文章编号: 1000_0887(2006) 04_0439_08

拓扑空间中 Fan_Browder 映射的连续选择定理及其应用*

杨明歌, 邓 磊

(西南大学 数学与财经学院, 重庆 400715)

(一协平推荐)

摘要: 首先, 在不具有任何凸性结构的拓扑空间中引入 Fan_Browder 映射的概念. 然后, 证明了一个新的关于Fan_Browder 映射的连续选择定理,其中定义域是非紧的,值域是不具有任何凸性结构的拓扑空间的子集. 作为应用, 给出了一些不动点定理、叠合点定理和一个非空交定理. 这些新的概念和定理统一和推广了许多已有的结果.

关 键 词: Fan_Browder 映射; 连续选择; 不动点; 叠合点
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

在文献[1, 2]中, Browder 证明了任何一个从Hausdorff 紧空间到凸空间且具有凸值和开纤维的集值映射都有连续选择, 应用这一事实证明了著名的 Fan_Browder 不动点定理. 以后, 连续选择定理在文献[3~ 12]中相继被阐述, 并被许多作者所应用.

Horvath 在文献[8, 9]中把连续选择定理推广到 C_空间(或 H_空间); Park 和 Kim 在文献[13, 14]中将H_空间的概念推广到 G_凸空间; Lin 和 Park 在文献[15]以及 Park 在文献[10, 11]中都将连续选择定理从 C_空间推广到G_凸空间; Yu 和Lin 在文献[16]中将连续选择定理推广到定义域非紧, 值域包含在G_凸空间或与 G_凸空间相关的空间; Ding 和 Park 在文献[17]中将连续选择定理推广到定义域是正规空间, 值域包含在 G_凸空间. 不难发现上述研究中所涉及的空间都具有某种凸性结构. 最近, Deng 和 Xia 在文献[18]中引进广义 R_KKM 映射的概念, 并在不具有任何凸性结构的拓扑空间中研究了广义 R_KKM 定理.

受上述研究的启发, 我们试图研究关于 Fan_Browder 映射(Φ_映射) 的连续选择定理, 其中定义域是非紧的, 值域包含在不具有任何凸性结构的拓扑空间中.

Φ_映射的概念起源于 Horvath 的文献[19], 以后被 Park 在文献[10, 20]中推广, Ding 在文献[21]中也推广了 Φ_映射的概念, 并且是Park 在文献[10, 20]中引进的 Φ_映射的真推广. 注意到他们所引进的 Φ_映射的值域都包含在 G_凸空间或与 G_凸空间相关的空间.

在本文中, 我们首先利用文献[18]中引进的广义 R_KKM 映射, 将 Φ_映射的概念从 G_凸

* 收稿日期: 2004_09_09; 修订日期: 2005_12_16
基金项目: 重庆市科委自然科学基金资助项目(CSTC, 2005BB2097)
作者简介: 杨明歌(1982—), 女, 河南偃师人, 硕士研究生;
邓磊(联系人. Tel: + 86_23_68388606; E_mail: denglei@swu.edu.cn).

空间推广到不具有任何凸性结构的拓扑空间. 这个定义包含 Park 在文献[10,20]以及 Ding 在文献[21]中所引入的 Φ_映射为特例. 然后在不具有任何凸性结构的拓扑空间给出了一些连续选择定理. 作为应用,给出了一些不动点定理、叠合点定理及一个非空交定理.

1 预备知识

设 X 和 Y 是两个非空集合,我们分别用 2^Y 和 $\langle X\rangle$ 表示 Y 的所有子集构成的集族和 X 的所有非空有限子集构成的集族. 对任意的 $A\in\langle X\rangle$, $|A|$ 表示 A 的基数. Δ_n 表示 n_维标准单形,即

$$\Delta_n=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathscr{R}^{n+1}:\boldsymbol{u}=\sum_{i=0}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_i,\ \lambda_i(\boldsymbol{u})\geqslant 0,\ \sum_{i=0}^{n}\lambda_i(\boldsymbol{u})=1\right\},$$

其中 $\boldsymbol{e}_i(i=0,\cdots,n)$ 是 $\mathscr{R}^{n+1}$ 中第 $i+1$ 个单位向量.

设 $T:X\to 2^Y$ 是一个集值映射,对任意 $B\subset Y$, B 在 T 下的逆定义为

$$T^-(B)=\{x\in X:T(x)\cap B\neq\varnothing\}.$$

$T:X\to 2^Y$ 的逆是集值映射 $T^-:Y\to 2^X$, 其中 $x\in T^-(y)$ 当且仅当 $y\in T(x)$.

设 X 是一个非空集合, Y 是一个拓扑空间, $W:X\to 2^Y$ 称为广义相对 KKM(或广义 R_KKM)映射,如果对任意的 $A\in\langle X\rangle$ 并且 $|A|=n+1$, 存在连续映射 $\varphi_A:\Delta_n\to Y$ 使得对任意的 $J\in\langle A\rangle$ 都有

$$\varphi_A(\Delta_J)\subset W(J),$$

其中 Δ_J 表示与 J 相对应的 Δ_n 的标准子单形. 关于这一定义可参考 Deng 和 Xia 的文献[18].

如果连续映射 $f:X\to Y$ 满足对所有的 $x\in X$ 都有 $f(x)\in T(x)$ 成立,则它称为集值映射 $T:X\to 2^Y$ 的一个连续选择.

引理 1.1[22] 设 X 和 Y 均为拓扑空间, $G:X\to 2^Y$ 是一个具有非空值的集值映射,则下述 5 个条件等价:

(ⅰ) G 具有局部交性质;

(ⅱ) 对任意 $y\in Y$, 存在 X 的开子集 O_y(可能是空的)满足 $O_y\subset G^-(y)$ 和 $X=\bigcup_{y\in Y}O_y$;

(ⅲ) 存在集值映射 $F:X\to 2^Y$ 满足对任意 $x\in X$ 有 $F(x)\subset G(x)$, 对任意 $y\in Y$ 有 $F^-(y)$ 是 X 中开子集,并且 $X=\bigcup_{y\in Y}F^-(y)$;

(ⅳ) $X=\bigcup_{y\in Y}\operatorname{int}G^-(y)$;

(ⅴ) $G^-:Y\to 2^X$ 在 X 上是转移开值的.

现在,我们给出不具有任何凸性结构的拓扑空间中 Φ_映射的定义如下:

定义 1.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, D 是 Y 的非空子集,集值映射 $T:X\to 2^Y$ 称为 Φ_映射,如果存在一个广义 R_KKM 映射 $W:D\to 2^Y$ 和一个集值映射 $S:X\to 2^D$ 满足

(a) 对任意 $x\in X$, 若 $M\in\langle S(x)\rangle$, 则 $W(M)\subset T(x)$;

(b) S 满足引理 1.1 中条件(ⅰ)~(ⅴ)中的一个.

分别称 $S:X\to 2^D$ 和 $W:D\to 2^Y$ 为在 Φ_映射 $T:X\to 2^Y$ 的定义中出现的伴随映射和广义 R_KKM 映射.

注意到对任何一个 G_凸空间 $(Y,D;\Gamma)$ 而言, $\Gamma:\langle D\rangle\to 2^Y$ 就是一个广义 R_KKM 映射. 因此,我们的 Φ_映射包含 Park 在文献[10,20]以及 Ding 在文献[21]中引进的 Φ_映射为特例.

引理 1.2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, D 是 Y 的非空子集. 如果 $T:X\to 2^Y$ 是 Φ_映射,并且 $W:D\to 2^Y$ 和 $S:X\to 2^D$ 分别是在 Φ_映射 $T:X\to 2^Y$ 的定义中出现的广义 R_KKM 映射和伴

随映射. 若 L_M 是X 的一个开子集, 则 $T\mid_{L_M}: L_M \to 2^Y$ 是 Φ_映射, 并且 $W: D \to 2^Y$ 和$S\mid_{L_M}: L_M \to 2^D$ 分别是在 Φ_映射$T\mid_{L_M}: L_M \to 2^Y$ 的定义中出现的广义 R_KKM 映射和伴随映射.

证明　由定义 1.1 的(a) 可知, 对任意 $x \in L_M$, 若 $M \in \langle S\mid_{L_M}(x)\rangle = \langle S(x)\rangle$, 则 $W(M) \subset T(x) = T\mid_{L_M}(x)$. 由定义 1.1 的(b) 和引理 1.1 可知 $X = \bigcup\left\{\mathrm{int}S^-(y): y \in D\right\}$, 因此 $L_M = \bigcup\left\{(\mathrm{int}S^-(y)) \cap L_M: y \in D\right\}$. 而 L_M 是开的, 故 $L_M = \bigcup\left\{(\mathrm{int}S^-(y)) \cap (\mathrm{int}L_M): y \in D\right\} = \bigcup\left\{\mathrm{int}(S^-(y)) \cap L_M: y \in D\right\} = \bigcup\left\{\mathrm{int}S\mid^-_{L_M}(y): y \in D\right\}$. 由定义 1.1 可知, 引理 1.2 的结论是真的. 证明完毕.

2　主要结果

在这一节, 我们将讨论一些连续选择定理.

定理 2.1　设X 是正规空间, Y是拓扑空间, D 是Y 的非空子集, $T: X \to 2^Y$是 Φ_映射, 并且 $S: X \to 2^D$ 是在 Φ_映射$T: X \to 2^Y$ 的定义中出现的伴随映射. 假设下列条件满足:

(i) 存在 X 的非空紧子集 K 使得对某$M \in \langle D\rangle$ 有 $X \setminus K \subset \bigcup\left\{\mathrm{int}S^-(y): y \in M\right\}$.

则 T 有连续选择$f: X \to Y$, 并且$f = \psi\circ\varphi$, 其中 $\varphi: X \to \Delta_n$ 和 $\psi: \Delta_n \to Y$ 都是连续的, n 是某个正整数.

证明　由定义 1.1 的(b) 和引理 1.1, 可得 $K \subset \bigcup\left\{\mathrm{int}S^-(y): y \in D\right\}$. 因为$K$ 是紧的, 故存在 $P \in \langle D\rangle$ 使得$K \subset \bigcup\left\{\mathrm{int}S^-(y): y \in P\right\}$. 令 $A = M \cup P = \left\{y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}\right\} \in \langle D\rangle$, 则 $X = \bigcup_{i=1}^{n+1}\mathrm{int}S^-(y_i)$. 设 $W: D \to 2^Y$ 是在 Φ_映射T 的定义中出现的广义 R_KKM 映射, 则存在连续映射 $\psi: \Delta_n \to Y$ 使得对任意$J \in \langle A\rangle$ 都有 $\psi(\Delta_J) \subset W(J)$.

因为 X 是正规空间, 设$\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{n+1}$ 表示X 上的一个从属于$\left\{\mathrm{int}S^-(y_i)\right\}_{i=1}^{n+1}$ 的连续单位分解; 即

(i) 对任意 i, $\varphi_i: X \to [0, 1]$ 是连续的;

(ii) 对任意 $x \in X \setminus \mathrm{int}S^-(y_i)$ 有 $\varphi_i(x) = 0$;

(iii) 对任意 $x \in X$ 有 $\sum_{i=1}^{n+1}\varphi_i(x) = 1$.

定义 $\varphi: X \to \Delta_n$ 如下:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1}\varphi_i(x)\boldsymbol{e}_i, \qquad \forall x \in X,$$

其中 $\boldsymbol{e}_i(i = 1, 2, \cdots, n+1)$ 是 $\mathscr{R}^{n+1}$ 中的第 i 个单位向量. 显然, φ 是连续的. 对任意 $x \in X$, 令 $J(x) = \left\{i: 1 \leqslant i \leqslant n+1, \varphi_i(x) \neq 0\right\}$. 定义$f: X \to Y$ 如下:

$$f(x) = (\psi\circ\varphi)(x), \qquad \forall x \in X,$$

则f 是连续的. 对任意 $x \in X$, 令 $B(x) = \left\{y_i: i \in J(x)\right\}$, 则显然 $B(x)$ 是有限集. 对任意 $y_i \in B(x)$, 有 $i \in J(x)$, 从而 $\varphi_i(x) \neq 0$, 故 $x \in \mathrm{int}S^-(y_i)$. 因此, $y_i \in S(x)$, $B(x) \in \langle S(x)\rangle$. 由定义 1.1 的(a), 可得$f(x) = (\psi\circ\varphi)(x) \in \psi(\Delta_{B(x)}) \subset W(B(x)) \subset T(x)$. 因此, f 是T 的连续选择. 证明完毕.

注 2.1　因为我们的 Φ_映射包含 Park 在文献[10, 20] 中引进的 Φ_映射为特例, 所以定理 2.1 将 Yu 和 Lin 文献[16] 中的定理 1 和 Ding 和 Park 文献[17] 中的定理 3.1 从 G_凸空间推广到不具有任何凸性结构的拓扑空间中.

推论 2.1　设X 是紧的正规空间, Y是拓扑空间, D 是Y的非空子集, $T: X \to 2^Y$是 Φ_映

射. 则 T 有连续选择$f: X \to Y$, 并且$f = \psi \circ \varphi$, 其中 $\varphi: X \to \Delta_n$ 和 $\psi: \Delta_n \to Y$ 都是连续的, n 是某个正整数.

证明　因为 X 是紧的正规空间, 显然定理 2.1 的所有条件都满足. 由定理 2.1 易知推论 2.1 成立. 证明完毕.

注 2.2　由于推论 2.1 的 Φ_映射包含 Park 在文献[10,20] 中引进的 Φ_映射为特例, 所以推论 2.1 将 Yu 和 Lin 文献[16] 中的推论 1 从 G_凸空间推广到不具有任何凸性结构的拓扑空间.

推论 2.2　设 X 是正规空间, Y 是拓扑空间, D 是 Y 的非空子集, $T: X \to 2^Y$ 是 Φ_映射, $T(X) \subset D$, 并且它本身就是在 Φ_映射$T: X \to 2^Y$ 的定义中出现的伴随映射, 假设下列条件满足:

(ⅰ) 存在 X 的非空紧子集K 使得对某$M \in \langle D \rangle$ 有 $X \setminus K \subset \bigcup\left\{\operatorname{int} T^{-}(y): y \in M\right\}$.

则 T 有连续选择$f: X \to Y$, 并且$f = \psi \circ \varphi$, 并且 $\varphi: X \to \Delta_n$ 和 $\psi: \Delta_n \to Y$ 都是连续的, n 是某个正整数.

证明　令 $S = T$, 由定理 2.1 易得推论 2.2. 证明完毕.

定理 2.2　设 X 是拓扑空间, D 是X 的非空子集, $T: X \to 2^X$ 是 Φ_映射, $S: X \to 2^D$ 和 $W: D \to 2^X$ 分别是在 Φ_映射$T: X \to 2^X$ 的定义中出现的伴随映射和广义 R_KKM 映射, L_M 是X 的开子集, 并且 L_M 是紧的正规空间. 则存在 $T|_{L_M}$ 的连续选择$f: L_M \to X$, 并且$f = \psi \circ \varphi$, 其中 $\varphi: L_M \to \Delta_n$ 和 $\psi: \Delta_n \to X$ 都是连续的, n 是某个正整数.

证明　由引理 1.2, 我们可得 $T|_{L_M}: L_M \to 2^X$ 是一个 Φ_映射, $S|_{L_M}: L_M \to 2^D$ 和$W: D \to 2^X$ 分别是在 Φ_映射$T|_{L_M}: L_M \to 2^X$ 的定义中出现的伴随映射和广义 R_KKM 映射. 又 L_M 是紧的正规空间, 由推论 2.1 易得定理 2.2. 证明完毕.

注 2.3　Yu 和 Lin 文献[16] 中定理 2 的条件(ⅲ) 不需要, 但需增加条件"L_M 是X 的开子集, 并且 L_M 是紧的正规空间", 这样我们在不具有任何凸性结构的拓扑空间中得到了与 Yu 和 Lin 文献[16] 中定理 2 类似的结果. 我们指出: 在文献[16] 的定理 2 中由 $L_M = \bigcup\left\{\operatorname{int}_{L_M} S^{-}(y): y \in L_M\right\}$, 并不能得到 $L_M = \bigcup\left\{\operatorname{int} S|^{-}_{L_M}(y): y \in D\right\}$. 这是因为$L_M$ 是 Hausdorff 空间的紧子集, 从而 L_M 是闭的, 则 $\operatorname{int} S|^{-}_{L_M}(y) = \operatorname{int}(S^{-}(y) \cap L_M) = \operatorname{int} S^{-}(y) \cap \operatorname{int} L_M \neq \operatorname{int} S^{-}(y) \cap L_M = \operatorname{int}_{L_M} S^{-}(y)$. 因此, 从 $L_M = \bigcup\left\{\operatorname{int}_{L_M} S^{-}(y): y \in L_M\right\}$ 得不到 $L_M = \bigcup\left\{\operatorname{int} S|^{-}_{L_M}(y): y \in L_M\right\}$.

3　在不动点定理方面的应用

定理 3.1　设$\left\{X_i\right\}_{i \in I}$ 是一族拓扑空间, 其中 I 是有限或无限的指标集. $X = \prod_{i \in I} X_i$ 是正规空间. 对任意 $i \in I$, D_i 是X_i 的非空子集, $T_i: X \to 2^{X_i}$ 是 Φ_映射, 并且 $S_i: X \to 2^{D_i}$ 是在 Φ_映射 $T_i: X \to 2^{X_i}$ 的定义中出现的伴随映射. 假设下列条件满足:

(ⅰ) 对任意$i \in I$, 存在X_i 的非空紧子集K_i 使得对某$M_i \in \langle D_i \rangle$有 $X \setminus K \subset \bigcup_{y_i \in M_i} \operatorname{int} S_i^{-}(y_i)$, 其中 $K = \prod_{i \in I} K_i$.

则存在一点$\hat{x} \in X$ 使得$\hat{x} \in T(\hat{x}) = \prod_{i \in I} T_i(\hat{x})$, 即对任意 $i \in I$ 都有$\hat{x}_i \in T_i(\hat{x})$.

证明　因为 $K = \prod_{i \in I} K_i$, 故K 是X 的非空紧子集. 由条件(ⅰ) 可知, 对每一S_i, 定理 2.1 的条件(ⅰ) 满足. 由定理 2.1, 对每一 $i \in I$, 存在 T_i 的连续选择$f_i: X \to X_i$, 并且$f_i = \psi_i \circ \varphi_i$, 其中 $\varphi_i: X \to \Delta_{n_i}$ 和 $\psi_i: \Delta_{n_i} \to X_i$ 都是连续的, n_i 是某个正整数. 令 $D = \prod_{i \in I} \Delta_{n_i}$. 对每

一 $i\in I$, 令 E_i 表示集合 $\{e_0, e_1, \cdots, e_{n_i}\}$ 的线性包, 则 $E=\prod_{i\in I}E_i$ 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间, D 是 E 的紧凸子集. 定义连续映射 $\Psi: D\to X$ 和 $\Phi: X\to D$ 如下:

$$\Psi(t)=\prod_{i\in I}\psi_i(p_i(t)),\qquad \forall t\in D,$$

$$\Phi(x)=\prod_{i\in I}\varphi_i(x),\qquad \forall x\in X,$$

其中对每一 $i\in I$, $p_i: D\to\Delta_{n_i}$ 是 D 到 Δ_{n_i} 的投射. 由 Tychonoff 不动点定理, 连续映射 $\Phi\circ\Psi: D\to D$ 有一个不动点 $t\in D$, 即 $t=\Psi\circ\Phi(t)$. 令 $\hat{x}=\Psi(t)$, 则 $\hat{x}=(\Psi\circ\Phi)(\hat{x})=\Psi(\prod_{i\in I}\varphi_i(\hat{x}))=\prod_{i\in I}\psi_i(p_i(\prod_{i\in I}\varphi_i(\hat{x})))=\prod_{i\in I}(\psi_i\circ\varphi_i)(\hat{x})$. 从而对每一 $i\in I$, 有 $\hat{x}_i=(\psi_i\circ\varphi_i)(\hat{x})=f_i(\hat{x})\in T_i(\hat{x})$. 证明完毕.

注 3.1 定理 3.1 将 Ding 和 Park 文献[17] 中的定理 3.2 和 Park 文献[10] 中的定理3, 从 G_凸空间推广到不具任何凸性结构的拓扑空间. 注意到一族正规空间的积空间未必是正规空间, 因此我们将文献[17]的定理3.2 中的条件"$\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族正规空间" 去掉, 在定理3.1 中增加"$\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族拓扑空间, $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是正规空间".

定理 3.2 设 X 是正规空间, Y 是拓扑空间, D 是 Y 的非空子集, $T: X\to 2^Y$ 是 Φ_映射, 并且 $S: X\to 2^D$ 是在 Φ_映射 $T: X\to 2^Y$ 的定义中出现的伴随映射. 假设下列条件满足:

(i) 存在 X 的非空紧子集 K 使得对某 $M\in\langle D\rangle$ 有 $X\setminus K\subset\cup\{\operatorname{int}S^-(y): y\in M\}$.

则对任何连续映射 $h: Y\to X$, 存在一点 $\hat{y}\in Y$ 满足 $\hat{y}\in T(h(\hat{y}))$.

证明 由定理 2.1, T 有连续选择 $f: X\to Y$, 并且 $f=\psi\circ\varphi$, 其中 $\varphi: X\to\Delta_n$ 和 $\psi: \Delta_n\to Y$ 都是连续的, n 是某个正整数. 由 Brouwer 不动点定理, 连续映射 $\varphi\circ h\circ\psi: \Delta_n\to\Delta_n$ 有一个不动点 $z\in\Delta_n$. 令 $\hat{y}=\psi(z)$, 则 $\hat{y}=(\psi\circ\varphi\circ h)(\hat{y})$. 因为 $f=\psi\circ\varphi$ 是 T 的连续选择, 所以 $\hat{y}\in T(h(\hat{y}))$. 证明完毕.

推论 3.1 设 X 是正规空间, D 是 X 的非空子集, $T: X\to 2^X$ 是 Φ_映射, 并且 $S: X\to 2^D$ 是在 Φ_映射 $T: X\to 2^X$ 的定义中出现的伴随映射. 假设下列条件满足:

(i) 存在 X 的非空紧子集 K 使得对某 $M\in\langle D\rangle$ 有 $X\setminus K\subset\cup\{\operatorname{int}S^-(y): y\in M\}$.

则存在一点 $\hat{x}\in X$ 满足 $\hat{x}\in T(\hat{x})$.

证明 在定理 3.1 中令 I 是单点集, 则得推论 3.1. 证明完毕.

另证: 令 $Y=X$, $h=I$, 由定理 3.2 易知推论 3.1 成立. 证明完毕.

推论 3.2 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一族紧拓扑空间, 其中 I 是有限或无限的指标集. $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是正规空间. 对每一 $i\in I$, D_i 是 X_i 的非空子集, $T_i: X\to 2^{X_i}$ 是 Φ_映射. 则存在一点 $\hat{x}\in X$ 满足 $\hat{x}\in T(\hat{x})=\prod_{i\in I}T_i(\hat{x})$, 即对每一 $i\in I$, 都有 $\hat{x}_i\in T_i(\hat{x})$.

证明 对每一 $i\in I$, 令 $K_i=X_i$, 则由定理 3.1 可知推论 3.2 成立. 证明完毕.

4 在叠合点定理方面的应用

定理 4.1 设 X 是正规空间, Y 是拓扑空间, D 是 Y 的非空子集, $T: X\to 2^Y$ 是 Φ_映射, 并且 $S: X\to 2^D$ 是在 Φ_映射 $T: X\to 2^Y$ 的定义中出现的伴随映射. 假设下列条件满足:

(i) 存在 X 的非空紧子集 K 使得对某 $M\in\langle D\rangle$ 有 $X\setminus K\subset\cup\{\operatorname{int}S^-(y): y\in M\}$.

如果集值映射 $R: X\to 2^Y$ 满足 $R^-: Y\to 2^X$ 有连续选择, 则 R 和 T 有一个叠合点, 即存在 $\hat{x}\in X$ 满足 $R(\hat{x})\cap T(\hat{x})\neq\emptyset$.

证明　设 $h: Y \to X$ 是集值映射R^- 的连续选择. 则对任一 $y \in Y$, 有 $h(y) \in R^-(y)$ 或 $y \in R(h(y))$. 由定理 3.2, 存在$\hat{y} \in Y$ 满足$\hat{y} \in T(h(\hat{y}))$, 因此$\hat{y} \in R(h(\hat{y})) \cap T(h(\hat{y}))$. 令 $h(\hat{y}) = \hat{x}$, 则$\hat{y} \in R(\hat{x}) \cap T(\hat{x})$. 证明完毕.

定理 4.2　设 X 和 Y 均为正规空间, D_1 是 X 的非空子集, D_2 是 Y 的非空子集, $T: X \to 2^Y$ 是 Φ_映射, 并且 $S: X \to 2^{D_2}$ 是在 Φ_映射$T: X \to 2^Y$ 的定义中出现的伴随映射, $G^-: Y \to 2^X$ 是 Φ_映射, 并且 $F^-: Y \to 2^{D_1}$ 是在 Φ_映射$G^-: Y \to 2^X$ 的定义中出现的伴随映射. 假设下列条件成立:

(ⅰ) 存在 X 的非空紧子集K_1 使得对某 $M \in \langle D_2 \rangle$ 有 $X \setminus K_1 \subset \bigcup\left\{\operatorname{int} S^-(y): y \in M\right\}$;

(ⅱ) 存在 Y 的非空紧子集K_2 使得对某 $N \in \langle D_1 \rangle$ 有 $Y \setminus K_2 \subset \bigcup\left\{\operatorname{int} F(x): x \in N\right\}$.

则 T 和 G 有一个叠合点, 即存在$\hat{x} \in X$ 满足$T(\hat{x}) \cap G(\hat{x}) \neq \emptyset$.

证明　由定理 2.1, $G^-: Y \to 2^X$ 有连续选择. 再用定理 4.1, 可知定理 4.2 成立. 证明完毕.

5　在非空交定理方面的应用

设$\left\{X_i\right\}_{i \in I}$ 是一族集合, $X = \prod_{i \in I} X_i$. 对每一固定的 $i \in I$, 令$X^i = \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$. 如果 $x^i \in X^i$, 并且 $j \in I \setminus \{i\}$, 则 x_j^i 表示x^i 的第j 个坐标. 如果 $x^i \in X^i$, 并且 $x_i \in X_i$, 则$[x_i, x^i] \in X$ 定义为: 它的第 i 个坐标为x_i, 对任意$j \neq i$, 它的第 j 个坐标为x_j^i. 因此, 任意 $x \in X$ 都可表为 $x = [x_i, x^i]$, 其中 $i \in I$ 是任意的, x^i 表示x 在X^i 上的投射.

最后, 我们给出一个非空交定理:

定理 5.1　设$\left\{X_i\right\}_{i \in I}$ 是一族拓扑空间, 其中 I 是有限或无限的指标集. $X = \prod_{i \in I} X_i$ 是正规空间. 对任一 $i \in I$, $W_i: X_i \to 2^{X_i}$ 是广义 R_KKM 映射. $\left\{A_i\right\}_{i \in I}$ 和$\left\{B_i\right\}_{i \in I}$ 是X 的两个子集族, 并且对每一 $i \in I$, 下列条件满足:

(ⅰ) 对任意 $x^i \in X^i$ 和任意$N \in \langle A_i(x^i) \rangle$, 有 $W_i(N) \subset B_i(x^i)$, 并且存在一点 $y_i \in X_i$ 满足$x^i \in \operatorname{int} A_i(y_i)$, 其中$A_i(x^i) = \left\{y_i \in X_i: [y_i, x^i] \in A_i\right\}$, $B_i(x^i) = \left\{y_i \in X_i: [y_i, x^i] \in B_i\right\}$, $A_i(y_i) = \left\{x^i \in X^i: [y_i, x^i] \in A_i\right\}$;

(ⅱ) 对任意 $i \in I$, 存在X_i 的非空紧子集K_i 使得对某$M_i \in \langle X_i \rangle$有 $X \setminus K \subset \bigcup_{y_i \in M_i} (X_i \times \operatorname{int} A_i(y_i))$ 成立, 其中 $K = \prod_{i \in I} K_i$.

则 $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$.

证明　对任意 $i \in I$, 定义集值映射 $S_i, T_i: X \to 2^{X_i}$ 如下:

$$S_i(x) = A_i(x^i), \qquad \forall x \in X,$$

$$T_i(x) = B_i(x^i), \qquad \forall x \in X,$$

其中 x^i 是x 在X^i 上的投射. 由(ⅰ), 对任意 $x \in X$ 和任意$N \in \langle S_i(x) \rangle$, 有 $W_i(N) \subset T_i(x)$. 对任意$y_i \in X_i$, 有$S_i^-(y_i) = \left\{x \in X: y_i \in S_i(x)\right\} = \left\{[x_i, x^i] \in X: y_i \in A_i(x^i)\right\} = \left\{[x_i, x^i] \in X: [y_i, x^i] \in A_i\right\} = \left\{[x_i, x^i] \in X: x^i \in A_i(y_i)\right\} = X_i \times A_i(y_i) \supset X_i \times \operatorname{int} A_i(y_i)$, 从而 $\operatorname{int} S_i^-(y_i) \supset X_i \times \operatorname{int} A_i(y_i)$. 由条件(ⅰ)的后一部分可知, 对任意 $x \in X$, 存在 $y_i \in X_i$ 满足$x = [x_i, x^i] \in X_i \times \operatorname{int} A_i(y_i) \subset \operatorname{int} S_i^-(y_i)$. 因此, 对任意 $i \in I$, 有$X = \bigcup_{y_i \in X_i} \operatorname{int} S_i^-(y_i)$. 所以, 对任意 $i \in I$, T_i 是 Φ_映射, 并且 S_i 是在 Φ_映射T_i 的定义中出现的伴随映射. 由条件(ⅱ)可知, 对任意 $i \in I$, $X \setminus K \subset \bigcup_{y_i \in M_i} \operatorname{int} S_i^-(y_i)$. 定理 3.1 的所有条件满足. 由定理 3.1, 存在一点

$\hat{x} \in X$, 使得对任意 $i \in I$ 有 $\hat{x}_i \in T_i(\hat{x}) = B_i(\hat{x}^i)$, 即对任意 $i \in I$ 有 $\hat{x} \in B_i$. 此即 $\hat{x} \in \bigcap_{i \in I} B_i$. 证明完毕.

注 5.1 定理 5.1 将 Ding 和 Park 文献[17] 中的定理 4.1 从 G_凸空间推广到不具有任何凸性结构的拓扑空间.

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. A new generalization of the Schauder fixed point theorem[J]. Math Ann, 1967, **174**(2): 285—290.

[2] Browder F E. The fixed point theory of multi_valued mappings in topological vector spaces[J]. Math Ann, 1968, **177**(2): 283—301.

[3] DING Xie_ping, Kim W K, Tan K K. A selection theorem and its applications[J]. Bull Austral Math Soc, 1992, **46**(2): 205—212.

[4] DING Xie_ping. Continuous selection theorem, coincidence theorem and intersection theorem concerning sets with H_convex sections[J]. J Austral Math Soc, Ser A, 1992, **52**(1): 11—25.

[5] Ben_El_Mechaiekh H, Deguire D, Granas A. Points fixes et coincidences pour les functions multivaques(applications de Ky Fan)[J]. CR Acad Sci Paris, 1982, **295**: 337—340.

[6] Ben_El_Mechaiekh H, Deguire D, Granas A. Points fixes et coincidences pour les functions multivaques II(applications de type φ et φ*)[J]. CR Acad Sci Paris, 1982, **295**: 341—381.

[7] Yannelis N C, Prabhakar N D. Existence of maximal elements and equilibria in linear topological spaces[J]. J Math Econom, 1983, **12**(2): 233—245.

[8] Horvath C D. Contractibility and general convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341—357.

[9] Horvath C D. Extension and selection theorems in topological spaces with a generalized convexity structure[J]. Ann Fac Sci Toulouse, 1993, **2**(2): 253—269.

[10] Park S. Continuous selectin theorems in generalized convex spaces[J]. Numer Funct Anal Optimiz, 1999, **20**(5/6): 567—583.

[11] Park S. New topological versions of the Fan_Browder fixed point theorem[J]. Nonlinear Anal, 2001, **47**(1): 595—606.

[12] WU Xian, SHEN Shi_kai. A further generalization of Yannelis_Prabhakar's continuous selection theorem and its applications[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 61—74.

[13] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173—187.

[14] Park S, Kim H. Foundations of KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(3): 551—571.

[15] Lin L J, Park S. On some generalized quasi_equilibrium problems[J]. J Math Anal Appl, 1998, **224**(1): 167—181.

[16] YU Zenn Tsuen, LIN Lai_jiu. Continuous selection and fixed point theorems[J]. Nonlinear Anal, 2003, **52**(2): 445—455.

[17] DING Xie_ping, Park J Y. Collectively fixed point theorem and abstract economy in G_convex spaces[J]. Numer Funct Anal Optimiz, 2002, **23**(7/8): 779—790.

[18] DENG Lei, XIA Xia. Generalized R_KKM theorems in topological space and their applications[J]. J Math Anal Appl, 2003, **285**(2): 679—690.

[19] Horvath C D. Contractibility and generalized convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341—357.

[20] Park S. Fixed points of admissible maps on generalized convex spaces[J]. J Korean Math Soc, 2000, **37**(4): 885—899.

[21] DING Xie_ping. Coincidence theorems involving better admissible mappings and Φ_mappings in G_convex spaces[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2002, **25**(3): 221—225.

[22] DING Xie_ping. Coincidence theorems in topological spaces and their applications[J]. Appl Math Lett, 1999, **12**(7): 99—105.

Continuous Selection Theorems for Fan_Browder Mappings in Topological Spaces and Their Applications

YANG Ming_ge, DENG Lei
(School of Mathematics and Finance, Southwest University,
Chongqing 400715, P.R. China)

Abstract: The concept of Fan_Browder mappings was first introduced in topological spaces without any convex structure. Then a new continuous selection theorem was obtained for the Fan_Browder mapping with range in a topological space without any convex structure and noncompact domain. As applications, some fixed point theorems, coincidence theorems and a nonempty intersection theorem were given. Both the new concept and results unify and extend many known results in recent literature.

Key words: Fan_Browder mapping; continuous selection; fixed point; coincidence point