文章编号: 1000_0887(2006) 05_0564_07


# 重复结构振动控制的降维方法*

陈伟民[1,3], 孙东昌[2], 王大钧[1],
魏建萍[1], 仝力勇[2], 王 泉[4]

(1. 北京大学 湍流与复杂系统国家重点实验室; 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871;
2. 悉尼大学 航天机械与机电工程学院, 悉尼 NSW 2006, 澳大利亚;
3. 中国科学院 力学研究所 工程科学部, 北京, 100080;
4. 中弗洛尼达大学 机械材料与航天工程系, 弗洛尼达, 美国)

(叶庆凯推荐)

摘要: 提出了对称结构、旋转周期结构和链式结构的振动控制的降维方法• 以某种对称的方式设置广义坐标的凝聚、传感器、驱动器的位置以及输入与控制力的关系, 即可使控制系统具有和结构同样的重复性• 对凝聚了的广义坐标和系统输入采用适当的变换, 即可通过执行一些子结构的控制问题实现整体系统的振动控制, 从而使控制问题的维度显著降低•

关 键 词: 结构的振动控制; 重复结构; 对称结构; 旋转周期结构; 链式结构
中图分类号: O32 文献标识码: A

## 引 言

在航空、航天、土木和机械工程中存在许多重复性结构(简称重复结构), 包括镜面对称结构(简称对称结构)、旋转周期结构、线周期结构、链式结构等• 重复结构由一些相同的子结构按特定的规则组合而成, 所有子结构都具有同样的几何形状、物理性质、边界条件和相互关系• 由于重复结构的这些性质, 一个结构的固有振动、强迫振动和振动控制问题只由一个子结构的有关信息就可以确定, 致使整体结构的固有振动、强迫振动、振动控制可以分为多个子结构的相应问题, 从而大大减小了数值分析或实验中的工作量•

已有大量文献研究了这类结构的固有频率和模态的解法• 例如, Evensen[1] 研究了对称结构的振动, Thomas[2] 较早研究了旋转周期结构的振动, Cai 和 Chan, Cheung[3,4] 利用 U 变换对旋转周期结构的振动做了一系列工作• Wang 和 Wang[5,6] 提供了约化对称结构、链式结构的方法•

关于重复结构的振动控制问题见诸文献的很少• Bryson 和 Wiesinger[7] 提供了一个圆形平板空间结构的低阶控制器的设计方法, 利用结构的几何对称性, 将一个 4 输入_4 输出系统解耦为 4 个单输入_单输出子系统• 本文研究了对称结构、旋转周期结构和链式结构的振动控制的约简方法. 对于重复性结构, 如果广义坐标凝聚、观测器布置、致动器布置、输入和控制力的

* 收稿日期: 2004_10_10; 修订日期: 2006_01_12
基金项目: 国家自然科学重点基金项目(60034010); 澳大利亚研究委员会发现项目(DP0210716)
作者简介: 陈伟民(1967—), 女, 江苏南京人, 博士(联系人. Tel: + 86_10_62545533_3033; E_mail: wmchen@imech.ac.cn)•

关系都具有和结构相同的重复性质,则整体结构的振动控制问题可以约简为多个子结构的振动控制问题,因此使控制系统的维数显著降低•

# 1　镜面对称结构振动控制的降维方法

当一个结构的形状、物理性质(包括扬氏模量、泊松比、密度等)和边界条件对某个平面是对称时,则此结构称为对称结构,该平面称为对称面•　在结构的对称面上取 $b$ 个广义坐标 $\boldsymbol{x}_2$,结构的左右部分各取 $p$ 个广义坐标,$\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_3$,在控制力作用下的运动方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1 \quad \boldsymbol{x}_2 \quad \boldsymbol{x}_3]^{\mathrm{T}}$ 是 $2p + b$ 维广义坐标向量•　$\boldsymbol{u}$ 表示系统的输入,$\boldsymbol{Bu}$ 是控制力•　如果选取结构左、右部分的广义坐标的位置及其编号相对于对称面对称,则系统的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可以表示为如下的特殊形式

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} \\ \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_p \\ \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_p = \begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \therefore & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中上标 T 表示转置,T 表示对第二对角线转置,即对于 $n \times k$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = [a_{(n-j+1)(k-i+1)}] = \boldsymbol{S}_k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_n$•　控阵 $\boldsymbol{K}$ 中,$\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{11}$,$\boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{13}$,$\boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{22}$•　质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 具有和 $\boldsymbol{K}$ 同样的形式•

当在对称面上,以及左右两部分对称地布置一些致动器时,控制力的输入 $\boldsymbol{u}$ 由 3 组分量,$m$ 维的 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_3$,$s$ 维的 $\boldsymbol{u}_2$ 组成,$\boldsymbol{u} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}^{\mathrm{T}}$,$m \leqslant p$,$s \leqslant b$•　令输入 $\boldsymbol{u}$ 对结构产生的控制力也具有对称性,即分向量 $\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{u}_3$ 对 $\boldsymbol{x}_1$ 产生的控制力 $\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{u}_3$ 和 $\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{u}_3$ 对 $\boldsymbol{S}_p\boldsymbol{x}_3$ 产生的控制力相同,$\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{u}_3$ 对 $\boldsymbol{x}_2$ 产生的控制力相同,于是控制矩阵具有形式

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{13} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{B}_{21}\boldsymbol{S}_m \\ \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m & \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{S}_p$ 和 $\boldsymbol{S}_m$ 分别为式(2)表示的 $p \times p$ 和 $m \times m$ 的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵•

实践中难于对大量的广义坐标进行观测,更难于对高维系统实现控制•　对于结构的高维广义坐标 $\boldsymbol{x}$,常常要求将其凝聚成由安装的传感器可以测量的低维变量 $\boldsymbol{y}$•　在结构的对称面上,安装 $r$ 个传感器,在结构的左,右部分安装同样个数($l$)的具有对称的型式和位置的传感器,这里 $m \leqslant l \leqslant p$,$s \leqslant r \leqslant b$•　由这些传感器测量的坐标分别用 $\boldsymbol{y}_2$、$\boldsymbol{y}_1$ 和 $\boldsymbol{y}_3$ 表示•　因此,整个结构的凝聚坐标表示为 $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3\}^{\mathrm{T}}$,为了保持凝聚系统的对称性,按以下形式给出凝聚关系

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{C}_{13}\boldsymbol{S}_l \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} & \boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{S}_l \\ \boldsymbol{C}_{13} & \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{S}_p\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{S}_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}, \tag{4}$$

将(4)式代入方程(1),左乘 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$,得到 $2l + r$ 维的控制系统

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} \\ \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{22} & \boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_l \\ \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{13} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{B}_{21}\boldsymbol{S}_m \\ \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m & \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix}, \tag{6}$$

并有 $\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{11}$,$\boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{13}$,$\boldsymbol{K}_{22}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{K}_{22}$•　$\boldsymbol{M}$ 具有和 $\boldsymbol{K}$ 相同的形式•　这表明凝聚后的系统的 $\boldsymbol{M}$、

$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{B}$ 仍保持了对称结构的特性,如(2)、(3)式一样•

为了对方程(5)进行约简,应用坐标变换

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_l & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_l \\ \boldsymbol{0} & \sqrt{2}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}_l & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \\ \boldsymbol{q}_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{q}, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{0} & \sqrt{2}\boldsymbol{I}_s & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{S}_m & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{v}, \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{I}_l$ 表示 $l$ 维单位矩阵• 注意到 $\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_i = \boldsymbol{I}$, $i = 1, 2$•

将(7)和(8)式代入方程(5),左乘 $\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}$ 得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{S}_l & \sqrt{2}\boldsymbol{M}_{12} \\ \sqrt{2}\boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_1 \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} + \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{S}_l & \sqrt{2}\boldsymbol{K}_{12} \\ \sqrt{2}\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m & \sqrt{2}\boldsymbol{B}_{12} \\ \sqrt{2}\boldsymbol{B}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0}, \tag{9}$$

$$[\boldsymbol{M}_{11} - \boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{S}_l]\ddot{\boldsymbol{q}}_3 + [\boldsymbol{K}_{11} - \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{S}_l]\boldsymbol{q}_3 + [\boldsymbol{B}_{11} - \boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m]\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \tag{10}$$

至此, $2l + r$ 自由度的原控制系统(5)约简为一个 $l + r$ 自由度和一个 $l$ 自由度的控制系统•

如果在对称结构的对称面上不设置广义坐标,约简过程则更为简单• 此时, $\boldsymbol{x}_2$、$\boldsymbol{u}_2$、$\boldsymbol{y}_2$ 都为 $\boldsymbol{0}$ 向量,式(6)变为

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{13} \\ \boldsymbol{M}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{13} \\ \boldsymbol{K}_{13}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{13} \\ \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m & \boldsymbol{S}_l\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix}, \tag{11}$$

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 对于主对角线和第二对角线都是对称的• 式(7)和(8)式为

$$\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_l & \boldsymbol{I}_l \\ \boldsymbol{S}_l & -\boldsymbol{S}_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{U}_1 \boldsymbol{q}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m & \boldsymbol{I}_m \\ \boldsymbol{S}_m & -\boldsymbol{S}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{U}_2 \boldsymbol{v} \tag{13}$$

最后控制系统约简为两个 $l$ 自由度的控制系统

$$(\boldsymbol{M}_{11} + \boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{S}_l)\ddot{\boldsymbol{q}}_1 + (\boldsymbol{K}_{11} + \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0}, \tag{14}$$

$$(\boldsymbol{M}_{11} - \boldsymbol{M}_{13}\boldsymbol{S}_l)\ddot{\boldsymbol{q}}_3 + (\boldsymbol{K}_{11} - \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{S}_l)\boldsymbol{q}_3 + (\boldsymbol{B}_{11} - \boldsymbol{B}_{13}\boldsymbol{S}_m)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \tag{15}$$

式(12)、(13)和方程(14)、(15)指出了用实验实现控制的过程,步骤如下

(i) 根据式(12),将整体结构的观测量 $\boldsymbol{y} = \{\boldsymbol{y}_1 \quad \boldsymbol{y}_3\}^{\mathrm{T}}$, 按

$$\boldsymbol{q} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_3 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{S}\boldsymbol{y}_3 \\ \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{S}\boldsymbol{y}_3 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

组合成 $\boldsymbol{q}_1$ 和 $\boldsymbol{q}_3$, 分别送入控制系统(14)和(15)•

(ii) 按系统(14)和(15)分别设计出反馈输入 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_3$•

(iii) 将 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$ 按式(13)对 $\boldsymbol{v}_1$ 作对称和对 $\boldsymbol{v}_3$ 作反对称的组合后,送入整体系统的输入 $\boldsymbol{u}$• 这样原为 $2l$ 维系统的振动控制,可通过处理 2 个 $l$ 维系统的振动控制系统加以实现•

## 2 旋转周期结构振动控制的降维方法

一个绕直线旋转角度 $\phi = 2\pi/n$ 和本身重复的结构称为 $n$ 阶旋转周期结构• 它是由 $n$ 个

形状、物理性质、边条件以及和其它子结构彼此间联接都相同的子结构组成• 设每个子结构有相同的 $p$ 个广义坐标, 坐标向量记为 $\boldsymbol{x}_i$, $(i=1, \cdots, n)$, 则整体结构的广义坐标为 $\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}^{\mathrm{T}}$• 结构振动的方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 为循环矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n-1} & \boldsymbol{K}_{1n} \\ \boldsymbol{K}_{1n} & \boldsymbol{K}_{11} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n-2} & \boldsymbol{K}_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{K}_{12} & \boldsymbol{K}_{13} & \cdots & \boldsymbol{K}_{1n} & \boldsymbol{K}_{11} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

且有: $\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{K}_{11}$, $\boldsymbol{K}_{1a}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{K}_{1(n+2-a)}$ $(a=2, 3, \cdots, n)$, $\boldsymbol{M}$ 同 $\boldsymbol{K}$ 具有相同的形式•

在每个子结构上安置数量和位置相同的致动器, 第 $j$ 子结构的输入记为 $\boldsymbol{u}_j$, $n$ 维向量, 系统的输入为 $\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n\}^{\mathrm{T}}$, 它对子结构的控制力的关系也具有旋转周期性, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_{n-1}$, $\boldsymbol{u}_n$ 在 $\boldsymbol{x}_1$ 产生的控制力 $\boldsymbol{B}_{11}\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{B}_{12}\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{B}_{1n-1}\boldsymbol{u}_{n-1}$、$\boldsymbol{B}_{1n}\boldsymbol{u}_n$ 与 $\boldsymbol{u}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_{n-1}$, $\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{u}_1$ 在 $\boldsymbol{x}_2$ 产生的控制力相同, 如此类推, 因此控制矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1n-1} & \boldsymbol{B}_{1n} \\ \boldsymbol{B}_{1n} & \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1n-2} & \boldsymbol{B}_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{12} & \boldsymbol{B}_{13} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1n} & \boldsymbol{B}_{11} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

如果需要通过凝聚广义坐标降低自由度, 为了使凝聚系统保持旋转周期性, 在所有子结构中设置相同数量 $(l)$、相同类型和位置的传感器• 记第 $i$ 个子结构的观测值为向量 $\boldsymbol{y}_i$, 整体结构上的观测值为 $\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{y}_1 \quad \boldsymbol{y}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{y}_n\}^{\mathrm{T}}$• 凝聚关系设定为

$$\boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{21} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{31} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{C}_{n1} & \boldsymbol{C}_{n-1,1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_n \end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}• \tag{20}$$

将上式带入方程(17), 并左乘 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$, 得到 $nl$ 系统的振动控制方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都保持为循环矩阵• 且 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是对称矩阵•

利用这些矩阵的性质, 通过适当的坐标变换, 可以约简系统(21)• 作变换

$$\boldsymbol{y}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_n \end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_l & \boldsymbol{I}_l & \cdots & \boldsymbol{I}_l \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\boldsymbol{I}_l & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\phi}\boldsymbol{I}_l & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}\boldsymbol{I}_l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)\phi}\boldsymbol{I}_l & \mathrm{e}^{\mathrm{i}2(n-1)\phi}\boldsymbol{I}_l & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(n-1)\phi}\boldsymbol{I}_l \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_n \end{Bmatrix}=\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{q}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_n\}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_2\{\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2 \quad \cdots \quad \boldsymbol{v}_n\}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{v}, \tag{23}$$

其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, $\phi=2\pi/n$, 矩阵 $\boldsymbol{U}_2$ 和 $\boldsymbol{U}_1$ 形式相同, 只是将 $\boldsymbol{I}_l$ 换为 $\boldsymbol{I}_m$• 注意 $\boldsymbol{U}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_j=\boldsymbol{I}$, $j=1, 2$•

将变换(22)、(23) 代入方程(21), 左乘 $\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}$, 可导出

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{U}_1=\mathrm{diag}[\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \cdots, \boldsymbol{K}_n], \quad \boldsymbol{K}_s=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{K}_{1j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)s\phi}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_2=\mathrm{diag}[\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_n], \quad \boldsymbol{B}_s=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{B}_{1j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-1)s\phi}, \tag{25}$$

其中 $K_s^{\mathrm{T}} = K_s$, $K_{n-s} = K_s$, $B_{n-s} = B_s$•

最后方程(21) 解耦为 $n$ 个 $l$ 维系统的振动控制方程

$$M_s\ddot{q}_s + K_s q_s + B_s q_s = 0, \qquad s = 1, 2, \cdots, n• \tag{26}$$

将方程(26) 按实部和虚部展开, 并重组为

$$\begin{bmatrix} M_s^{\mathrm{r}} & -M_s^{\mathrm{i}} \\ M_s^{\mathrm{i}} & M_s^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_s^{\mathrm{r}} \\ \ddot{q}_s^{\mathrm{i}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_s^{\mathrm{r}} & -K_s^{\mathrm{i}} \\ K_s^{\mathrm{i}} & K_s^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_s^{\mathrm{r}} \\ q_s^{\mathrm{i}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s^{\mathrm{r}} & -B_s^{\mathrm{i}} \\ B_s^{\mathrm{i}} & B_s^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_s^{\mathrm{r}} \\ v_s^{\mathrm{i}} \end{Bmatrix} = 0• \tag{27}$$

$s = n$ 和 $n/2$(如 $n$ 为偶数) 时, $K_s$、$M_s$、$B_s$ 为实矩阵, 方程(27) 中的虚部为 0• 其余的 $s$, $K_s$、$M_s$、$B_s$ 为复矩阵• (26) 为复变量方程• 但因以上 3 矩阵对 $s$ 和 $n-s$ 的情形是共轭的, 如式(24) 和 (25) 所示, 所以方程(26) 中的第 $s$ 和 $n-2$ 方程的解是共轭的, 即 $q_{n-s} = q_s$, $v_{n-s} = v_s$•

因此, 具有 $nl$ 自由度的原控制系统(21) 解耦为 1(或 2, 当 $n$ 为偶数时) 个 $l$ 自由度的子系统的控制问题和 $(n-1)/2$(或 $(n-2)/2$, 当 $n$ 为偶数时) 个 $2l$ 自由度的子系统的控制问题 (27)• 当由程(27) 解得 $q_s^{\mathrm{r}}$、$q_s^{\mathrm{i}}$、$v_s^{\mathrm{r}}$、$v_s^{\mathrm{i}}$ 后, 代回变换(22) 和(23), 得原系统的解 $y = y^{\mathrm{r}} + iy^{\mathrm{i}}$, $u = u^{\mathrm{r}} + iu^{\mathrm{i}}$, 易证 $y^{\mathrm{i}} = 0$, $u^{\mathrm{i}} = 0$• 所以原系统为实变量的解•

用实验实现系统(21) 的控制时, 按如下步骤进行•

( i ) 得到原系统观察值 $y$ 后, 按(22) 式分配为各子系统的观察值

$$q = U_1^{\mathrm{T}} y,$$

$$q_s^{\mathrm{r}} = \frac{1}{\sqrt{n}}[I, \cos s\psi I, \cdots, \cos(n-1)s\psi I]\{y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n\}^{\mathrm{T}},$$

$$q_s^{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{n}}[0, -\sin s\psi I, \cdots, -\sin(n-1)s\psi I]\{y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n\}^{\mathrm{T}}•$$

( ii) 由子系统(27) 设计出输入 $v_s^{\mathrm{r}}$、$v_s^{\mathrm{i}}$•

( iii) 按照(23) 式将 $v_s$ 合成为原系统(21) 的输入 $u$• 因此, 这时具有 $nl$ 维的控制系统 (21) 解耦为 1(或 2, 当 $n$ 为偶数时) 个 $l$ 维子控制系统和 $(n-1)/2$(或 $(n-2)/2$, 当 $n$ 为偶数时) 个 $2l$ 维的子控制系统(27)•

## 3 链式结构的振动控制

由 $n$ 个相同的子结构用无质量的弹性和刚性连接成链式, 两端固定, 每个子结构只和前后子结构连接, 而且是对称的, 这样的结构称为链式结构• 对每个子结构取位置相同的 $p$ 个广义坐标• 这样的结构的刚度矩阵

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & K_{12} & K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & K_{12} & K_{11} \end{bmatrix}, \tag{28}$$

且 $K_{11}^{\mathrm{T}} = K_{11}$, $K_{12}^{\mathrm{T}} = K_{12}$• 质量矩阵 $M$ 具有 $K$ 的形式•

若每个子结构在相同的位置布置致动器, 输入 $u = \{u_1, \cdots, u_n\}^{\mathrm{T}}$• 分向量 $u_j$ 为 $m$ 维向量, 对第 $j$ 个子结构的控制力为 $B_{11}u_j$, 对 $j-1$ 和 $j+1$ 子结构的控制力对称, 皆为 $B_{12}u_j$• 此时整体结构为 $np$ 自由度, 其振动控制方程为

$$M\ddot{x} + Kx + Bu = 0, \tag{29}$$

其中 $B$ 具有式(28) 中的 $K$ 的形式•

对自由度很大的结构需要将广义坐标 $\boldsymbol{x}$ 凝聚为由传感器可以观测的变量 $\boldsymbol{y}$，为了使凝聚后的系统保持链式系统，在所有结构上设置相同数目($l$)、相同类型和相同位置的传感器。记第 $i$ 个子结构上的观测值为 $\boldsymbol{y}_i$，这样整体系统的观测值为 $\boldsymbol{y}=\{\boldsymbol{y}_1 \cdots \boldsymbol{y}_2 \cdots \boldsymbol{y}_n\}^{\mathrm{T}}$。设定 $\boldsymbol{x}_i$ 只凝聚到 $\boldsymbol{y}_i$，且对 $i=1, \cdots, n$，按相同规则凝聚。因此

$$\boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\ \boldsymbol{x}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_{11}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_n\end{Bmatrix}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}. \tag{30}$$

将式(30)代入方程(29)，左乘 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，得 $nl$ 维系统的控制问题

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}, \tag{31}$$

其中 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 具有 $\boldsymbol{K}$ 的形式。而

$$\boldsymbol{M}_{11}=\boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{11}\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{M}_{11}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{M}_{12}=\boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{12}\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{M}_{12}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{K}_{11}=\boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{11}\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{K}_{11}^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{K}_{12}=\boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{C}_{11}=\boldsymbol{K}_{12}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{B}_{11}=\boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{11},\ \boldsymbol{B}_{12}=\boldsymbol{C}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_{12}.$$

利用 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{B}$ 的性质，将方程(31)约简为 $n$ 个 $l$ 维系统的控制问题。令 $\phi=\pi/(n+1)$，作变换

$$\boldsymbol{y}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{y}_n\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{1}{n+1}}\begin{bmatrix}\sin\phi\boldsymbol{I}_l & \sin 2\phi\boldsymbol{I}_l & \cdots & \sin n\phi\boldsymbol{I}_l\\ \sin 2\phi\boldsymbol{I}_l & \sin 4\phi\boldsymbol{I}_l & \cdots & \sin 2n\phi\boldsymbol{I}_l\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sin n\phi\boldsymbol{I}_l & \sin 2n\phi\boldsymbol{I}_l & \cdots & \sin nn\phi\boldsymbol{I}_l\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{q}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{q}_n\end{Bmatrix}=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{q}, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}_1\quad \boldsymbol{u}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{u}_n\}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{U}, \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 的形式一样，只是将 $\boldsymbol{I}_l$ 换为 $\boldsymbol{I}_m$。将(32)、(33)式代入方程(31)，得

$$\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}_1=\mathrm{diag}(\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \cdots, \boldsymbol{K}_n),\ \boldsymbol{K}_s=\boldsymbol{K}_{11}+2\cos s\phi\boldsymbol{K}_{12},\qquad s=1, 2, \cdots, n,$$
$$\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}_1=\mathrm{diag}(\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2, \cdots, \boldsymbol{M}_n),\ \boldsymbol{M}_s=\boldsymbol{M}_{11}+2\cos s\phi\boldsymbol{M}_{12},$$
$$\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_2=\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_n),\ \boldsymbol{B}_s=\boldsymbol{B}_{11}+2\cos s\phi\boldsymbol{B}_{12}.$$

这样，原来 $nl$ 自由度系统的控制问题(31)化为 $n$ 个 $l$ 自由度系统的控制问题

$$\boldsymbol{M}_s\ddot{\boldsymbol{q}}_s+\boldsymbol{K}_s\boldsymbol{q}_s+\boldsymbol{B}_s\boldsymbol{V}_s=\boldsymbol{0},\qquad s=1, 2, \cdots, n. \tag{34}$$

实现控制(31)，可采用以下步骤

(i) 将获得的整体系统的观测量 $\boldsymbol{y}$ 按式(32)分解为 $\boldsymbol{q}=\{\boldsymbol{q}_1\quad\cdots\quad\boldsymbol{q}_n\}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$。

(ii) 将 $\boldsymbol{q}_s$ 送入子系统(34)按这些子系统设计出反馈输入 $\boldsymbol{v}_s$。

(iii) 将 $\boldsymbol{v}_s$ 按式(33)组合，作为整体系统的输入 $\boldsymbol{u}$。

## 4 结 论

本文给出了对称结构、旋转周期结构和链式结构的振动控制的降维方法。按照结构组成的重复方式设置传感器的位置和广义坐标的凝聚、致动器的位置和系统输入与控制力的关系，控制系统就具有和结构同样的重复性。对凝聚了的系统和系统输入施行适当的变换，整体系统的振动控制问题可缩减为几个子结构的振动控制问题。子结构振动控制系统的维度显著低于整体结构振动系统的维度。

作为一个简例，考虑每个子结构只有一个传感器和一个致动器的情形。运用本文给出的降维方法，对于对称结构，一个双输入双输出控制系统被缩减为两个单输入单输出控制系统。对于 $n$ 阶旋转周期结构，一个 $n$ 输入 $n$ 输出控制系统被缩减为一个(或两个，如 $n$ 为偶数)单输

入单输出控制系统和$(n-1)/2$(或$(n-2)/2$)个双输入双输出控制系统• 对于链式结构,一个$n$输入$n$输出的控制系统被缩减为$n$个单输入单输出控制系统•

文章详细叙述了实现实际系统的振动控制的步骤•

一些问题,例如在运用本文所提出的降维方法时结构振动控制的可控性、可观测性和鲁棒性,尚待进一步研究•

致谢 本文第3作者感谢中国空间技术研究院空间飞行器总体设计部对此项研究的支持•

[参 考 文 献]

[1] Evensen D A. Vibration analysis of multi_symmetric structures[J]. AIAA Journal, 1976, **14**(4): 446—453.

[2] Thomas D L. Dynamics of rotational periodic structures[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1979, **14**: 81—102.

[3] Cai C, Cheung Y, Chan H. Uncoupling of dynamic equations for periodic structures[J]. J Sound Vibration, 1990, **139**(2): 253—263.

[4] Chan H, Cai C, Cheung Y. Exact Analysis of Structures With Periodicity Using U_Transformation [M]. Hong Kong: World Scientific Publication, 1998.

[5] WANG Da_jun, Wang C C. Natural vibration of repetitive structures[J]. Chinese J Mech, 2000, **16**(2): 85—95.

[6] WANG Da_jun, ZHOU Chun_yan, JIE Rong. Free and forced vibration of repetitive structures[J]. Internat J Solids and Structures, 2003, **40**: 5477—5494.

[7] Bryson A E, Wiesinger F A. Modeling and control of flexible vehicles in space[R]. AD_A219622, 1990.

# Reduction Approaches for Vibration Control of Repetitive Structures

CHEN Wei_ming[1,3], SUN Dong_chang[2], WANG Da_jun[1],
WEI Jian_ping[1], TONG Li_yong[2], WANG Quan[4]

(1. State Key Laboratory for Turbulence and Complex System / Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P. R. China;
2. School of Aerospace, Mechanical and Mechatronic Engineering, University of Sydney, Sydney NSW2006, Australia;
3. Div. of Engineering Sci. Res., Institute of Mechanics, CAS, Beijing 100080, P. R. China;
4. Mechanical, Materials and Aerospace Engineering Department, University of Central Florida, Orlando, FL 32816, USA)

**Abstract:** The reduction approaches are presented for vibration control of symmetric, cyclic periodic and linking structures. The condensation of generalized coordinates, the location of sensors and actuators, and the relation between system inputs and control forces were assumed to be set in a symmetric way so that the control system possess the same repetition as the structure considered. By employing proper transformations of condensed generalized coordinates and the system inputed, the vibration control of an entire system can be implemented by carrying out the control of a number of sub_structures, and thus the dimension of the control problem can be significantly reduced.

**Key words:** vibration control of structure; repetitive structure; symmetric structure; cyclic periodic structure; linking structure