文章编号: 1000_0887(2006) 05_0591_06

一类带有非线性传染率的 SEIS 传染病模型的定性分析*

王拉娣[1,2], 李建全[3]

(1. 山西财经大学 应用数学系, 太原 030006;
2. 上海大学 数学系, 上海 200436;
3. 空军工程大学 应用数学物理系, 西安 710051)

(刘曾荣, 李继彬推荐)

摘要: 借助极限理论和 Fonda 定理, 研究了一类既有常数输入率又有因病死亡率的 SEIS 传染病模型• 所考虑模型的传染率是非线性的, 并且得到了该模型的基本再生数, 当基本再生数小于 1 时, 该模型仅存在唯一的无病平衡点, 它是全局渐近稳定的, 且疾病最终灭绝• 当基本再生数大于 1 时, 该模型除存在不稳定的无病平衡点外, 还存在唯一的局部渐近稳定的地方病平衡点, 并且疾病一致持续存在•

关 键 词: 传染病模型; 平衡点; 稳定性; 持续性

中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

对经典的传染病模型, 往往主要关心平衡点的存在性、局部和全局稳定性• 近年来, 由于在传染病模型中引入了形式更一般的传染率, 使得模型具有更复杂的动力学性态, 有时用传统的分析方法很难达到目标• 但从传染病学的意义上来讲, 研究疾病的持续性与研究疾病的最终行为有着同样重要的意义• 关于传染病的持续性已有一些学者进行了研究[1~3]•

在经典的流行病模型中通常使用双线性型和标准型的传染率[4,5], 因而这些模型具有较简单的动力行为• 近来, 人们提出了几类不同的传染率• 用 $S(t)$ 表示 t 时刻易感者的数量, $E(t)$ 表示 t 时刻潜伏者的数量, 用 $I(t)$ 表示 t 时刻具有传染力的染病者的数量• 在研究了 1973 年在意大利东部港市巴里流行的霍乱之后, Capasso 和 Serio[6] 在传染病模型中引入了饱和型的传染率 $g(I)S$• 这一工作十分重要, 因为染病者和易感者之间的有效接触可能会由于染病者的聚集或是由于易感者采取了保护措施而影响染病者的传染水平• 文献[7]和文献[8]就引入了形如 $\beta I^p S^q$ 的传染率, 文献[8]和文献[9]就引入了形如 $\beta I^p S/(1+\alpha I^q)$ 的传染率• 文献

* 收稿日期: 2004_07_31; 修订日期: 2006_02_10
基金项目: 国家科技攻关计划资助项目(2004BA719A01)
作者简介: 王拉娣(1958—), 女, 河北井陉人, 教授, 博士(Tel: + 86_351_7666702; E_mail: wld58@126.com);
李建全(1965—), 男, 山西万荣人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_29_84786546; E_mail: jianq_li@263.net)•

[10]讨论了形式更为一般的非线性传染率.

本文所考虑的SEIS传染病模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\mu S-\dfrac{\beta SI}{\phi(I)}+\gamma I,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta SI}{\phi(I)}-(\mu+\varepsilon)E,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\varepsilon E-(\mu+\alpha+\gamma)I,\end{cases}\tag{1}$$

其中 A 为对种群的输入率, μ 种群的自然死亡率, ε 为由潜伏到传染的转换率, γ 为染病者的恢复率, α 为因病死亡率. $\beta SI/(\phi(I))$ 为传染率, 它推广了非线性传染率 $\beta I^p S/(1+\alpha I^q)$, 并且当 $\phi(I)\equiv 1$ 时该传染率即双线性传染率. 假设函数 $\phi(I)$ 满足 $\phi(0)=1$ 且 $\phi'(I)\geqslant 0$, 这意味着对于 $I\geqslant 0$ 有 $\phi(I)\geqslant 1$. $1/(\phi(I))$ 表达了当染病者的数量增加时, 易感者的行为变化将阻碍传染, 这意味着随着染病者数量的增加, 易感者和染病者间的接触会减少. 因此, 此传染率的引人更具有合理性.

本文安排如下: 第1节讨论平衡点的存在性和稳定性; 第2节证明当地方病平衡点存在时系统(1)是一致持续的; 第3节对所得结果进行总结和讨论.

1 平衡点的存在性和稳定性

为了便于表述, 记 $n=\mu+\varepsilon$, $m=\mu+\alpha+\gamma$, 则系统(1)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-\mu S-\dfrac{\beta SI}{\phi(I)}+\gamma I,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta SI}{\phi(I)}-nE,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\varepsilon E-mI,\end{cases}\tag{2}$$

将系统(2)的3个方程相加可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S+E+I)=A-\mu(S+E+I)-\alpha I.$$

因此, 从模型的实际意义考虑, 仅在集合 $\Omega=\left\{(S,E,I)\in R_+^3: 0<S+E+I\leqslant A/\mu\right\}$ 内考虑系统(2). 这里 R_+^3 表示 R^3 中包括3个坐标面的第一卦限部分. 易知集 Ω 是系统(2)的正不变集.

记 $R_0=\beta\varepsilon A/(\mu mn)$, 则 R_0 即为系统(2)的基本再生数, 它是一个染病者在他的有效传染期内被混入易感者人群中所能产生的二代染病病历数.

显然, 系统(2)总有无病平衡点(平凡平衡点) $P_0(A/\mu,0,0)$. 对于无病平衡点 P_0 有

定理1.1 系统(2)无病平衡点 P_0 当 $R_0<1$ 时在 Ω 上是全局渐近稳定的; 当 $R_0>1$ 时是不稳定的.

为了证明无病平衡点 P_0 的全局渐近稳定性, 引入下面的引理

引理1.2[3] 对于一个在 $[0,\infty)$ 上有界的实值函数 f, 定义

$$f_\infty=\lim_{t\to\infty}\inf f(t),\quad f^\infty=\lim_{t\to\infty}\sup f(t).$$

设 $f:[0,\infty)\to R$ 是有界的且二次可导, 并且有有界的二阶导数. 设当 $k\to\infty$ 时 $t_k\to\infty$ 且 $f(t_k)$ 收敛于 f^∞ 或者 f_∞, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} f'(t_k)=0$.

定理1.1的证明 易知, $\lambda=-\mu$ 是系统(2)在无病平衡点 P_0 处的Jacobi矩阵 $\boldsymbol{J}(P_0)$ 的

一个特征根 $\cdot$ $J(P_0)$ 的其它特征根由方程$(\lambda+n)(\lambda+m)-\beta\varepsilon A/\mu=0$确定$\cdot$ 易知当且仅当 $mn-\beta\varepsilon A/\mu>0$, 即 $R_0<1$时, 此方程的所有根均具有负实部, 所以无病平衡点 P_0 当 $R_0<1$时是局部渐近稳定的, 当 $R_0>1$ 时是不稳定的$\cdot$

根据引理 1.2, 选择序列 $t_k\to\infty(k\to\infty)$ 使得 $E(t_k)\to E^\infty$, $\mathrm{d}E(t_k)/\mathrm{d}t_k\to 0$, 和序列 $\tau_k\to\infty(k\to\infty)$ 使得 $I(\tau_k)\to I^\infty$, $\mathrm{d}I(\tau_k)/\mathrm{d}\tau_k\to 0\cdot$

从系统(2) 的第 2 个方程有

$$E^\infty=\frac{\beta}{n}\lim_{k\to\infty}\frac{S(t_k)I(t_k)}{\phi[I(t_k)]}\leqslant\frac{\beta}{n}\cdot\frac{A}{\mu}\cdot I^\infty,\tag{3}$$

其中用到 $\phi(I)\geqslant 1$ 和 $S\leqslant A/\mu\cdot$

从系统(2) 的第 3 个方程有

$$I^\infty=\frac{\varepsilon}{m}\lim_{k\to\infty}E(\tau_k)\leqslant\frac{\varepsilon}{m}\cdot E^\infty\cdot\tag{4}$$

由不等式(3) 和(4) 有

$$E^\infty\leqslant\frac{\beta\varepsilon A}{\mu mn}E^\infty=R_0E^\infty,\ I^\infty\leqslant\frac{\beta\varepsilon A}{\mu mn}I^\infty=R_0I^\infty\cdot$$

这意味着当 $R_0<1$时 $E^\infty\leqslant 0$和 $I^\infty\leqslant 0\cdot$ 然而, 已知 $E_\infty\geqslant 0$ 和 $I_\infty\geqslant 0$, 所以有 $E^\infty=E_\infty=0$ 和 $I^\infty=I_\infty=0$, 即有$\lim\limits_{t\to\infty}E(t)=0$, 和$\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0\cdot$ 进一步, $\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=A/\mu\cdot$

根据 P_0 的局部稳定性便知: 当 $R_0<1$时, 无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的$\cdot$

定理 1.1 证毕$\cdot$

定理 1.3 当 $R_0>1$时, 系统(2) 在 Ω内有唯一的地方病平衡点(正平衡点)$P^*(S^*,E^*,I^*)$, 它是局部渐近稳定的, 其中 $S^*=mn\phi(I^*)/(\beta\varepsilon)$, $E^*=mI^*/\varepsilon$, 且 I^* 是方程$(mn/\varepsilon-\gamma)I+\mu mn\phi(I)/(\beta\varepsilon)=A$ 在区间$(0,A/\mu)$ 内的唯一根$\cdot$

证明 系统(2) 的地方病平衡点 $P^*(S^*,E^*,I^*)$ 的坐标是方程组

$$\begin{cases}A-\mu S-\dfrac{\beta SI}{\phi(I)}+\gamma I=0,\\ \dfrac{\beta SI}{\phi(I)}-nE=0,\\ \varepsilon E-mI=0\end{cases}\tag{5}$$

在集 Ω内的正解$\cdot$

由方程组(5) 的第 3 个方程有 $E=mI/\varepsilon\cdot$ 由于这里不考虑 $I=0$, 所以将 $E=mI/\varepsilon$代入(5) 的第 2 个方程可得: $S=mn\phi(I)/(\beta\varepsilon)\cdot$ 进一步, 再由(5) 的第 1 个方程有

$$F(I)\overset{\triangle}{=}\left(\frac{mn}{\varepsilon}-\gamma\right)I+\frac{\mu mn}{\beta\varepsilon}\phi(I)-A=0\cdot\tag{6}$$

注意到 $mn/\varepsilon-\gamma=\mu(\mu+\alpha+\gamma)/\varepsilon+(\mu+\alpha)>0\cdot$ 由于 $\phi'(I)\geqslant 0$, 所以 $F(I)$ 是增函数$\cdot$ 显然, $F(A/\mu)>0$, 又 $F(0)=\mu mn/(\beta\varepsilon)-A$(这里用到 $\phi(0)=1$), 因此, 当且仅当 $F(0)<0$, 即 $R_0>1$ 时, 方程(6) 在区间$(0,A/\mu)$ 内有唯一的根 $I^*\cdot$

将 $I=I^*$ 代入 $E=mI/\varepsilon$和$S=mn\phi(I^*)/\beta\varepsilon$即得$E^*$ 和 $S^*\cdot$

由 $F(A/(\mu+\alpha))>0$知, $I^*<A/(\mu+\alpha)$, 因此$0<S^*+E^*=[A-(\mu+\alpha)I^*]/\mu<A/\mu\cdot$ 所以点 $P^*(S^*,E^*,I^*)$ 位于集 Ω的内部$\cdot$

地方病平衡点 P^* 的存在性得到证明$\cdot$

运用等式 $\beta I^*S^*/\phi(I^*)=nE^*$, $\beta S^*/\phi(I^*)=mn/\varepsilon$和$E^*=mI^*/\varepsilon$可得系统(2) 在地

方病平衡点 P^* 处的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}(P^*)=\begin{pmatrix} -\mu-\dfrac{nE^*}{S^*} & 0 & \gamma-\dfrac{mn}{\varepsilon}\left[1-\dfrac{I^*\phi'(I^*)}{\phi(I^*)}\right] \\ \dfrac{nE^*}{S^*} & -n & \dfrac{mn}{\varepsilon}\left[1-\dfrac{I^*\phi'(I^*)}{\phi(I^*)}\right] \\ 0 & \varepsilon & -m \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{J}(P^*)$ 的特征方程为

$$\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3=0,$$

其中

$$a_1=\mu+m+n+\frac{nE^*}{S^*}>0,$$

$$a_2=mn\cdot\frac{I^*\phi'(I^*)}{\phi(I^*)}+(m+n)\left(\mu+\frac{nE^*}{S^*}\right)>0,$$

$$a_3=\frac{nE^*}{S^*}(mn-\varepsilon\gamma)+mn\mu\cdot\frac{I^*\phi'(I^*)}{\phi(I^*)}.$$

进一步,

$$a_1a_2-a_3=\left(m+n+\frac{nE^*}{S^*}\right)\left[mn\cdot\frac{I^*\phi'(I^*)}{\phi(I^*)}+(m+n)\mu\right]+(m+n)\mu^2+\frac{nE^*}{S^*}\left[\left(\mu+m+n+\frac{nE^*}{S^*}\right)(m+n)-mn+\varepsilon\gamma\right].$$

注意到 $m=\mu+\alpha+\gamma$ 和 $n=\mu+\varepsilon$, 所以有 $a_3>0$ 和 $a_1a_2-a_3>0$. 因此, 由 Routh_Hurwitz 定理知, 地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的.

定理 1.3 证毕.

2　持续性

为了引进引理的简要, 首先来回顾一些定义. 设 X 是一个具有度量 d 的局部紧度量空间, F 是 X 空间的一个闭子集. ∂F 和 $\operatorname{int}F$ 分别表示集 F 的边界和内部. 设 π 是定义在集 F 上的一个半动力系统.

称 π 是持续的, 如果对所有的 $u\in\operatorname{int}F$ 都有 $\liminf\limits_{t\to+\infty}d(\pi(u,t),\partial F)>0$. 称 π 是一致持续的, 如果存在 $\xi>0$ 使得对所有的 $u\in\operatorname{int}F$ 都有 $\liminf\limits_{t\to+\infty}d(\pi(u,t),\partial F)>\xi$.

在文献[11]中, Fonda 根据斥子给出了一个关于持续的结果. 一个 F 的子集 Σ 被称为一致斥子, 如果存在 $\eta>0$, 使得对于每一个 $u\in F\setminus\Sigma$ 都有 $\liminf\limits_{t\to+\infty}d(\pi(u,t),\Sigma)>\eta$. 一个在局部紧度量空间的一个闭子集 F 上定义的半流是一致持续的, 如果 F 的边界是排斥的. Fonda 的结论即下面的引理

引理 2.1[11]　设 Σ 是 X 的一个紧子集, 使得 $X\setminus\Sigma$ 是一个正不变集. Σ 是一致斥子的充分必要条件是存在 Σ 的一个邻域 U 和一个连续函数 $P: X\to R_+$ 满足

1) 当且仅当 $u\in\Sigma$ 时 $P(u)=0$.

2) 对所有的 $u\in U\setminus\Sigma$ 都有一个 $T_u>0$ 使得 $P(\pi(u,T_u))>P(u)$.

对任意的 $u_0=(S_0,E_0,I_0)\in\Omega$, 系统(2) 都存在定义在 R_+ 上且满足 $\pi(u_0,0)=(S_0,E_0,I_0)$ 的唯一解 $\pi(u_0,t)=(S,E,I)(t;u_0)$. 由于 Ω 是系统(2) 的一个正不变集, 所以对于 $t\in R_+$ 有 $\pi(u_0,t)\in\Omega$ 且是在 Ω 内的半动力系统.

下面证明 $\Sigma=\left\{(S,E,I)\in\Sigma: I=0\right\}$ 是系统(2) 的一个一致斥子, 这意味着半动力系统 π 是一致持续的。

定理 2.2 如果 $R_0>1$, 则集 Σ 是系统(2) 的一个一致斥子, 因此 π 在 Ω 内是一致持续的。

证明 易知, 当 $I(0)>0$ 时, 对于 $t>0$ 有 $I(t)>0$, 所以 $\Omega\setminus\Sigma$ 是正不变的。 又集 Σ 是 Ω 的一个紧子集。 定义 $P:\Omega\to R_+$ 为 $P(S,E,I)=I$, 并且记 $U=\left\{(S,E,I)\in\Omega: P(S,E,I)<\rho\right\}$, 其中 $\rho>0$ 足够小以使得 $R_0\mu/[\phi(\rho)(u+2\beta\rho)]>1$, 因为 $R_0>1$ 和 $\phi(0)=1$。

假设存在 $u\in U(u=(S,E,I))$ 使得对每一个 $t>0$ 都有 $P(\pi(u,t))<P(u)<\rho$, 即当 $t>0$ 时, $I(t;u)<\rho$。 由系统(2) 的第一个方程有 $\mathrm{d}S/\mathrm{d}t\geqslant A-\mu S-\beta\rho S$, 因此 $\liminf\limits_{t\to+\infty}S(t;u)\geqslant A/(\mu+\beta\rho)$。 所以存在充分大的 $T>0$ 使得当 $t\geqslant T$ 时, $S(t;u)>A/(\mu+2\beta\rho)$。

定义辅助函数 $V(t)=I(t)+\varepsilon(1-\rho^*)E(t)/n$, 其中常数 $\rho^*(0<\rho^*<1)$ 足够小以使得 $R_0\mu(1-\rho^*)/[\phi(\rho)(\mu+2\beta\rho)]>1$。 直接计算可得 $V(t)$ 沿着 $\pi(u,t)$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=\left[\frac{\beta\varepsilon(1-\rho^*)S(t)}{n\phi(I(t))}-m\right]I+\varepsilon\rho^*E,$$

因此对于 $t\geqslant T$ 有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\geqslant\left[\frac{\beta\varepsilon A(1-\rho^*)}{n\phi(\rho)(\mu+2\beta\rho)}-m\right]I+\varepsilon\rho^*E=$$
$$m\left[\frac{R_0\mu(1-\rho^*)}{\phi(\rho)(\mu+2\beta\rho)}-1\right]I+\varepsilon\rho^*E,$$

其中用到 $\phi(I)\leqslant\phi(\rho)$, 这是因为 $I<\rho$ 和 $\phi'(I)\geqslant 0$。

定义常数

$$\delta=\min\left\{m\left[\frac{R_0\mu(1-\rho^*)}{\phi(\rho)(\mu+2\beta\rho)}-1\right],\frac{n\rho^*}{1-\rho^*}\right\}>0,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}\geqslant\delta V(t),$$

此不等式表明当 $t\to\infty$ 时有 $V(t)\to\infty$。 然而, $V(t)$ 在集 Ω 上是有界的。 因此上述假设不成立。

到此为止, 已证明对每一个 $u\in\Omega\setminus\Sigma$, 且 u 属于 Σ 的某个适当的邻域时, 都存在一个 T_u 使得 $P(\pi(u,T_u))>P(u)$。 因此, 根据引理 2.1, 定理 2.2 成立。

定理 2.2 证毕。

3 结 论

本文对一类 SEIS 传染病模型的动力学进行了分析研究。 此模型既含有常数输入率、又含有指数自然死亡率和因病死亡率, 因此模型所考虑的总种群数量随时间变化而改变。 同时, 传染率是一种更符合实际的非线性型传染率。

对于系统(1), 找到了基本再生数 $R_0=A/\mu\cdot\beta/(\mu+\alpha+\gamma)\cdot\varepsilon/(d+\varepsilon)$。 它完全决定了系统(1) 在可行域 Ω 内的动力学行为。 如果 $R_0<1$, 无病平衡点就在 Ω 内全局渐近稳定, 且疾病总会最终灭绝。 如果 $R_0>1$, 则存在唯一的地方病平衡点, 它是局部渐近稳定的, 并且当疾病初始存在时, 疾病会在种群中持续存在。

感谢 本文得到空军工程大学科研基金资助, 特此感谢。

[参 考 文 献]

[1] Wang W, Ma Z. Global dynamics of an epidemic model with delay[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2002, **3**: 809—834.

[2] Wang W. Global behavior of an SEIRS epidemic model time delays[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, **15**(2): 423—428.

[3] Thieme R H. Persistence under relaxed point_dissipativity (with applications to an endemic model) [J]. SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1993, **24**(2): 407—435.

[4] Hethcote H W. The mathematics of infectious diseases[J]. SIAM Review, 2000, **42**(3): 599—653.

[5] Li J, Ma Z. Qualitative analysis of SIS epidemic model with vaccination and varying total population size[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2002, **20**(5): 1235—1243.

[6] Capasso V, Serrio G. A generalization of the Kermack_Mckendrick deterministic epidemic model[J]. Mathematical Biosicences, 1978, **42**(2): 327—346.

[7] Liu W M, Hethcote H W, Levin S A. Dynamical behavior of epidemiological model with nonlinear incidence rates[J]. Journal of Mathematical Biology, 1987, **25**(2): 359—380.

[8] Liu W M, Levin S A, Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models[J]. Journal of Mathematical Biology, 1986, **23**(1): 187—204.

[9] Ruan S, Wang W. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. Journal of Differential Equations, 2003, **188**(1): 135—163.

[10] Derrick W R, van den Driessche P. A disease transmission model in a nonconstant population[J]. Journal of Mathematical Biology, 1993, **31**(3): 495—512.

[11] Fonda A. Uniformly persistent semidynamical systems[J]. Proceedings of American Mathematical Society, 1988, **104**(1): 111—116.

Qualitative Analysis of an SEIS Epidemic Model With Nonlinear Incidence Rate

WANG La_di[1,2], LI Jian_quan[3]

(1. Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, P.R. China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P.R. China;

3. Department of Applied Mathematics and Physics, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, P.R. China)

Abstract: By means of limit theory and Fonda's theorem, an SEIS epidemic model with constant recruitment and the disease_related rate is considered. The incidence term is of the nonlinear form, and the basic reproduction number was found. If the basic reproduction number is less than one, there exists only the disease_free equilibrium which is globally asymptotically stable, and the disease dies out eventually. If the basic reproduction number is greater than one, besides the unstable disease_free equilibrium, there exists also a unique endemic equilibrium, which is locally asymptotically stable, and the disease is uniformly persistent.

Key words: epidemic models; equilibrium; stability; persistence