

圆柱壳中圆盘状晶体压力传感器的厚度剪切振动的厚度剪切振动^{*}

胡元太^{1,2}, 崔之健^{2,3}, 蒋树农¹, 杨嘉实⁴

(1. 中南大学 土木建筑学院 力学与传感技术研究所, 长沙 410083;

2. 华中科技大学 力学系, 武汉 430074;

3. 西安石油大学 石油工程学院, 西安 710065;

4. 内布拉斯加大学 工程力学系, 林肯, NE685 88_0526, 美国)

(郭兴明推荐)

摘要: 以电弹性体中叠加于偏场之上的小增量场理论为基础, 研究了固定在圆柱壳中的圆盘状晶体谐振器的厚度剪切振动问题, 得到了环境压力所诱导的谐振器频率漂移的表达式, 该表达式可用于指导压力传感器的优化设计。数值结果表明: 频率漂移与环境压力成正比, 并且外壳的刚度越小或者压电晶片与外壳厚度之比越小, 则压力传感器的灵敏度越高。

关键词: 压力传感器; 谐振器; 偏场; 增量场; 频率漂移

中图分类号: O343.5 **文献标识码:** A

引 言

线性压电理论假定材料相对于参考构型的偏移是非常小的, 并假定不存在初始场或偏场。偏场的存在将使材料表现出截然不同的行为, 从而导致线性压电理论失效。偏场作用下电弹性体的行为可用叠加于偏场上的小增量场理论来描述^[1,2], 这一理论是由非线性电弹性理论推导而来的^[3]。根据小增量场理论, 振动压电体的频率受到力和温度等环境因素所诱导的偏场的影响, 这种特征可用于设计压力传感器、温度传感器和运动传感器等声波传感器。本文重点研究了压力传感器中的晶体谐振器在压力作用下的频率漂移问题^[4-6]。根据文献[7]可知, 现有的关于这类传感器的大部分研究都是实验性的。本文用增量场理论从理论上对压力传感器进行了分析。文中第 2 节总结了增量场理论的基本方程, 第 3 节利用这些方程分析了压力传感器及其灵敏度。第 4 节给出了数值结果分析。

* 收稿日期: 2005_06_13; 修订日期: 2006_02_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172036); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目

作者简介: 胡元太(1964—), 湖北松滋人, 教授, 博士(Tel: + 86_731_8877752; Fax: + 86_731_8879358; E_mail: hudeng@263.net);

崔之健(1963—), 安徽芜湖人, 副教授(联系人, Tel: + 86_29_88383012; Fax: + 86_29_88382672; E_mail: zhjcu@xsyu.edu.cn)。

1 偏场作用下的电弹性体

本节先给出电弹性体中叠加于偏场之上的增量场理论。由于大部分压力传感器都是用石英制成的,而石英的压电耦合效应非常弱,因此在进行频率分析时只考虑弹性效应就足够了,即可先忽略弱压电耦合作用。现考虑弹性体的以下3种构型(见图1)。

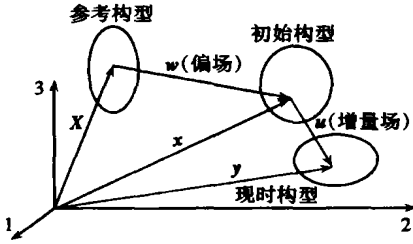


图1 电弹性体的参考构型、初始构型和现时构型

1.1 参考构型

在这种状态下物体无形变。参考构型的质点用直角坐标 X 表示。物体占据着以曲面 S 为边界的空间 V , 其密度为 ρ_0 。 N 是 S 的外法线方向上的单位矢量。

1.2 初始构型

这时,物体已产生静态变形,所受体力为 f_a^0 。这种场称为初始场或偏场。质点 X 的位置用 $x = x(X)$ 或 $x_\gamma = x_\gamma(X)$ 表示,其应变为 S_{KL}^0 。用希腊字母下标表示初始构型。 $x(X)$ 满足以下非线性弹性静力学方程:

$$\begin{cases} K_{K\alpha,K}^0 + \rho_0 f_\alpha^0 = 0, \\ K_{K\alpha}^0 = x_{\alpha,L} T_{KL}^0, \quad T_{KL}^0 = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial S_{KL}} \Big|_{S_{KL}^0}, \\ S_{KL}^0 = (x_{\alpha,K} x_{\alpha,L} - \delta_{KL})/2, \end{cases} \quad (1)$$

式中, ϕ 为应变能密度。

1.3 现时构型

处于初始状态的物体进一步受到与时间相关的小增量场作用,物体所受体力为 f_i 。 X 点的最终位置用 $y = y(X, t)$ 表示, $y(X, t)$ 满足非线性弹性动力学方程:

$$\begin{cases} K_{Lj,L}^0 + \rho_0 \ddot{y}_j = \rho_0 \ddot{y}_j, \\ K_{Lj} = y_{j,K} T_{KL}, \quad T_{KL} = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial S_{KL}} \Big|_{S_{KL}^0}, \\ S_{KL} = (y_{i,K} y_{i,L} - \delta_{KL})/2, \end{cases} \quad (2)$$

设增量位移为 $u(X, t)$, 并假定 u 的幅值较偏场位移小, 故 y 可写为如下形式:

$$y_i(X, t) = \delta_\alpha [x_\alpha(X) + u_\alpha(X, t)]. \quad (3)$$

这表明增量场 u 的控制方程为

$$K_{K\alpha,K}^1 + \rho_0 f_\alpha^1 = \rho_0 \ddot{u}_\alpha, \quad (4)$$

式中, f_α^1 由下式求出

$$f_i = \delta_\alpha (f_\alpha^0 + f_\alpha^1). \quad (5)$$

增量应力张量则由以下本构关系决定:

$$K_{LY}^1 = G_{LYM\alpha} u_{\alpha,M}, \quad (6)$$

式中

$$G_{K\alpha LY} = x_{\alpha,M} \rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial S_{KM} \partial S_{LN}} \Big|_{S_{KL}^0} x_{\gamma,N} + T_{KL}^0 \delta_{\alpha\gamma} = G_{LYK\alpha} \quad (7)$$

称为有效弹性常数,其值取决于初始变形 $x_\alpha(X)$ 。

1.4 压力传感器受偏场作用时的有效材料系数

由于本文所讨论的压力传感器在环境压力作用下的偏场不是太大,因此可以仅考虑偏场的一阶影响,而将能量密度近似取为以下三次多项式函数:

$$\rho_0 \psi(S_{KL}) = \frac{1}{2} c_{ABCD} S_{AB} S_{CD} + \frac{1}{6} c_{ABCDEF} S_{AB} S_{CD} S_{EF} \quad (8)$$

为了方便起见,我们记初始形变的位移矢量为 w , 则

$$x_\alpha = \delta_{\alpha K} X_K + w_\alpha \quad (9)$$

忽略 w 的二次项后,有效材料常数表现为以下形式:

$$G_{K\alpha L\gamma} = c_{K\alpha L\gamma} + \hat{c}_{K\alpha L\gamma}, \quad (10)$$

式中

$$\hat{c}_{K\alpha L\gamma} = T_{KL}^0 \delta_{\alpha\gamma} + c_{K\alpha LN} w_{\gamma, N} + c_{KNLY} w_{\alpha, N} + c_{K\alpha LYAB} S_{AB}^0 \quad (11)$$

2 压力传感器分析

下面,考虑图2所示封装在圆筒外壳中的圆盘状石英板的厚度剪切模态谐振器。构件的长度方向取为 X_2 轴,并沿外表面受到均布压力 p 作用。外力通过外壳在晶片上产生压力 Q (图3所示)。 Q 引起晶片中的偏场。然后,再让晶体以厚度剪切模态振动。显然, Q 的存在将导致石英板的频率漂移,测量这个频率漂移量即可计算出环境压力 p 。

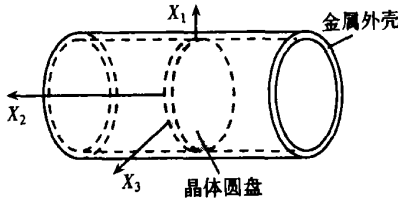


图2 圆柱壳中的圆片状晶体压力传感器

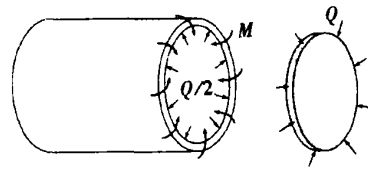


图3 压电晶片和外壳的受力示意图

2.1 有关 Q 的计算

首先需要求出 Q 。由于对称性,可只考虑壳体的一半(见图3)。这里假定壳体很薄,即 h 远小于 R 。 p 的存在会导致弯矩 M 的出现,如图3所示,求解 Q 属于静不定问题。现考虑 AT 切或 SC 切的石英,这样切割的石英在 $X_1 X_3$ 平面的各向异性较弱,与弹性模量的各向同性部分相比其变化只有 $0.055\% \sim 0.231\%$ ^[8]。因此,作为近似处理,在求解 Q 时,将晶体当成各向同性处理。利用壳理论可求出圆筒外壳受 p 、 $Q/2$ 和 M 联合作用时在 $X_2 = 0$ 处的挠度

$$w(0) = \frac{Q}{8\alpha^3 D} - \frac{pR^2}{Eh}, \quad (12)$$

式中, $\alpha^4 = Eh/(4R^2 D)$, $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$, E 和 ν 分别为外壳的弹性模量和 Poisson 比。另外,在求解 $w(0)$ 时,我们已通过协调条件 $[\partial w / \partial X_2]_{X_2=0}$ 将 M 消去。这样圆盘状薄晶片的径向收缩就等于 $w(0)$, 设圆盘的厚度为 $2H$, 因而就有

$$\begin{cases} \frac{Q}{2H} = \frac{p}{\nu}, \\ \nu = \frac{1}{(1 - c_{33}/c_{11})/2 + c_{13}/c_{11} c_{11}} \frac{E}{R} \frac{h}{R} + \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{H}{\sqrt{Rh}}, \end{cases} \quad (13)$$

式中 $c_{11} = c_{11} - c_{12}^2/c_{22}$, $c_{33} = c_{33} - c_{13}^2/c_{22}$, $c_{13} = c_{13} - c_{12}c_{13}/c_{22}$ 。

2.2 晶片中的偏场

对于受 Q 作用的圆盘状晶片中的偏场, 应近似当作平面应力状态且各向同性处理,

$$T_{11}^0 = T_{33}^0 = -Q/2H, \text{ 其余 } T_{ij}^0 = 0, \quad (14)$$

因此偏场应变为

$$\begin{cases} (S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0) = - (Q/2H)(G_{11} + G_{13}, G_{21} + G_{23}, G_{31} + G_{33}), \\ (S_{23}^0, S_{31}^0, S_{12}^0) = - (Q/2H)(G_{41} + G_{43}, 0, 0), \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$(G_j)_{4 \times 4} = (c_{ij})_{4 \times 4}^{-1} \quad (16)$$

2.3 增量厚度剪切振动

对于增量运动, 现只考虑 X_1 方向的厚度剪切运动. 当不存在偏场时, 奇数阶模态如下式:

$$\begin{cases} U_1 = \sin \frac{n\pi X_2}{2H} e^{i\omega_0 t}, & n = 1, 3, 5, \dots, \\ U_2 = U_3 = 0, & \omega_0^2 = \frac{n^2 \pi^2 c_{66}}{4\rho_0 H^2}. \end{cases} \quad (17)$$

偏场存在时, 通过一阶摄动分析法^[9], 可计算出偏场作用下压电谐振器的一阶频率漂移, 如下式所示

$$\Delta \omega = \omega - \omega_0 = \frac{1}{2\omega_0} \frac{\int_V \hat{c}_{L\gamma M\alpha} U_{\gamma, L} U_{\alpha, M} dV}{\int_V \rho_0 U_\alpha U_\alpha dV}, \quad (18)$$

其中 ω 为偏场作用下的摄动共振频率, ω_0 、 U_α 、 V 和 ρ_0 分别为无偏场时晶体谐振器的非扰动频率、相应的模态、谐振器的参考体积和参考构型下的体密度. 将偏场变形和非扰动模态代入 (18) 式可得

$$\Delta \omega = \left(\frac{n\pi}{2H} \right)^2 \frac{\hat{c}_{2121}}{2\omega_0 \rho_0}, \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{c}_{2121} = & (2c_{66} + c_{21} + c_{661})S_{11}^0 + (c_{22} + c_{662})S_{22}^0 + (c_{23} + c_{663})S_{33}^0 \\ & + (c_{24} + c_{664})S_{23}^0 + (c_{46} + c_{25} + c_{665})S_{13}^0 + (2c_{26} + c_{666})S_{12}^0. \end{aligned} \quad (20)$$

3 数值结果及讨论

为描述材料特性和几何参数对频率漂移的影响, 文中进行了一些具体的数值计算. 壳体材料分别选用铝、铜和钨, 其弹性模量 E 分别为 $70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $110 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 和 $360 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. 石英的材料参数引自文献[10]

$$\begin{cases} c_{11} = c_{22} = 86.74 \times 10^9 \text{ N/m}^2, & c_{21} = 6.99 \times 10^9 \text{ N/m}^2, & c_{66} = 39.88 \times 10^9 \text{ N/m}^2; \\ c_{661} = [(-2c_{111} - c_{112} + 3c_{222})/4], & c_{662} = [(2c_{111} - c_{112} - c_{222})/4]; \\ c_{111} = -2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, & c_{112} = -3.45 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, & c_{222} = -3.32 \times 10^{11} \text{ N/m}^2. \end{cases} \quad (21)$$

Langasite 是种相对较新的晶体, 它与石英具有相同的晶体对称性. 我们也对 Langasite 谐振器的频率漂移进行了计算, 其材料参数为(Yang, 2005)^[10]:

$$\begin{cases} c_{11} = c_{22} = 18.875 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & c_{21} = 10.475 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & c_{66} = 4.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2; \\ c_{661} = [(-2c_{111} - c_{112} + 3c_{222})/4], & c_{662} = [(2c_{111} - c_{112} - c_{222})/4]; \\ c_{111} = -9.72 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, & c_{112} = 0.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, & c_{222} = -9.65 \times 10^{11} \text{ N/m}^2. \end{cases} \quad (22)$$

不同壳体材料的 Y_{Cut} 石英片的频率漂移-压力曲线如图 4 所示, 其中 $h/R = H/R = 1/10$ 。 Y_{Cut} Langasite 晶片的频率漂移曲线如图 5 所示。从图中可看出频率漂移与 p 成线性关系, 且直线的斜率与灵敏度有关, 较大的斜率代表较高的灵敏度。很明显, 采用较软外壳材料时灵敏度较高。

不同的 H/h 值所对应的 Y_{Cut} 石英片的频率漂移与压力之间的关系曲线如图 6 所示, 其中 $H/R = 1/10$ 固定不变, 外壳材料固定为铝。图 6 表明灵敏度随 H/h 的减小而增加。

值得注意的是以上分析都是建立在小偏场或低环境压力假设基础上的。如果构件受力较大, 那么就需要用有限偏场(非线性)的方程来对频率漂移进行更准确预测^[7, 11-13]。

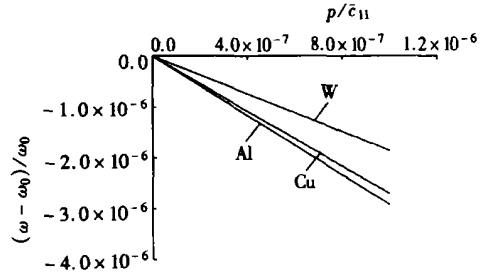


图 4 不同外壳材料对石英谐振器的频率漂移的影响

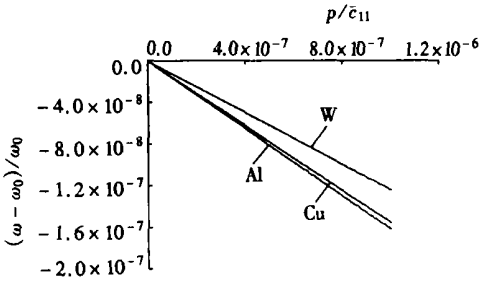


图 5 不同外壳材料对 Langasite 谐振器的频率漂移的影响

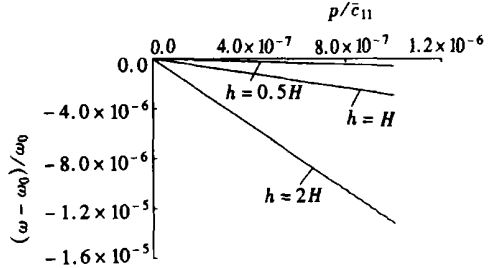


图 6 不同结构尺寸对石英谐振器的频率漂移的影响

4 结 论

本文对压力传感器进行了理论分析, 并获得了传感器灵敏度与压力、材料参数及结构尺寸之间的简单表达式, 并数值分析了以上诸因素对压力传感器灵敏度的影响规律。所得结果对理解和优化这类传感器具有重要意义。

[参 考 文 献]

- [1] Baumhauer J C, Tiersten H F. Nonlinear electroelastic equations for small fields superposed on a bias[J]. J Acoust Soc Am er, 1973, 54(4): 1017—1034.
- [2] Tiersten H F. On the accurate description of piezoelectric resonators subject to biasing deformations [J]. Internat J En g g Sci, 1995, 33(15): 2239—2259.
- [3] Tiersten H F. Nonlinear electroelastic equations cubic in the small field variables[J]. J Acoust Soc Am er, 1975, 57(3): 660—666.
- [4] Besson R J, Boy J J, Glotin B, et al. A dual_mode thickness_shear quartz pressure sensor[J]. IEEE

- Trans Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, 1993, **40**(4): 584—591.
- [5] EerNisse E P, Wiggins R B. Review of thickness_shear mode quartz resonator sensors for temperature and pressure[J]. IEEE Sensors Journal, 2001, **1**(1): 79—87.
- [6] EerNisse E P. Quartz resonators vs their environment: time base or sensor? [J]. J Appl Phys, 2001, **40**(5): 3479—3483.
- [7] YANG Jia_shi, HU Yuan_tai. Mechanics of electroelastic bodies under biasing fields[J]. Applied Mechanics Reviews, 2004, **57**(3): 173—189.
- [8] Tiersten H F, Zhou Y S. An analysis of transversely varying thickness modes in quartz resonators with bevelled cylindrical edges[A]. In: IEEE, Ed. Proc 1993 IEEE Internat Frequency Control Symp [C]. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1993, 431—441.
- [9] Tiersten H F. Perturbation theory for linear electroelastic equations for small fields superposed on a bias[J]. J Acoust Soc Amer, 1978, **64**(3): 832—837.
- [10] YANG Jia_shi. An Introduction to the Theory of Piezoelectricity [M]. New York Springer, 2005, 287—297.
- [11] HU Yuan_tai, YANG Jia_shi, JIANG Qing. A model for electroelastic plates under biasing fields with applications in buckling analysis[J]. Internat J Sol Struct, 2002, **39**(9): 2629—2642.
- [12] HU Yuan_tai, YANG Jia_shi, JIANG Qing. Surface waves in electroelastic materials under biasing fields[J]. Z Angew Math Phys, 2004, **55**(4): 678—700.
- [13] HU Yuan_tai, YANG Jia_shi, JIANG Qing. On modeling of extension and flexure response of electroelastic shells under biasing fields[J]. Acta Mechanica, 2002, **156**(3/4): 163—178.

Thickness_Shear Vibration of a Circular Crystal Plate in a Cylindrical Shell as a Pressure Sensor

HU Yuan_tai^{1,2}, CUI Zhi_jian^{2,3}, JIANG Shu_nong¹, YANG Jia_shi⁴

(1. Institute of Mechanics and Sensing Technology, School of Civil Engineering and Architecture,
Central South University, Changsha 410083, P. R. China;

2. Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology,
Wuhan 430074, P. R. China;

3. School of Natural Resources and Oil Engineering, Xi' an Oil University,
Xi' an 710065, P. R. China;

4. Department of Engineering Mechanics, University of Nebraska,
Lincoln, NE 68588_0526, USA)

Abstract: Based on the theory for small fields superposed on relatively larger fields in an electroelastic body, a theoretical analysis was performed on a circular plate thickness_shear crystal resonator sealed in a circular cylindrical shell for pressure measurement. A simple expression is obtained for pressure induced frequency shifts in the resonator, which is examined for design optimization. Numerical results show that the frequency shifts depend linearly on the pressure, and that a pressure sensor with a softer outer shell or a smaller thickness ratio of the crystal plate to the outer shell has higher sensitivity.

Key words: pressure sensor; resonator; biasing field; incremental field; frequency shift