向量, 否则 $\boldsymbol{n}_\Gamma$ 规定为某一固定方向.

2 标准有限元算法

定理 2.1 设 h 充分小, ψ_h 是问题(3) 的解, 则成立如下的后验误差估计:

$$|\psi-\psi_h|_2 \leqslant c\eta_1(\psi_h) = c\Big(\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)} h_e^4\|r\|_{0,e}^2 + \sum_{\Gamma\in L}\lambda^2 h_\Gamma\|[\Delta\psi_h]_\Gamma \boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2 + \sum_{\Gamma\in L}\lambda^2 h_\Gamma^3\|[\nabla(\Delta\psi_h)\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2\Big)^{1/2},$$

其中 c 是与 ψ, c_i 和 $c(\theta_{\min})$ 有关的正常数, $r := \mathrm{rot} f - \lambda\Delta^2\psi_h + \mathrm{rot}\,\psi_h\cdot\nabla(\Delta\psi_h)$.

证明 如果 h 充分小,则由[14]的推论 7.1 知

$$|\psi-\psi_h|_2 \leqslant 2\|DF(\psi)^{-1}\|_{L(X,X^*)}\|F(\psi_h)\|_{X^*},$$

其中 $F(\psi_h): X\to R$ 是残量,满足

$$F(\psi_h) = a(\psi_h,\Phi) + b(\psi_h,\psi_h,\Phi) - (\mathrm{rot} f,\Phi) \qquad (\forall\Phi\in X),$$

$DF(\psi)$ 是 F 在 ψ 处的 Fr chet 导数, X^* 是空间 X 的对偶空间.

由于假定 ψ 是问题(1)的非奇异解,故 $\|DF(\psi)^{-1}\|_{L(X,X^*)} < \infty$.

由于

$$F(\psi) = a(\psi,\Phi) + b(\psi,\psi,\Phi) - (\mathrm{rot} f,\Phi) = 0 \qquad (\forall\Phi\in X),$$

故

$$\|F(\psi_h)\|_{X^*} = \|F(\psi_h) - F(\psi)\|_{X^*} = \sup_{0\neq\Phi\in X}|\Phi|_2^{-1}|a(\psi-\psi_h,\Phi) + b(\psi,\psi,\Phi) - b(\psi_h,\psi_h,\Phi)|. \tag{21}$$

由(2)和(3),知

$$a(\psi-\psi_h,\Phi_h) + b(\psi,\psi,\Phi_h) - b(\psi_h,\psi_h,\Phi_h) = 0 \qquad (\forall\Phi_h\in X^h). \tag{22}$$

令(22)中的 $\Phi_h = R_X\Phi$, 由(21)和(22)知

$$\begin{aligned}\|F(\psi_h)\|_{X^*} &= \sup_{0\neq\Phi\in X}|\Phi|_2^{-1}|a(\psi-\psi_h,\Phi-R_X\Phi) + b(\psi,\psi,\Phi-R_X\Phi) - b(\psi_h,\psi_h,\Phi-R_X\Phi)| = \\ &\sup_{0\neq\Phi\in X}|\Phi|_2^{-1}\Big|a(\psi,\Phi-R_X\Phi) + b(\psi,\psi,\Phi-R_X\Phi) - \big\{a(\psi_h,\Phi-R_X\Phi) + b(\psi_h,\psi_h,\Phi-R_X\Phi)\big\}\Big| = \\ &\sup_{0\neq\Phi\in X}|\Phi|_2^{-1}\Big|(\mathrm{rot} f,\Phi-R_X\Phi) - \big\{a(\psi_h,\Phi-R_X\Phi) + b(\psi_h,\psi_h,\Phi-R_X\Phi)\big\}\Big|.\end{aligned} \tag{23}$$

利用 Green 公式,有

$$\begin{aligned}a(\psi_h,\Phi-R_X\Phi) &= \sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\lambda\int_e\Delta\psi_h\Delta(\Phi-R_X\Phi)\,\mathrm{d}x = \\ &\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\Big\{\lambda\int_e\Delta^2\psi_h(\Phi-R_X\Phi)\,\mathrm{d}x + \sum_{\Gamma\in e}\lambda\int_\Gamma\Big\{\Delta\psi_h\nabla(\Phi-R_X\Phi)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma - (\Phi-R_X\Phi)\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma\Big\}\mathrm{d}s\Big\},\end{aligned}$$

$$b(\psi_h,\psi_h,\Phi-R_X\Phi) = -\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\int_e\mathrm{rot}\,\psi_h\cdot\nabla(\Delta\psi_h)(\Phi-R_X\Phi)\,\mathrm{d}x,$$

故,由(23)得

$$\begin{aligned}\|F(\psi_h)\|_{X^*} &= \sup_{0\neq\Phi\in X}|\Phi|_2^{-1}\Big|\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\Big\{\int_e r(\Phi-R_X\Phi)\,\mathrm{d}x - \\ &\sum_{\Gamma\in e}\lambda\Big[\int_\Gamma\Delta\psi_h\nabla(\Phi-R_X\Phi)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma - (\Phi-R_X\Phi)\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma\,\mathrm{d}s\Big]\Big\}\Big| = \\ &\sup_{0\neq\Phi\in X}|\Phi|_2^{-1}\Big|\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\int_e r(\Phi-R_X\Phi)\,\mathrm{d}x +\end{aligned}$$

$$\sum_{\Gamma\in L}\lambda\left\{\int_\Gamma[\Delta\psi_h]_\Gamma \nabla(\phi-R_X\phi)\cdot \boldsymbol{n}_\Gamma \mathrm{d}s-\int_\Gamma[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma(\phi-R_X\phi)\mathrm{d}s\right\}\Bigg|\leqslant$$

$$\sup_{0\neq\phi\in X}|\phi|_2^{-1}\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\left\{\left(\int_e r^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\|\phi-R_X\phi\|_{0,e}+\right.$$

$$\sum_{\Gamma\in L}\lambda\|[\Delta\psi_h]_\Gamma\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}\|\nabla(\phi-R_X\phi)\|_{0,\Gamma}+$$

$$\left.\sum_{\Gamma\in L}\lambda\|[\nabla(\Delta\psi_h)_\Gamma\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}\|\phi-R_X\phi\|_{0,\Gamma}\right\}\leqslant$$

$$\sup_{0\neq\phi\in X}|\phi|_2^{-1}\left\{\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}c_ih_e^2\|r\|_{0,e}|\phi|_{2,\omega(e)}+\right.$$

$$\sum_{\Gamma\in L}\lambda\|[\Delta\psi_h]_\Gamma\boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}c_ih_\Gamma^{1/2}|\phi|_{2,\omega(\Gamma)}+$$

$$\sum_{\Gamma\in L}\lambda\|[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}c_ih_\Gamma^{3/2}|\phi|_{2,\omega(\Gamma)}\leqslant$$

$$c_i\sup_{0\neq\phi\in X}|\phi|_2^{-1}\left\{\left(\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}(h_e^4\|r\|_{0,e}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}|\phi|_{2,\omega(e)}^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left(\lambda^2\sum_{\Gamma\in L}h_\Gamma\|[\nabla\Delta\psi\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\Gamma\in L}|\phi|_{2,\omega(e)}\right)^{1/2}+$$

$$\left(\lambda^2\sum_{\Gamma\in L}h_\Gamma\|\nabla[(\Delta\psi)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2h_\Gamma^3\right)^{1/2}\left(\sum_{\Gamma\in L}|\phi|_{2,\omega(e)}\right)^{1/2}\leqslant$$

$$c(\theta_{\min})c_i\left\{\left(\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}h_e^4\|r\|_{0,e}^2\right)^{1/2}+\left(\lambda^2\sum_{\Gamma\in L}h_\Gamma\|[\Delta\psi]_\Gamma\boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.\left(\lambda^2\sum_{\Gamma\in L}\|[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2h_\Gamma^3\right)^{1/2}\right\}\leqslant$$

$$c(\theta_{\min})c_i\left\{\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}h_e^4\|r\|_{0,e}^2+\sum_{\Gamma\in L}\lambda^2h_\Gamma\|[\Delta\psi]_\Gamma\boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2+\right.$$

$$\left.\sum_{\Gamma\in L}\lambda^2h_\Gamma^3\|[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2\right\}^{1/2}.$$

□

定理 2.2 在关于线性对偶问题(5)的稳定性假设(6)下,则成立以下的后验误差估计:

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0\leqslant c\eta_2(\psi_h),$$

其中 ψ_h 是算法 1 的解, c 是依赖于 c_i, c_s 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数,

$$\eta_2(\psi_h)=\left\{\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}h_e^2\|r\|_{0,e}^2+\sum_{\Gamma\in L}\lambda^2h_\Gamma^5\|[\Delta\psi_h]_\Gamma\boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2+\right.$$

$$\left.\sum_{\Gamma\in L}\lambda^2h_\Gamma^7\|[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}^2\right\}^{1/2}.$$

证明 令(5)中 $w=\psi-\psi_h$, 得

$$a(\psi-\psi_h,z)+b(\psi,\psi-\psi_h,z)+b(\psi-\psi_h,\psi_h,z)=$$

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0^2\qquad(\forall z\in X).\tag{24}$$

令(2)式中 $\phi\in X^h$, 将(2)式减去(3)式,得

$$a(\psi-\psi_h,\phi)+b(\psi,\psi,\phi)-b(\psi_h,\psi_h,\phi)=0\qquad(\forall\phi\in X^h).\tag{25}$$

令(25)式中 $\phi=R_Xz\in X^h$, 将(24)式减去(25)式,得

$$a(\psi-\psi_h,z-R_Xz)+b(\psi,\psi-\psi_h,z)+b(\psi-\psi_h,\psi_h,z)-$$

$$b(\psi,\psi,R_Xz)+b(\psi_h,\psi_h,R_Xz)=\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0^2.$$

经过简单的计算,知

$$\begin{aligned}&a(\psi-\psi_h, z-R_Xz)+b(\psi,\psi,z-R_Xz)-\\&\quad b(\psi_h,\psi_h,z-R_Xz)=\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0^2. \end{aligned}\tag{26}$$

与定理2.1的证明类似, 有

$$\begin{aligned}\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0^2 \leqslant{}& \sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}\|r\|_{0,e}\|z-R_Xz\|_{0,e}+\\&\sum_{\Gamma\in L}\lambda\|[\Delta\psi_h]_\Gamma \boldsymbol{n}_\Gamma\|_{0,\Gamma}\|\nabla(z-R_Xz)\|_{0,\Gamma}+\\&\sum_{\Gamma\in L}\lambda\|[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot \boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}\|z-R_Xz\|_{0,\Gamma}\leqslant\\&c_i\Big\{\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}h_e^4\|r\|_{0,e}|z|_{4,\omega(e)}+\sum_{\Gamma\in L}\lambda\Big\{h_\Gamma^{5/2}\|[(\Delta\psi_h)\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}+\\&h_\Gamma^{7/2}\|[\nabla(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|_{0,\Gamma}\Big\}|z|_{4,\omega(\Gamma)}\Big\}\leqslant\\&c_ic(\theta_{\min})\Big\{\sum_{e\in\Pi_h(\Omega)}h_e^8\|r\|^2_{0,e}+\sum_{\Gamma\in L}\lambda^2h_\Gamma^5\|[\Delta\psi_h]_\Gamma\boldsymbol{n}_\Gamma\|^2_{0,\Gamma}+\\&\sum_{\Gamma\in L}\lambda^2h_\Gamma^7\|[\nabla\cdot(\Delta\psi_h)\cdot\boldsymbol{n}_\Gamma]_\Gamma\|^2_{0,\Gamma}\Big\}^{1/2}\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0,\end{aligned}$$

故, 上式两边同除以 $\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0$ 可得定理 2.2. □

3 两重网格算法

在这一节里, 我们考虑两重网格算法: 首先在粗网格 $\Pi_H(\Omega)$ 上求解一个非线性方程, 然后再在细网格 $\Pi_h(\Omega)$ 上求解一个线性方程, 其中 $H\gg h$, 以下相同.

算法 2

1) 求 $\psi_H\in X^H$, 使得对 $\forall\phi_H\in X^H$

$$a(\psi_H,\phi_H)+b(\psi_H,\psi_H,\phi_H)=(\mathrm{rot}f,\phi_H);\tag{27}$$

2) 求 $\psi_h\in X^h$, 使得对 $\forall\phi_h\in X^h$

$$a(\psi_h,\phi_h)+b(\psi_h,\psi_H,\phi_h)+b(\psi_H,\psi_h,\phi_h)=(\mathrm{rot}f,\phi_h)+b(\psi_H,\psi_H,\phi_h).\tag{28}$$

在[1]、[9]中, 作者已经证明了这种两重网格算法解的先验估计:

$$|\psi-\psi_h|_2\leqslant c(h^2+H^{5-\epsilon}).\tag{29}$$

定理 3.1 如果 H 充分小, 则算法 2 的解 ψ_h 成立以下的后验误差估计:

$$|\psi-\psi_h|_2\leqslant c(\eta_1(\psi_h)+|\psi_h-\psi_H|_2^{1+\epsilon}|\psi_h-\psi_H|_1^{1-\epsilon}),\tag{30}$$

其中 c 是依赖于 ψ, c_i 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数.

证明 按照定理 2.1 的证明技巧, 我们只需要计算出算法 2 的类似于(22)的式子([12]称此式满足逼近的 Galerkin 正交性), 然后再估计它的右端项.

由算法2 的第二步, 方程(2)和恒等式

$$\begin{aligned}&b(\psi_H,\psi_h,\phi_h)+b(\psi_h,\psi_H,\phi_h)-b(\psi_H,\psi_H,\phi_h)=\\&\quad b(\psi_h,\psi_h,\phi_h)-b(\psi_h-\psi_H,\psi_h-\psi_H,\phi_h),\end{aligned}\tag{31}$$

知对于 $\forall\phi_h\in X^h$,

$$\begin{aligned}&a(\psi-\psi_h,\phi_h)+b(\psi,\psi,\phi_h)-b(\psi_h,\psi_h,\phi_h)=\\&\quad -b(\psi_h-\psi_H,\psi_h-\psi_H,\phi_h).\end{aligned}\tag{32}$$

按照定理 2.1 的证明技巧, 我们只需估计(32)中相对于(22)式的额外项(三线性项). 令 $\phi_h=R_X\phi$, 由(15)和(20)式, 知

$$
\begin{aligned}
&| b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, R_X\phi) | \leqslant \\
&\quad c | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} | R_X\phi |_2 \leqslant \\
&\quad c | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} | \phi |_2,
\end{aligned} \tag{33}
$$

故

$$
| \psi - \psi_h |_2 \leqslant c(\eta_1(\psi_h) + | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon}). \qquad \square
$$

定理 3.2 在定理2.2的条件下, 成立如下的后验误差估计:

$$
\begin{aligned}
&\| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0 \leqslant c(\eta_2(\psi_h) + h^{2+\epsilon} | \psi_h - \\
&\quad \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} + | \psi_h - \psi_H |_1 | \psi_h - \psi_H |_2),
\end{aligned}
$$

其中 ψ_h 是算法2的解, c 是依赖于 c_s, c_i 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数.

证明 按照定理2.2的证明技巧, 令 $\phi_h = R_X z$, 由(25)和(28), 可得到类似于(26)的式子:

$$
\begin{aligned}
&\| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0^2 = a(\psi - \psi_h, z - R_X z) + b(\psi, \psi, z - R_X z) - \\
&\quad b(\psi_h, \psi_h, z - R_X z) - b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, R_X z).
\end{aligned}
$$

类似于定理2.2的证明, 有

$$
\| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0^2 \leqslant c(\eta_2(\psi_h) \| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0 + | b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, R_X z) |). \tag{34}
$$

由于

$$
\begin{aligned}
&| b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, R_X z) | \leqslant \\
&\quad | b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, z - R_X z) | + | b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, z) | \leqslant \\
&\quad c | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} | z - R_X z |_1^{\epsilon} | z - R_X z |_2^{1-\epsilon} + \\
&\quad c | \psi_h - \psi_H |_1 | \psi_h - \psi_H |_2 | z |_4 \leqslant \\
&\quad c\Big\{ h^{2+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} + \\
&\quad | \psi_h - \psi_H |_1 | \psi_h - \psi_H |_2 \Big\} \| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0,
\end{aligned} \tag{35}
$$

故, 联立(34)和(35), 知

$$
\begin{aligned}
&\| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0 \leqslant \\
&\quad c\Big\{ \eta_2(\psi_h) + h^{2+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} + | \psi_h - \psi_H |_1 | \psi_h - \psi_H |_2 \Big\}.
\end{aligned}
$$

$\square$

由于细网格解 ψ_h 的收敛阶不低于粗网格解 ψ_H 的收敛阶, 见(29), 故由 $\psi - \psi_H$ 的先验估计(4), 知(30)中额外项有如下的渐近性:

$$
\begin{aligned}
&| \psi_h - \psi_H |_1^{1-\epsilon} | \psi_h - \psi_H |_2^{1+\epsilon} \leqslant \\
&\quad (| \psi - \psi_h |_1^{1-\epsilon} + | \psi - \psi_H |_1^{1-\epsilon})(| \psi - \psi_h |_2^{1+\epsilon} + | \psi - \psi_H |_2^{1+\epsilon}) \leqslant \\
&\quad c(H^{3(1-\epsilon)} + H^{3(1-\epsilon)})(H^{2(1+\epsilon)} + H^{2(1+\epsilon)}) \leqslant cH^{5-\epsilon}.
\end{aligned}
$$

在上式中, 额外项的渐近性不依赖于细网格尺寸 h. 如果选择 $H^{5-\epsilon} = O(h^2)$, 由先验估计(29), 知

$$
| \psi - \psi_h |_2 \leqslant ch^2.
$$

在此情况下, 额外项具有高阶渐近性. 如果选择最优的或者较小的 h, 则额外项的阶数和标准离散解的阶数一致. 因此对于渐近最优的后验估计, 额外项的计算必不可少. 额外项度量粗细网格解的差异, 这种差异越大, 它就越重要.

算法 3

1) 和算法 2 的第一步一样;

2) 求 $\psi_h \in X^h$, 使得对 $\forall \phi_h \in X^h$

$$a(\psi_h, \phi_h) + b(\psi_H, \psi_h, \phi_h) = (\mathrm{rot} f, \phi_h). \tag{36}$$

在[3]中, 作者已经证明这种方法的先验误差估计:

$$|\psi - \psi_h|_2 \leqslant c(h^2 + \sqrt{\ln h} H^3).$$

算法 2 和算法 3 都是在细网格上求解线性问题, 由于在算法 2 第二步中的三线性项 $b(\psi_H, \psi_h, \phi)$ 可能会给求解带来困难, 例如, 导致坏的矩阵性质, 要求大的存储量. 因此经常将 $b(\psi_h, \psi_H, \phi)$ 中的 ψ_h 用 ψ 的近似解(例如 ψ_H) 来代替, 从而固定点迭代替代了牛顿迭代. 在固定点迭代中, 必须求解 Osseen 方程(36).

定理 3.3　如果 H 充分小, 则算法 3 的解 ψ_h 满足如下的后验误差估计:

$$|\psi - \psi_h|_2 \leqslant c(\eta_1(\psi_h) + |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2),$$

其中 c 是依赖于 ψ, c_i 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数.

证明　利用定理 2.1 和定理 3.1 的证明思想, 我们只需要估计算法 3 的逼近 Galerkin 正交性的右端项. 由(31)、(36) 和方程(2), 可得算法 3 满足逼近 Galerkin 正交性的式子:

$$a(\psi - \psi_h, \phi_h) + b(\psi, \psi, \phi_h) - b(\psi_h, \psi_h, \phi_h) = b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, \phi_h). \tag{37}$$

由于

$$|b(\psi_h - \psi_H, \psi_h, R_X\phi)| \leqslant c|\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2 |\phi|_2, \tag{38}$$

故, 类似定理 2.1 的证明有

$$|\psi - \psi_h|_2 \leqslant c(\eta_1(\psi_h) + |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2). \qquad \square$$

定理 3.4　在定理 3.2 的条件下, 算法 3 的解 ψ_h 成立如下的后验误差估计:

$$\begin{aligned}\|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0 \leqslant c(&\eta_2(\psi_h) + |\psi_H - \psi_h|_1 |\psi_h|_2 + \\ &h^{2+\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2).\end{aligned}$$

证明　令(24) 式中的 $\phi_h = R_X z$, (24) 式减去(37) 式, 得

$$\begin{aligned}\|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0^2 = {}& a(\psi - \psi_h, z - R_X z) + b(\psi, \psi, z) - \\ & b(\psi_h, \psi_h, R_X z) + b(\psi_h, \psi_h, R_X z) + b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, R_X z) = \\ & a(\psi - \psi_h, z - R_X z) + b(\psi, \psi, z - R_X z) - \\ & b(\psi_h, \psi_h, z - R_X z) + b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, R_X z).\end{aligned}$$

上式右端前三项的估计类似于定理 3.2 中的估计, 我们只需要估计其右端的三线性项. 由(12)、(15) 和(18), 知

$$\begin{aligned}|b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, R_X z)| \leqslant{}& |b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, z - R_X z)| + |b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, z)| \leqslant \\ & c|\psi_H - \psi_h|_1 |\psi_h|_2 |z|_4 + \\ & c|\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2 |z - R_X z|_2^{1-\epsilon} |z - R_X z|_1^{\epsilon} \leqslant \\ & c|\psi_H - \psi_h|_1 |\psi_h|_2 |z|_4 + ch^{2+\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2 |z|_4 \leqslant \\ & c(|\psi_H - \psi_h|_1 + h^2 |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon}) |\psi_h|_2 \|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0,\end{aligned} \tag{39}$$

故

$$\begin{aligned}\|\nabla(\psi - \psi_h\|_0 \leqslant c(&\eta_2(\psi_h) + |\psi_H - \psi_h|_1 |\psi_h|_2 + \\ &h^{2+\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\psi_h|_2).\end{aligned} \qquad \square$$

由(4) 知定理 3.3 的额外项具有 $O(H^{3-\epsilon})$ 的渐近性, 定理 3.4 中的额外项具有 $O(H^3)$ 的渐近性.

算法 4

1) 与算法 2 和算法 3 的第一步相同;

2) 求 $\psi_h \in X^h$, 使得对于 $\forall \phi_h \in X^h$

$$a(\psi_h, \phi_h) + b(\psi_H, \psi_H, \phi_h) = (\mathrm{rot} f, \phi_h). \tag{40}$$

令(2)式中 $\phi = \phi_h \in X^h$, 由(40)和方程(2)得算法 4 满足逼近 Galerkin 正交性的式子:

$$\begin{aligned} &a(\psi - \psi_h, \phi_h) + b(\psi, \psi, \phi_h) - b(\psi_h, \psi_h, \phi_h) = \\ &\quad b(\psi_H, \psi_H, \phi_h) - b(\psi_h, \psi_h, \phi_h) = \\ &\quad b(\psi_H - \psi_h, \psi_H - \psi_h, \phi_h) + b(\psi_H - \psi_h, \psi_h, \phi_h) + b(\psi_h, \psi_H - \psi_h, \phi_h). \end{aligned} \tag{41}$$

分别令(41)式中 $\phi_h = R_X \phi$ 及 $\phi_h = R_X z$, 则(41)式右端项前两项的估计见(33), (35), (38)和(39). 由(9)和(20)知

$$\begin{aligned} &|b(\psi_h, \psi_H - \psi_h, R_X \phi)| \leqslant \\ &\quad c|\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |\phi|_2. \end{aligned} \tag{42}$$

为了估计 $\|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0$, 只需令 $\phi_h = R_X z$ 来估计 $b(\psi_h, \psi_H - \psi_h, \phi_h)$.

$$\begin{aligned} &|b(\psi_h, \psi_H - \psi_h, R_X z)| \leqslant \\ &\quad |b(\psi_h, \psi_H - \psi_h, z - R_X z)| + |b(\psi_h, \psi_H - \psi_h, z)| \leqslant \\ &\quad c|\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1 |z|_4 + c h^{2-\epsilon} |\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} |z|_4 \leqslant \\ &\quad c(|\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1 + h^{2-\epsilon} |\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_1^{\epsilon}) \|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0. \end{aligned} \tag{43}$$

根据上述讨论, 可得如下定理:

定理 3.5 在定理 3.1 和定理 3.2 的条件下, 算法 4 的解 ψ_h 成立以下后验误差估计:

$$\begin{aligned} &|\psi - \psi_h|_2 \leqslant c_1 \Big\{ \eta_1(\psi_h) + 2|\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} + \\ &\quad |\psi_h - \psi_H|_2^{1+\epsilon} |\psi_h - \psi_H|_1^{1-\epsilon} \Big\}, \\ &\|\nabla(\psi - \psi_h)\|_0 \leqslant c_2 \Big\{ \eta_2(\psi_h) + 2|\psi_h|_2 |\psi_H - \psi_h|_1 + \\ &\quad h^{2-\epsilon} |\psi_h|_2 |\psi_h - \psi_H|_1^{1-\epsilon} |\psi_h - \psi_H|_2^{\epsilon} + \\ &\quad h^2 |\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon} |\psi_H - \psi_h|_2^{\epsilon} + \\ &\quad h^{2+\epsilon} |\psi_h - \psi_H|_2^{1+\epsilon} |\psi_h - \psi_H|_2^{1-\epsilon} + |\psi_h - \psi_H|_1 |\psi_h - \psi_H|_2 \Big\}, \end{aligned}$$

其中 c_1 和 c_2 分别和定理 3.3, 定理 3.4 中的常数 c 相同.

下面, 我们将给出两重网格算法的第三步: 在粗网格上求解一个校正的线性问题. [4] 在求解半线性椭圆问题时首先提出了这种想法. 为了得出这种算法的误差估计, 需要引如投影算子 $P_H: X \to X^H$ 满足: 对于 $\forall \psi \in X^H$, $\phi \in X$

$$\begin{aligned} &a(\psi, P_H \phi) + b(\psi_H, \psi, P_H \phi) + b(\psi, \psi_H, P_H \phi) = \\ &\quad a(\psi, \phi) + b(\psi_H, \psi, \phi) + b(\psi, \psi_H, \phi). \end{aligned}$$

由[1]知, 当 H 充分小时, 算子 P_H 的定义是合理的, 并且有估计式

$$\begin{cases} |\phi - P_H \phi|_2 \leqslant \inf\limits_{\phi \in X,\ \phi^H \in X^H} |\phi - \phi^H|_2, \\ |\phi - P_H \phi|_1 \leqslant cH |\phi - P_H \phi|_2 \end{cases} \tag{44}$$

成立.

算法 5

1) 与算法 2 的第一步相同;

2) 与算法 2 的第二步相同, 记它的解为 ψ_*;

3) 求 $e_H \in X^H$, 使得对于 $\forall \phi_H \in X^H$

$$a(e_H, \phi_H) + b(\psi_H, e_H, \phi_H) + b(e_H, \psi_H, \phi_H) = -b(\psi_* - \psi_H, \psi_* - \psi_H, \phi_H).$$

记逼近解为 $\psi_h = \psi_* + e_H$.

在[1]中, 作者已经给出了如下的先验估计:

$$|\psi - \psi_h|_2 \leqslant c(h^2 + H^5),$$

故, 对于范数 $|\cdot|_2$, 当粗网格和细网格尺寸满足 $H = O(h^{2/5})$ 时, 能达到最优收敛精度.

经过简单的计算, 我们可以得到算法 5 的满足逼近 Galerkin 正交性的式子为: 对 $\forall \phi_h \in X^h$

$$\begin{aligned} & a(\psi - \psi_h, \phi_h) + b(\psi, \psi, \phi_h) - b(\psi_h, \psi_h, \phi_h) = \\ & \quad b(\psi_H - \psi_h, \psi_h - \psi_H, \phi_h) + b(\psi_H - \psi_*, \psi_H - \psi_*, \phi_h) - \\ & \quad b(\psi_H - \psi_*, \psi_H - \psi_*, \phi_h - P_H\phi_h). \end{aligned} \tag{45}$$

由(15), (13) 和(20), 令(45) 式中 $\phi_h = R_X\phi$ 得

$$\left\{ \begin{aligned} & |b(\psi_H - \psi_h, \psi_h - \psi_H, \phi_h)| \leqslant \\ & \quad c|\psi_H - \psi_h|_2^{1+\epsilon}|\psi_h - \psi_H|_1^{1-\epsilon}|R_X\phi|_2 \leqslant \\ & \quad c|\psi_H - \psi_h|_2^{1+\epsilon}|\psi_h - \psi_H|_1^{1-\epsilon}|\phi|_2, \\ & |b(\psi_H - \psi_*, \psi_H - \psi_*, \phi_h)| \leqslant \\ & \quad c|\psi_H - \psi_*|_2^{1+\epsilon}|\psi_* - \psi_H|_1^{1-\epsilon}|\phi|_2, \\ & b(\psi_H - \psi_*, \psi_H - \psi_*, \phi_h - P_H\phi_h)| \leqslant \\ & \quad c|\psi_H - \psi_*|_2^{1+\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_1^{1-\epsilon}|\phi_h - P_H\phi_h|_1^{\epsilon}|\phi_h - P_H\phi_h|_2^{1-\epsilon} \leqslant \\ & \quad cH^{2+\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_2^{1+\epsilon}|\phi|_2. \end{aligned} \right. \tag{46}$$

当估计 $\|\Delta(\psi - \psi_h)\|_0$ 时, 需要下面的不等式(其中 $\phi_h = R_Xz$):

$$\begin{aligned} & |b(\psi_H - \psi_h, \psi_h - \psi_H, \phi_h)| \leqslant \\ & \quad |b(\psi_H - \psi_h, \psi_h - \psi_H, z - R_Xz)| + |b(\psi_H - \psi_h, \psi_h - \psi_H, z)| \leqslant \\ & \quad c|\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon}|\psi_H - \psi_h|_2^{1+\epsilon}|z - R_Xz|_1^{\epsilon}|z - R_Xz|_2^{1-\epsilon} + \\ & \quad c|\psi_H - \psi_h|_2|\psi_h - \psi_H|_1|z|_4 \leqslant \\ & \quad cc_s h^{2+\epsilon}|\psi_H - \psi_h|_1^{1-\epsilon}|\psi_H - \psi_h|_2^{1+\epsilon} + \\ & \quad |\psi_H - \psi_h|_2|\psi_h - \psi_H|_1)\|\Delta(\psi - \psi_h)\|_0, \\ & |b(\psi_H - \psi_*, \psi_H - \psi_*, \phi_h)| \leqslant \\ & \quad cc_s(h^{2+\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_2^{1+\epsilon} + \\ & \quad |\psi_H - \psi_*|_2|\psi_H - \psi_*|_1)\|\Delta(\psi - \psi_h)\|_0, \\ & |b(\psi_H - \psi_*, \psi_H - \psi_*, \phi_h - P_H\phi_h)| \leqslant \\ & \quad cH^2|\psi_H - \psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_2^{1+\epsilon}|z|_4 \leqslant \\ & \quad cH^2|\psi_H - \psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H - \psi_*|_2^{1+\epsilon}\|\Delta(\psi - \psi_h)\|_0. \end{aligned}$$

由以上讨论, 按照定理 2.1 的证明思想, 可得下述定理:

定理 3.6 在定理 3.1 和定理 3.2 的条件下, 算法 5 的解 ψ_h 满足如下的后验误差估计:

$$|\psi - \psi_h|_2 \leqslant c(\eta_1(\psi_h) + |\psi_H - \psi_h|_2^{1+\epsilon}|\psi_h - \psi_H|_1^{1-\epsilon} +$$

$$|\psi_H-\psi_*|_2^{1+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}+H^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^{1+\epsilon}),$$

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0\leqslant$$

$$c\Big\{\eta_2(\psi_h)+h^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_2^{1+\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_2|\psi_h-\psi_H|_1+$$
$$h^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^{1+\epsilon}+|\psi_H-\psi_*|_2|\psi_H-\psi_*|_1+$$
$$H^2|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^{1+\epsilon}\Big\},$$

其中 c 是依赖于 c_i, c_s 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数•

定理 3.6 中起决定作用的额外项是 $|\psi_H-\psi_*|_2^{1+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}$• 由于 $\psi-\psi_*$ 的渐近性比 $\psi-\psi_H$ 的渐近性好, 见(29), 由三角不等式和关于 $\psi-\psi_H$ 的先验估计(4)(其中 ψ_h 被 ψ_H 代替) 知额外项具有 $O(H^{5-\epsilon})$ 的渐近性• 对于 H^1 范数, 额外项具有 $O(H^5)$ 的渐近性•

算法 6

1) 和算法 3 的第一步相同;

2) 和算法 3 的第二步相同, 记解为 ψ_*;

3) 求 $e_H\in X^H$, 使得对于 $\forall\phi_H\in X^H$

$$a(e_H,\phi_H)+b(\psi_H,e_H,\phi_H)+b(e_H,\psi_H,\phi_H)=$$
$$b(\psi_H-\psi_*,\psi_H,\phi_H)\text{•}$$

记逼近解为 $\psi_h=\psi_*+e_H$•

定理 3.7 在定理 3.1 和定理 3.2 的假设下, 算法 6 的解 ψ_h 满足如下的后验误差估计:

$$|\psi-\psi_h|_2\leqslant c_1\Big\{\eta_1(\psi_h)+H^\epsilon|\psi_H|_2|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^\epsilon+$$
$$|\psi_H-\psi_*|_2^{1+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}\Big\},$$
$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0\leqslant c_2\Big\{\eta_2(\psi_h)+h^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_2^{1+\epsilon}+$$
$$|\psi_H-\psi_h|_2|\psi_h-\psi_H|_1+h^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^\epsilon|\psi_H|_2\Big\},$$

其中 c_1 和 c_2 分别和定理 3.1, 定理 3.2 中的 c 相同•

为了证明定理 3.7, 我们只需要得到算法 6 的逼近 Galerkin 正交性的式子• 由方程(2), 算法 6 的第二步和第三步, 可得它满足逼近 Galerkin 正交性的式子:

$$a(\psi-\psi_h,\phi_h)+b(\psi,\psi,\phi_h)-b(\psi_h,\psi_h,\phi_h)=$$
$$-b(\psi_h-\psi_H,\psi_h-\psi_H,\phi_h)+b(\psi_H-\psi_*,\psi_H,\phi_h-P_H\phi_h)\text{•}\tag{47}$$

当 $\phi_h=R_X\Phi$ 和 $\phi_h=R_Xz$ 时, (33) 和(35) 式已经估计了(47) 式右端的第一项, 下面我们分别令 $\phi_h=R_X\Phi$, $\phi_h=R_Xz$ 估计它的第二项•

$$|b(\psi_H-\psi_*,\psi_H,\phi_h-P_H\phi_h)|\leqslant$$
$$c|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^\epsilon|\psi_H|_2|\phi_h-P_H\phi_h|_2^{1-\epsilon}|\phi_h-P_H\phi_h|_1^\epsilon\leqslant$$
$$cH^\epsilon|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^\epsilon|\psi_H|_2|\Phi|_2,$$
$$|b(\psi_H-\psi_*,\psi_H,\phi_h-P_H\phi_h)|\leqslant$$
$$ch^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^\epsilon|\psi_H|_2|z|_4\leqslant$$
$$ch^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^\epsilon|\psi_H|_2\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0\text{•}\tag{48}$$

联立(48) 和定理 2.1 可得定理 3.7• □

算法 7

1) 与算法 4 的第一步相同;

2) 与算法 4 的第二步相同, 记解为 ψ_*;

3) 求 $e_H \in X^h$, 使得对 $\forall \phi_h \in X^H$

$$a(e_H, \phi_H) + b(e_H, \psi_H, \phi_H) + b(\psi_H, e_H, \phi_H) = b(\psi_H, \psi_H - \psi_h, \phi_H) + b(\psi_H - \psi_h, \psi_H, \phi_H)• \tag{49}$$

记逼近解为 $\psi_h = \psi_* + e_H$•

由方程(2), 算法 7 的第二步和(49), 知

$$a(\psi - \psi_h, \phi_h) + b(\psi, \psi, \phi_h) - b(\psi_h, \psi_h, \phi_h) = - b(\psi_h - \psi_H, \psi_h - \psi_H, \phi_h) + b(\psi_H, \psi_H - \psi_*, \phi_h - P_H\phi_h) + b(\psi_H - \psi_*, \psi_H, \phi_h - P_H\phi_h)• \tag{50}$$

当 $\phi_h = R_X\phi$ 和 $\phi_h = R_Xz$ 时, (33), (35) 和(48) 式已经估计了(50) 式右端的第一和第三项, 我们只需分别令 $\phi_h = R_X\phi$ 和 $\phi_h = R_Xz$ 估计它的第二项•

$$| b(\psi_H, \psi_H - \psi_*, \phi_h - P_H\phi_h) | \leqslant c | \psi_H |_2 | \psi_H - \psi_* |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_* |_2^{\epsilon} | \phi_h - P_H\phi_h |_1^{\epsilon} | \phi_h - P_H\phi_h |_2^{1-\epsilon} \leqslant cH^{\epsilon} | \psi_H |_2 | \psi_H - \psi_* |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_* |_2^{\epsilon} | \phi |_2,$$

$$| b(\psi_H, \psi_H - \psi_*, \phi_h - P_H\phi_h) | \leqslant c | \psi_H |_2 | \psi_H - \psi_* |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_* |_2^{\epsilon} | \phi_h - P_H\phi_h |_1^{\epsilon} | \phi_h - P_H\phi_h |_2^{1-\epsilon} \leqslant cH^{2+\epsilon} | \psi_H |_2 | \psi_H - \psi_* |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_* |_2^{\epsilon} | z |_4,$$

故, 由上面的不等式和定理 2. 1 及定理 2. 2 的证明思想, 我们很容易得到下面的定理:

定理 3. 8 在定理 3. 1 的条件下, 算法 7 的解 ψ_h 满足如下的后验误差估计:

$$| \psi - \psi_h |_2 \leqslant c\Big\{ \eta_1(\psi_h) + H^{\epsilon} | \psi_H |_2 | \psi_H - \psi_* |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_* |_2^{\epsilon} + | \psi_H - \psi_h |_2^{1+\epsilon} | \psi_H - \psi_h |_1^{1-\epsilon} \Big\},$$

其中 c 是依赖于 ψ, c_i 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数•

定理 3. 9 在定理 3. 2 的条件下, 算法 7 的解 ψ_h 满足如下的后验误差估计:

$$\| \nabla(\psi - \psi_h) \|_0 \leqslant c\Big\{ \eta_2(\psi_h) + h^{2+\epsilon} | \psi_H |_2 | \psi_H - \psi_* |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_* |_2^{\epsilon} + h^{2+\epsilon} | \psi_H - \psi_h |_1^{1-\epsilon} | \psi_H - \psi_h |_2^{1+\epsilon} + | \psi_H - \psi_h |_2 | \psi_H - \psi_h |_1 \Big\},$$

其中 c 是依赖于 c_i, c_s 和 $c(\theta_{\min})$ 的正常数•

经过简单的计算知, 算法 6 和算法 7 的额外项的 H^2 误差都具有 $O(H^3)$ 的渐近性, H^1 误差都具有 $O(H^5)$ 的渐近性•

算法 8

1) 求 $\psi_H \in X^H$, 使得对于 $\forall \phi_H \in X^H$

$$\delta a_1(\psi_H, \phi_H) + a(\psi_H, \phi_H) + b(\psi_H, \psi_H, \phi_H) = (\mathrm{rot} f, \phi_H);$$

2) 求 $\psi_* \in X^h$, 使得对于 $\forall \phi_h \in X^h$

$$a(\psi_*, \phi_h) + b(\psi_*, \psi_H, \phi_h) = (\mathrm{rot} f, \phi_h);$$

3) 求 $e_H \in X^H$, 使得对于 $\forall \phi_H \in X^H$

$$a(e_H, \phi_H) + b(e_H, \psi_H, \phi_H) + b(\psi_H, e_H, \phi_H) = - b(\psi_H, \psi_* - \psi_H, \phi_H)•$$

记两重网格算法的逼近解为 $\psi_h = \psi_* + e_H$, 其中 δ 满足 $\delta \geqslant 2c\lambda^{1} \|f\|_{-1}$, $a_1(\psi, \phi) = (\nabla \cdot \mathrm{rot}\,\psi, \nabla \cdot \mathrm{rot}\,\phi)$•

在[9]中, 作者已经证明了这种算法的先验误差估计:

$$|\psi-\psi_h|_2 \leqslant c(h^2+H^{5-\epsilon}).$$

定理 3.10 在定理 3.1 和定理 3.2 的条件下,算法 8 的解 ψ_h 满足下面的后验误差估计:

$$|\psi-\psi_h|_2 \leqslant c_1\Big\{\eta_1(\psi_h)+|\psi_h-\psi_H|_2^{1+\epsilon}|\psi_h-\psi_H|_1^{1-\epsilon}+ H^{\epsilon}|\psi_H|_2|\psi_H-\psi_h|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_2^{\epsilon}\Big\},$$

$$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0 \leqslant c_2\Big\{\eta_2(\psi_h)+h^{2+\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_h|_2^{1+\epsilon}+ |\psi_H-\psi_h|_2|\psi_H-\psi_h|_1+H^{2+\epsilon}|\psi_H|_2|\psi_H-\psi_*|_1^{1-\epsilon}|\psi_H-\psi_*|_2^{\epsilon}\Big\},$$

其中 c_1 和 c_2 分别与定理 3.1 及定理 3.2 中的 c 相同.

证明 由(2),(31)和算法 8,可得算法 8 满足逼近 Galerkin 正交性的式子.

$$a(\psi-\psi_h,\Phi_h)+b(\psi,\psi,\Phi_h)-b(\psi_h,\psi_h,\Phi_h)= b(\psi_H,\psi_H-\psi_*,P_H\Phi_h-\Phi_h)-b(\psi_h-\psi_H,\psi_h-\psi_H,\Phi_h). \tag{51}$$

分别令(51)式的右端项 $\Phi_h=R_X\Phi$ 和 $\Phi_h=R_Xz$, 在定理 3.8 的证明中已经估计了这些三线性项. 由定理 2.1 和定理 2.2 的证明思想,可得定理 3.10. □

由定理 3.10,我们可知算法 8 额外项的 H^2 和 H^1 误差分别具有 $O(H^3)$ 和 $O(H^5)$ 的渐近性.

4 结 论

我们已经推出了 Navier_Stokes 方程流函数形式 7 种两重网格算法离散解的残量型后验误差估计. 由于这些算法只满足逼近的 Galerkin 正交性,从而产生了估计中的额外项. 对于最优的网格尺寸,通常情况下,这些额外项的渐近阶(见表 1)没有离散解的收敛阶高. 因此在实际计算中,为了得到渐近最优的后验误差估计,必须计算这些额外项.

表 1 后验误差估计界和额外项的渐近界

算法	$\|\psi-\psi_h\|_2$	$\|\nabla(\psi-\psi_h)\|_0$
1	$\eta_1(\psi_h)$	$\eta_2(\psi_h)$
2	$\eta_1(\psi_h)+O(H^{5-\epsilon})$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^5)$
3	$\eta_1(\psi_h)+O(H^{3-\epsilon})$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^3)$
4	$\eta_1(\psi_h)+O(H^{3-\epsilon})$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^3)$
5	$\eta_1(\psi_h)+O(H^{5-\epsilon})$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^5)$
6	$\eta_1(\psi_h)+O(H^3)$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^5)$
7	$\eta_1(\psi_h)+O(H^3)$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^5)$
8	$\eta_1(\psi_h)+O(H^3)$	$\eta_2(\psi_h)+O(H^5)$

[参 考 文 献]

[1] Ye Xu. Two_grid discretion with backtracking of the stream function form of the Navier_Stokes equations[J]. Appl Math Comp, 1999, **100**(2/3): 131—138.

[2] Layton W, Ye X. Two level discretion of the stream function form of the Navier_Stokes equations[J]. Numer Funct Anal And Optimi, 1999, **20**(9/10): 909—916.

[3] Fairag F. A Two_level finite element discretization of the stream function form of the Navier_Stokes equations[J]. Comput Math Appl, 1998, **36**(2): 117—127.

[4] XU Jin_chao. A novel two_grid method for semilinear elliptic equations[J]. SIAM J Sci Comput,

1994, **15**(1): 231—237.

[5] XU Jin_chao. Two_grid finite element discretizations for nonlinear PDE s[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, **33**(5): 1759—1777.

[6] Layton W. A two_level discretization method for the Navier_Stokes equations[J]. Comput Appl Math, 1993, **26**(2): 33—38.

[7] Layton W, Lenferink W. Two_level Picard and modified Picard methods for the Navier_Stokes equations[J]. Appl Math Comput, 1995, **80**: 1—12.

[8] Layton W, Tobiska L. A two_level method with backtracking for the Navier_Stokes equations[J]. SIAM J Numer Anal, 1998, **35**(5): 2035—2054.

[9] 任春风, 马逸尘. Navier_Stokes 方程流函数形式两重网格算法的误差分析[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(7): 689—696.

[10] Verf rth R. A review of a posteriori error estimates for nonlinear problems, L^r_estimate for finite element discretization of elliptic equations[J]. Math Comp, 1998, **67**(224): 1335—1360.

[11] Volker John. Residual a posteriori error estimates for two_level finite element methods for the Navier_Stokes equations[J]. Applied Numerical Mathematics, 2001, **37**(4): 503—518.

[12] Angermann L. A posteriori error estimates for FEM with violated Galerkin orthogonality[J]. Numer Methods Partial Differential Equations, 2002, **18**(2): 241—259.

[13] Cl ment Ph. Approximation by finite element functions using local regularization[J]. RAIRO Anal Numer, 1995, **9**(2): 77—84.

[14] Ervin V, Layton W, Maubach J. A posteriori error estimators for a two_level finite element method for the Navier_Stokes equations[J] Numer Methods Partial Differential Equations, 1996, **12**(3): 333—346.

Residual a Posteriori Error Estimate Two_Grid Methods for the Steady Navier_Stokes Equation With Stream Function Form

REN Chun_feng, MA Yi_chen

(College of Science, Xi'an Jiaotong Univeristy, Xi'an 710049, P.R.China)

Abstract: Residual based on a posteriori error estimates for conforming finite element solutions of incompressible Navier_Stokes equations with stream function form which were computed with seven recently proposed two_level method were derived. The a posteriori error estimates contained additional terms in comparison to the error estimates for the solution obtained by the standard finite element method. The importance of these additional terms in the error estimates was investigated by studying their asymptotic behavior. For optimal scaled meshes, these bounds are not of higher order than of convergence of discrete solution.

Key words: two_level method; Navier_Stokes equation; residual a posteriori error estimate; finite element method; stream function form