应用数学和力学, 第 27 卷 第 5 期 2006 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics Vol. 27, No. 5, May. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 05_0505_7

Hasegawa_Mima 方程的整体吸引子*

张瑞凤[1], 郭柏灵[2]

(1. 河南大学 数学与信息科学学院, 河南 开封 475001;
2. 应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑了带有耗散项的 Hasegawa_Mima 方程解的长时间性态, 研究了具有初值周期边值条件的Hasegawa_Mima 方程的整体吸引子问题• 运用关于时间的一致先验估计, 证明了该问题整体吸引子的存在性, 并获得了整体吸引子的维数估计•

关 键 词: Hasegawa_Mima 方程; 一致先验估计; 整体吸引子; Hausdorff 维数和分形维数

中图分类号: O175.2 文献标识码: A

引 言

我们考虑如下二维耗散的 Hasegawa_Mima 方程:

$$u_t - \triangle u_t - k_n u_y + \gamma(u - \triangle u) = \{u, \triangle u\} + f(x, y) \tag{1}$$

及初值

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \ (x, y) \in \Omega = (0, L_1) \times (0, L_2) \tag{2}$$

和周期边界条件

$$u(x + L_1, y + L_2, t) = u(x, y, t), \qquad t > 0• \tag{3}$$

这里 γ 和 k_n 是正常数• $\triangle$ 是二维拉普拉斯算子, $\{\cdot, \cdot\}$ 表示泊松括号

$$\{f, g\} = (\partial_x f)(\partial_y g) - (\partial_y f)(\partial_x g)•$$

方程(1) 是一类简单的二维湍流系统• 在等离子体中[1], 方程(1) 描述了漂移波的演化过程, 这里 u 是静电的涨落, 其中 $k_n = \partial_x \ln n_0$ 以及 n_0 是本底质点密度[2]• 在地球物理学流体中[3], 方程(1) 描述了地动的瞬时发展, 被称为 Rossby 波的拟地动势涡度方程, 这里 u 是地动流函数• Hasegawa_Mima 方程已在数值模拟和傅立叶级数分析方面被进行了实际研究, 二维湍流的重要特征已被发现(见文献[4]~ 文献[7]), 其解的存在性已被文献[8] ~ 文献[10] 讨论, 但是目前仍缺乏严格的结果•

我们将研究初值周期边值问题(1) ~ (3) 整体吸引子的存在性, 并将给出吸引子的维数估计• 运用关于时间的一致先验估计, 以及文献[11] 中 Temam 的方法, 我们将讨论问题(1) ~ (3) 解的渐近性态•

* 收稿日期: 2004_12_14; 修订日期: 2006_01_03
基金项目: 河南省教育厅自然科学研究基金资助项目(200311 0005)
作者简介: 张瑞凤(1964—), 女, 开封市人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_10_62014411_2547; E_mail: zrf615@henu.edu.cn)•

为叙述方便,我们约定:C 是广义常数,仅与数据(γ, k_n, f, R) 有关;$H = L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 为 Hilbert 空间,赋予通常内积$(\cdot,\ \cdot)$ 和范数 $\|\cdot\|$;对于所有 $1 \leqslant p \leqslant \infty$,$\|\cdot\|_p$ 表示$L^p_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 的范数$(\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|)$.$\|\cdot\|_X$ 记任意 Banach 空间 X 的范数.

1 一致先验估计

本节运用对时间的一致先验估计来保证整体吸引子的存在性.

引理 1 设 $u_0 \in H^1(\Omega)$,$f(x, y) \in L^2(\Omega)$,那么问题(1) ~ (3) 的光滑解 $u(t)$ 有

$$\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leqslant C_1, \qquad \forall t \geqslant t_1, \tag{4}$$

这里 C_1 依赖于数据(γ, f),t_1 依赖于数据(γ, f) 及 R,其中 $\|u_0\| \leqslant R$ 和 $\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$.

证明 作方程(1) 和 u 在H 中的内积,得

$$(u_t - \Delta u_t - k_n u_y + \gamma(u - \Delta u) - u_x \Delta u_y + u_y \Delta u_x - f(x, y), u) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) + \gamma(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2) \leqslant \frac{1}{\gamma}\|f\|^2,$$

应用 Gronwall 不等式,有

$$\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leqslant \begin{cases} 2R^2 e^{-\gamma(t-t_0)} + \dfrac{1}{\gamma^2}\|f\|^2, & t \geqslant t_0, \\ \dfrac{2}{\gamma^2}\|f\|^2 \equiv E_1, & t \geqslant t_1, \end{cases} \tag{5}$$

这里 $t_1 = \max\left\{t_0,\ t_0 + (1/\gamma)\ln[(2R^2\gamma^2)/\|f\|^2]\right\}$. 引理 1 证毕.

引理 2 在引理 1 的条件下,有

$$\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leqslant C_2, \qquad \forall t \geqslant t_2, \tag{6}$$

这里 C_2 依赖于数据(γ, f, R);t_2 依赖于数据(γ, f) 及 R,其中 $\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$ 和 $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R$.

证明 作方程(1) 和 Δu 在H 中的内积,类似于引理 1 的讨论,有

$$\|\Delta u\|^2 + \|\nabla u\|^2 \leqslant \begin{cases} 2R^2 e^{-\gamma(t-t_1)} + \dfrac{1}{\gamma^2}(1 - e^{-\gamma(t-t_1)})\|f\|^2, & t \geqslant t_1, \\ 4R^2 + \dfrac{2}{\gamma^2}\|f\|^2 \equiv E_2, & t \geqslant t_2, \end{cases} \tag{7}$$

这里 $t_2 = \max\left\{t_1,\ t_1 + (1/\gamma)\ln(1/2)\right\}$. 引理证毕.

应用插值不等式,及结论(4)、(6),可以推出

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leqslant C, \qquad \forall t \geqslant t_2. \tag{8}$$

引理 3[10] 在引理 2 的条件下,我们假定 $u_0 \in W^{2,4}(\Omega)$,$f \in L^4(\Omega)$,那么有

$$\|\Delta u\|_{L^4} \leqslant C_3, \qquad \forall t \geqslant t_3, \tag{9}$$

这里 C_3 依赖于数据(γ, k_n, f, R);t_3 依赖于数据(γ, k_n, f) 及 R,其中

$$\|u_0\|_{L^4} \leqslant R,\ \|\Delta u_0\|_{L^4} \leqslant R.$$

综合引理 1~ 3,得到

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leqslant C\|\Delta u\|_{L^4}^{3/4} \cdot \|u\|_{L^4}^{1/4} \leqslant C. \tag{10}$$

引理 4[10] 在引理 3 的条件下,我们假定 $u_0 \in W^{2,p+1}(\Omega)$,$f \in L^{p+1}(\Omega)$,那么有

$$\|\Delta u\|_{L^p} \leqslant C_4, \qquad \forall t \geqslant t_4, \tag{11}$$

这里 C_4 依赖于数据(γ, k_n, f, R);t_4 依赖于数据(γ, k_n, f) 及 R,其中

$$\|u_0\|_{L^{p+1}} \leqslant R,\ \|\triangle u_0\|_{L^{p+1}} \leqslant R.$$

当 $p \to \infty$, 类似于文献[10] 中引理 4 的证明, 有

$$\|\triangle u\|_{L^\infty} \leqslant C, \qquad \forall t \geqslant t_4. \tag{12}$$

引理 5　在引理 4 的条件下, 我们假定 $u_0 \in H^2(\Omega), f \in H^2(\Omega)$, 那么问题(1) ~ (3) 的光滑解 u 有

$$\|\nabla\triangle u\| \leqslant \frac{C}{t}, \qquad \forall t \geqslant t_5, \tag{13}$$

这里 C 依赖于数据$(\gamma, k_n, f, \|u_0\|_{H^2})$ 及 t.

证明　作方程(1) 和 $t^2\triangle^2 u$ 在H 中的内积, 得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|t\triangle u\|^2 + \|t\nabla\triangle u\|^2) + \gamma(\|t\triangle u\|^2 +$$
$$\|t\nabla\triangle u\|^2) - (k_n u_y, t^2\triangle^2 u) =$$
$$t(\|\triangle u\|^2 + \|\nabla\triangle u\|^2) + (u_x\triangle u_y - u_y\triangle u_x, t^2\triangle^2 u) + (\triangle f, t^2\triangle u),$$

由于

$$|(u_x\triangle u_y - u_y\triangle u_x, t^2\triangle^2 u)| \leqslant$$
$$\|\triangle u\|_\infty\left(\left|\int_\Omega t^2\cdot\triangle u_x\cdot\nabla\triangle u\,\mathrm{d}\sigma\right| + \left|\int_\Omega t^2\cdot\triangle u_y\cdot\nabla\triangle u\,\mathrm{d}\sigma\right|\right) \leqslant$$
$$\frac{\gamma}{4}\|t\nabla\triangle u\|^2 + C,$$
$$t\|\triangle u\|^2 \leqslant \frac{\gamma}{8}\|t\nabla\triangle u\|^2 + C,$$
$$t\|\nabla\triangle u\|^2 \leqslant \frac{1}{t}\|t\nabla\triangle u\|^2 \leqslant \frac{\gamma}{8}\|t\nabla\triangle u\|^2 + C, \qquad t \geqslant t_5 \geqslant \frac{8}{\gamma} > 0,$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|t\triangle u\|^2 + \|t\nabla\triangle u\|^2) + \gamma(\|t\triangle u\|^2 + \|t\nabla\triangle u\|^2) \leqslant \frac{1}{\gamma}\|\triangle f\|^2 + C,$$

所以

$$\|\nabla\triangle u\| \leqslant \frac{C}{t}, \qquad \forall t \geqslant t_5,$$

其中 C 依赖于数据$(\gamma, k_n, f, \|u_0\|_{H^2}, t)$.

引理 6[10]　在引理 4 的条件下, 问题(1) ~ (3) 的光滑解 u 有

$$\|u_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 \leqslant C_5, \tag{14}$$

这里 C_5 依赖于数据(γ, k_n, f) 及 R, 其中 $\|u_t(0)\| \leqslant R,\ \|\nabla u_t(0)\| \leqslant R$.

在引理 6 的条件下, 从方程(1) 可以推出

$$\|\triangle u_t\| \leqslant C_5. \tag{15}$$

定理 1[10]　如果满足 $f \in H^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 及 $u_0 \in H^3_{\mathrm{per}}(\Omega)$, 则存在周期初值问题(1) ~ (3) 的唯一整体光滑解 $u(x, y, t)$

$$u(x, y, t) \in L^\infty(0, T; H^3(\Omega)). \tag{16}$$

2　整体吸引子的存在性

为了证明问题(1) ~ (3) 的整体吸引子的存在性, 我们需要利用如下结论.

定理 2[11] 设 E 为 Banach 空间. $\{S_t, t \geqslant 0\}$ 为半群算子, 即 $S_t: E \to E$ 满足

$$S_tS_\tau = S_{t+\tau},\quad S_0 = I,$$

其中 I 为恒等算子, 且设

(i) 算子 S_t 是一致有界, 即对任意 $R > 0$, 如果 $\| u \|_E \leqslant R$, 则存在常数 $C(R)$ 使得

$$\| S_tu \|_E \leqslant C(R),\qquad t \in [0, \infty).$$

(ii) 存在有界吸收集 $B_0 \subset E$, 即对任何有界集 $B \subset E$, 存在常数 T, 使得

$$S_tB \subset B_0,\qquad t \geqslant T.$$

(iii) S_t 是一个完全连续算子, $t > 0$.

那么半群算子 S_t 具有紧的整体吸引子.

定理 3 设问题(1) ~ (3) 具有整体光滑解且满足引理 5 的条件, 则存在周期边值问题(1) ~ (3) 的整体吸引子 A, 即存在集合 $A \subset H^2(\Omega)$, 使得

(i) $S_tA = A,\qquad t \in R^+.$

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \operatorname{dist}(S_tB, A) = 0$, 其中对任何有界集 $B \subset E = H^2(\Omega)$

这里

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \sup_{x\in X}\inf_{y\in Y} \| x - y \|_E,$$

E 为一 Banach 空间, S_t 是问题(1) ~ (3) 生成的半群算子.

证明 基于定理 2 的结果, 我们将验证定理 2 的条件, 以证明定理 3 成立. 在定理的假设下, 我们知道存在由问题(1) ~ (3) 生成的半群算子. 置 Banach 空间 $E = H^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$, $S_t: E \to E$. 由引理 1 ~ 引理 2 的结果, 及设 $B \subset E$ 含于球 $\{\| u \|_E \leqslant R\}$, 则有

$$\begin{aligned}\| S_t(u_0) \|_E^2 = \| u(\cdot, t) \|_E^2 \leqslant C(\| u_0 \|_{H^2}^2, \| f \|^2) \leqslant \\ C(R^2, \| f \|^2),\qquad t \geqslant 0,\ u_0 \in B,\end{aligned}$$

其中 C 是绝对常数. 这意味着 $\{S_t\}$ 在 E 中一致有界. 其次, 从引理 1 ~ 引理 2、式(5) 和式(7) 中可推得

$$\| S_tu_0 \|_E^2 = \| u \|_{H^2}^2 \leqslant 2(E_1 + E_2),\qquad t \geqslant t_0(R, \| f \|),$$

因此

$$A = \left\{u(\cdot, t) \in E,\ \| u \|_E^2 \leqslant 2(E_1 + E_2)\right\}$$

是半群算子 S_t 的有界吸收集. 最后, 从引理 5 的结果有

$$\| \nabla\triangle u(\cdot, t) \| \leqslant \frac{C}{t},\qquad \forall t > 0;\ \| u_0 \|_E \leqslant R,$$

由于紧嵌入: $H^3 \hookrightarrow H^2$, 可知半群算子 $S_t: E \to E$ 当 $t > 0$ 时是完全连续的. 定理证毕.

附注 如同文献[11] 所指出, 定理 3 所得到整体吸引子 A 为吸收集 A 的 ω 极限集, 即有

$$A = \omega(A) = \bigcap_{\tau\geqslant 0} \overline{\bigcup_{t\geqslant\tau} S_tA}.$$

3 整体吸引子的维数

为了建立问题(1) ~ (3) 整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数、分形维数的上界, 我们需要考虑对应于问题(1) ~ (3) 的线性变分问题

$$v_t - \triangle v_t - k_nv_y + \gamma(v - \triangle v) + \triangle u_xv_y + u_y\triangle v_x - \triangle u_yv_x - u_x\triangle v_y = 0, \tag{17}$$

$$v(0) = v_0(x, y),\quad v(x + L_1, y + L_2, t) = v(x, y, t), \tag{18}$$

其中 $v_0 \in H^1(\Omega)$. $U(t) = u(t) = S_t u_0$ 为问题(1) ~ (3) 带有 $u_0 \in A$ 的解.

引理 7[12] 假定 $v_0 \in H^1(\Omega)$, 及 $u_0, v_0 \in A$, $U(t) = S_t u_0 \in H^1(\Omega)$. 则线性化问题(17)、(18) 存在唯一解

$$v(x, y, t) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)),\quad v_t(x, y, t) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$
$$\forall T > 0. \tag{19}$$

另外, 记 $V(t) = v(t) = G_t v_0$, 那么对任意 $T > 0$, $R > 0$ 存在与 R 及 T 有关的常数 C 使得

$$\| S_t(u_0 + v_0) - S_t u_0 - G_t v_0 \|_{H^1} \leqslant C \| v_0 \|_{H^1}^2,\qquad \forall t \in [0, T], \tag{20}$$

这里 $\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R$, $\| u_0 + v_0 \|_{H^1} \leqslant R$, $v_0 + u_0 \in A$. 这说明算子 S_t 在 A 上是一致可微的, 并且 S_t 在 $u_0 \in A$ 处在 $H^1(\Omega)$ 中的微分是 $DS_t u_0: v_0 \in H^1(\Omega) \to G_t v_0 \in H^1(\Omega)$.

由于引理的证明经典但很繁, 在此省略仅提结论. 现在我们研究算子 $DS_t u_0$ 在 $H^1(\Omega)$ 中的 m 维体积的变换. 取 $H^1(\Omega)$ 中的 m 个线性无关元 $V_0^1, \cdots, V_0^m$, 及线性方程(17) 对应于初值 $V^1(0), \cdots, V^m(0)$ 的解 $V(t) = (V^1(t), \cdots, V^m(t))(V^k(t) = (DS_t u_0) \cdot V_0^k, k = 1, \cdots, m)$, 这里 $V^k(0) \in H^1(\Omega), k = 1, \cdots, m$, 我们有

$$\| V^1(t) \wedge \cdots \wedge V^m(t) \|_{\wedge^m H^1}^2 = \det_{1 \leqslant i, j \leqslant m} (V^i(t), V^j(t)),$$

其中我们令

$$(U, V)_{H^1} = \sum_{k=0}^{1} \int_\Omega \nabla^k u \cdot \nabla^k v \,\mathrm{d}\sigma,$$

我们要证明对充分大的 m, 当 $t \to \infty$ 时, 由向量 $V^1(t), \cdots, V^m(t)$ 定义的 m 维多面体体积的 $m!$ 积的平方, 即 $\| V^1(t) \wedge \cdots \wedge V^m(t) \|_{\wedge^m H^1}^2$ 将指数衰减.

引理 8 假设 $u_0 \in A$, $V_0^i \in H^1(\Omega)$, $i = 1, \cdots, m$, 则有

$$\| V^1(t) \wedge \cdots \wedge V^m(t) \|_{\wedge^m H^1} \leqslant$$
$$\| V_0^1(t) \wedge \cdots \wedge V_0^m(t) \|_{\wedge^m H^1} \mathrm{e}^{(C\sqrt{m} - \gamma m)t},\qquad \forall t \geqslant 0, \tag{21}$$

这里 C 依赖于数据和 R, 其中 $\| u_0 \|_{H^1} \leqslant R$.

证明 记

$$W^i(t) = W(t) = \mathrm{e}^{\gamma t} V(x, y, t), \tag{22}$$

因此, 方程(17) 可写为如下形式

$$W_t - \Delta W_t = k_n W_y - \Delta u_x W_y - u_y \Delta W_x + \Delta u_y W_x + u_x \Delta W_y, \tag{23}$$

作(23) 与 W 在 H 中的内积, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\| W \|^2 + \| \nabla W \|^2) =$$
$$2(\Delta u_y W_x, W) + 2(u_x \Delta W_y, W) - 2(\Delta u_x W_y, W) - 2(u_y \Delta W_x, W),$$

让

$$Q(t, W) = \| W \|^2 + \| \nabla W \|^2,$$
$$R(t, W) = 2(\Delta u_y W_x, W) + 2(u_x \Delta W_y, W) - 2(\Delta u_x W_y, W) - 2(u_y \Delta W_x, W),$$

则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q(t, W) = R(t, W), \tag{24}$$

由于

$$| R(t, W) | \leqslant 2 \left| \int_\Omega \nabla W \cdot W_x \cdot \nabla u_y \,\mathrm{d}\sigma \right| + 2 \left| \int_\Omega \nabla W \cdot W_y \cdot \nabla u_x \,\mathrm{d}\sigma \right| \leqslant$$

$$2\|\nabla u_y\|_\infty\cdot\|W_x\|\cdot\|\nabla W\|+2\|\nabla u_x\|_\infty\cdot\|W_y\|\cdot\|\nabla W\|\leqslant C(\|W\|^2+\|\nabla W\|^2), \tag{25}$$

这里 C 依赖于数据和 R, 其中 $\|u_0\|_{H^1}\leqslant R$. 定义算子

$$KW=(1-\triangle)^{-1}W,\qquad \forall W\in H^1(\Omega),$$

则有

$$(KW,W)_{H^1}=\|W\|^2+\|\nabla W\|^2,\qquad \forall W\in H^1(\Omega), \tag{26}$$

式(25)和式(26)表明

$$|R(t,W)|\leqslant C(KW,W)_{H^1}.$$

设 $\lambda_i(i\in Z)$ 是算子 K 的特征值序列, 它随 i 减少并且当 $i\to\infty$ 时趋于 0. 熟知算子 K 的特征值不超过 $(1+i^2\pi^2/|\Omega|^2)^{-1}$, $|\Omega|=L_1L_2$. 由文献[13] 中的定理 A 知

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(W^i(t),W^j(t))_{H^1}\leqslant \det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(V_0^i(t),V_0^j(t))_{H^1}\exp\left\{\left(C\sum_{i=1}^m\lambda_i^{1/2}\right)t\right\},\qquad t\geqslant 0, \tag{27}$$

因为

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i^{1/2}\leqslant\sum_{k=0}^m\left(1+\frac{k^2\pi^2}{(L_1L_2)^2}\right)^{-1/2}\leqslant 1+\sum_{k=1}^m\left(1+\frac{k^2\pi^2}{(L_1L_2)^2}\right)^{-1/2}\leqslant$$
$$1+\sum_{k=1}^m\left(\frac{(L_1L_2)^2}{k^2\pi^2}\right)^{1/2}=1+\frac{(L_1L_2)}{\pi}\sum_{k=1}^m\frac{1}{k}\leqslant$$
$$1+\frac{(L_1L_2)}{\pi}\sqrt{m}\sum_{k=1}^m\frac{1}{k^{3/2}}\leqslant C\sqrt{m}.$$

由式(27)和式(22)可推出

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(W^i(t),W^j(t))_{H^1}\leqslant \det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(V_0^i(t),V_0^j(t))_{H^1}\exp\left\{\left(C\sqrt{m}\right)t\right\},\qquad t\geqslant 0, \tag{28}$$

$$\det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(W^i(t),W^j(t))_{H^1}= \det_{1\leqslant i,j\leqslant m}(V^i(t),V^j(t))_{H^1}\exp\left\{\left(\gamma m\right)t\right\},\qquad t\geqslant 0, \tag{29}$$

这样从(28)和(29)便可导出(21)的估计, 引理证毕.

通过观察, 引理 8 表明如果 m 由下式确定

$$m-1\leqslant\left(\frac{C}{\gamma}\right)^2<m, \tag{30}$$

其中 C 为引理 8 中的常数, 那么整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数: $\dim_H(A)\leqslant m$ 及分形维数 $\dim_F(A)\leqslant 2m$.

定理 4 定理 3 中定义的整体吸引子 A 的 Hausdorff 维数和分形维数都是有限的.

[参 考 文 献]

[1] Hasegawa A, Mima K. Pseudo_three_dimensional turbulence in magnetized nonuniform plasma[J]. Phys Fluids, 1978, **21**(1): 87—92.

[2] Spatschek K H, Zhang W, Naulin V, et al. Self_organization of nonlinear waves and vortices in driven and damped systems[A]. In: Debnath L Ed. Nonlinear Dispersive[C]. Singapore: World Scientific, 1992, 507—538.

[3] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics[M]. 2nd Ed. New York: Springer_Verlag, 1987, 314—355.

[4] Bulannov S V, Esirkepov T Zh, Lonfano M, et al. The stability of single and double vortex films in the framework of the Hasegawa_Mima equation[J]. Plasma Phys Reports, 1997, **23**(8): 660—669.
[5] Grauer R. An energy estimate for a perturbed Hasegawa_Mima equation[J]. Nonlinearity, 1998, **11**(3): 659—666.
[6] Kukharkin N, Orszag S A. Generation and structure of Rossby vortices in rotating fluids[J]. Phys Rev E, 1996, **54**(5): R4524—R4527.
[7] Iwayama T, Watanabe T, Shepherd T G. Infrared dynamics of decaying two dimensional turbulence governed by the Charney_Hasegawa_Mima equation[J]. J Phys Soc Japan, 2001, **70**(2): 376—386.
[8] GUO Bo_ling, HAN Yong_qian. Existence and uniqueness of global solution of the Hasegawa_Mima equation[J]. J Math Phys, 2004, **45**(4): 1639—1647.
[9] 张瑞凤. 广义 Hasegawa_Mima 方程整体解的存在惟一性[J]. 数学的实践与认识, 2005, **35**(8): 224—228.
[10] ZHANG Rui_feng, LI Rui_ge. The global solution for a class of dissipative Hasegawa_Mima equation[J]. Chinese Quart J Math, 2005, **20**(4): 360—366.
[11] Temam R. Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. New York: Springer_Verlag, 2000, 15—329.
[12] DAI Zheng_de, GUO Bo_ling. Global attractor of nonlinear strain wave_guides[J]. Acta Math Sci, Ser B, 2000, **20**(3): 322—334.
[13] Ghidaglia J M. Weakly damped forced Korteweg_de Vries equations behave as a finite dimensional dynamical system in the long time[J]. J Differential Equations, 1988, **74**(2): 369—390.

Global Attractor for the Hasegawa_Mima Equation

ZHANG Rui_feng[1], GUO Bo_ling[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng 475001, P.R. China;
2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, P.R. China)

Abstract: The long time behavior of solution of the Hasegawa_Mima equation with dissipation term is considered. The global attractor problem of the Hasegawa_Mima equation with initial periodic boundary condition was studied. Applying the uniform a priori estimates method, the existence of global attractor of this problem was proved, and also the dimensions of the global attractor are estimated.

Key words: Hasegawa_Mima equation; a priori estimate; global attractor; Hausdorff and fractal dimension