

基于 Roe 格式的可压与不可压流的 的统一计算方法*

黄典贵

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(戴世强推荐)

摘要: 以 Navier-Stokes 方程为基础, 基于有限体积的时间推进的预处理技术, 提出了一个可以用来求解可压与不可压流场的统一的计算方法。原始变量选用压力、速度与温度, 通过矩阵变换与重构, 使得对流项系数矩阵在可压与不可压条件下都不会奇异, 将可压与不可压流场的计算方法统一起来。采用 Roe 格式计算对流通量, 采用中心差分格式计算扩散通量。算例表明, 该方法可以进行高 Mach 数、中等 Mach 数、低 Mach 数及不可压流场的计算。由于采用了 Roe 格式, 该方法还可以捕获不连续流场的间断面。

关键词: 流场; 预处理; 可压; 不可压

中图分类号: O351.2 文献标识码: A

引 言

在跨音、超音及高超音流场计算方面, 时间推进技术已经被证明是一种很好的方法。当求解跨音及超音流场时, 这种方法具有很好的稳定及收敛特性。然而, 在低 Mach 数区域内, 当速度 U 与音速 c 相比很小时 ($U \ll c$), 时间相关的流体力学方程组对流项系数矩阵的几个特征值不处于同一数量级, 方程组奇异, 此时, 时间推进方法就很难收敛。采用可压流场解法求解低 Mach 数流动问题仍然是当前计算流体力学的一个难题。压力校正法是求解不可压流场的基本方法, 时间推进法在不可压流场的求解中很难发挥作用。设计一种具有高效率与高稳定性的、能够同时处理可压与不可压、高 Mach 数与低 Mach 数的统一的时间推进的流体力学计算方法很有意义。预处理技术通过一系列矩阵变换, 使得对流项系数矩阵的特征值与 Mach 数无关且所有特征值始终处于同一数量级, 这样, 不管对高 Mach 数与低 Mach 数、可压还是不可压流动, 时间推进解法都可以获得令人满意的稳定的收敛解。

在现有的文献中, 已有不少预处理技术的报道, 有些是关于通用意义上的预处理方法的论述, 即不论是可压还是不可压、高 Mach 数还是低 Mach 数, 该方法都适用; 有些则将精力集中于低 Mach 数流动方面。Turkel^[1] 和 Guillard 等人^[2] 讨论了求解不可压与低 Mach 数可压流场的预

* 收稿日期: 2004_08_17; 修订日期: 2006_02_20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50576049); 国防基础科研项目(A4020060263); 上海市重点学科建设项目(Y0103)

作者简介: 黄典贵(1963—), 男, 江苏海安人, 教授, 博士生导师, 博士(Tel: + 86_21_56333460; E_mail: dghuang@staff.shu.edu.cn)。

处理方法; Storti 等人^[3]报导了一个用于求解不可压流的显式预处理技术; Weiss 等人^[4]将预处理技术应用于变密度与常密度流动中; Merkle 等人^[5]将预处理技术推广到适用于工质的任意状态方程; Choi 等人^[6]和 Weiss 等人^[4]考虑了粘性流动的预处理技术; Edwards^[7]采用 AUSM+ 格式, 将预处理技术推广到各种速度下的真实流体。

Roe 格式^[8]具有自动捕获不连续流场中间断面的强大功能。为了使研制的程序不但能够统一可压与不可压流场的计算方法, 而且能够捕获如激波、气液两相流的交界面等间断面, 本文提出了基于高阶隐式逆风 Roe 格式的有限体积预处理方法。文中给出了控制方程及其预处理矩阵, 导出了预处理方法中用到的特征值及特征向量及 Roe 矩阵。

1 控制方程

三维曲线坐标系 (ξ, η, ζ) 下的连续方程、动量方程与能量方程可以表达如下:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial E^v}{\partial \xi} + \frac{\partial F^v}{\partial \eta} + \frac{\partial G^v}{\partial \zeta} + S, \quad (1)$$

这里, W 为未知的守恒型变量, E 、 F 和 G 是无粘通量, E^v 、 F^v 、 G^v 是扩散项, S 是源项;

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \rho U \\ \rho U u + p \xi_x \\ \rho U v + p \xi_y \\ \rho U w + p \xi_z \\ (\rho + p) U \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho V u + p \eta_x \\ \rho V v + p \eta_y \\ \rho V w + p \eta_z \\ (\rho e + p) V \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} \rho W \\ \rho W u + p \zeta_x \\ \rho W v + p \zeta_y \\ \rho W w + p \zeta_z \\ (\rho e + p) W \end{pmatrix},$$

$$U = \mathbf{V} \cdot \mathbf{l}, \quad V = \mathbf{V} \cdot \mathbf{m}, \quad W = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n},$$

ρ 是密度, w 、 v 、 u 分别是 x 、 y 和 z 方向上的速度分量, e 是单位质量上的总内能, p 是静压, $\rho e = \rho H - p = \rho(h + (u^2 + v^2 + w^2)/2) - p$, H 是总焓, h 是静焓, $\mathbf{V} = ui + vj + wk$, $\mathbf{l} = \xi_x i + \xi_y j + \xi_z k$, $\mathbf{m} = \eta_x i + \eta_y j + \eta_z k$, $\mathbf{n} = \zeta_x i + \zeta_y j + \zeta_z k$ 。

为了使方程组封闭, 采用任意的状态方程来描述密度、压力与温度之间的关系, $\rho = \rho(p, T)$ 。如对理想气体, $\rho = p/(RT)$; 对实际气体, 可以用 Redlich_Kwong 状态方程, $p = RT/(\nu - b) - a/(\nu(\nu + b)\sqrt{T})$, 也可以用 Van der Waals 状态方程($p = RT/(\nu - b) - a/\nu^2$); 对不可压流体, 用密度 ρ 为常数作为状态方程。

2 预处理

将方程(1)中的守恒型未知变量 W 转化为原始变量 Q , 并引入预处理矩阵 Γ , 得到下式:

$$\Gamma \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \frac{\partial E^v}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{\partial F^v}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial G^v}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial \zeta} + D. \quad (2)$$

这里预处理矩阵 Γ 依赖于所选用的原始变量, 如 $Q = (p, u, v, w, T)$, 文献[4]中给出了如下形式的 Γ :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Theta & 0 & 0 & 0 & \rho_r \\ u \Theta & \rho & 0 & 0 & u \rho_r \\ v \Theta & 0 & \rho & 0 & v \rho_r \\ w \Theta & 0 & 0 & \rho & w \rho_r \\ H \Theta - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho H + \rho_p \end{pmatrix}, \quad U_r = \begin{cases} \varepsilon, & \text{当 } |V| < \varepsilon, \\ |V|, & \text{当 } \varepsilon < |V| < c, \\ c, & \text{当 } |V| > c, \end{cases}$$

这里, $\Theta = 1/U_r^2 - \rho_r/(\rho c_p)$, $\rho_r = \partial \rho / \partial T$, $c_p = \partial h / \partial T$, ε 是一个很小的数, $|V|$ 是绝对速度。

3 特征值与特征向量

让 $A_r = \Gamma^{-1}(\partial E/\partial Q)$, $B_r = \Gamma^{-1}(\partial F/\partial Q)$, $C_r = \Gamma^{-1}(\partial G/\partial Q)$, 以 A_r 为例, 可以导出 A_r 的特征值为 $(U, U, U, U + C', U - C')$, 其中 $U = (1 - \alpha)U$, $C' = \sqrt{\alpha^2 U^2 + (Uh)^2}$, $\alpha = (1 - \beta U_r^2)/2$, $\beta = \partial \rho/\partial p - \theta/(\rho c_p)$ 。

对理想气体, β 可以化简为 $1/c^2$, $\alpha = 0$, 所以当 $U_r = c$ 时, 预处理方法中 A_r 的特征值与传统的方法中对流项系数矩阵的特征值完全一样, 即这时用预处理方法与不用预处理方法是等效的; 当速度很低时, 如果用传统方法, $U \ll c$, 相对于声速 c , U 是小到可以忽略的量, 因此几个特征值不处于同一量级, 方程组是病态的, 但在预处理方法中, $U_r = \varepsilon$, $\alpha \rightarrow 0.5$, A_r 的所有特征值与速度 U 处于同一量级。对恒密度的不可压流动, $\beta = 0$, $\alpha = 0.5$, A_r 的所有特征值与速度 U 处于同一量级。所以, 在预处理方法中, 不管工质的压缩性或流动 Mach 数如何, 所有对流项系数矩阵的特征值都处于同一数量级, 方程组不会奇异, 因此可能获得稳定的收敛解。矩阵 A_r 的左、右特征向量可以表达如下:

$$L_A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho_p} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\xi'}{r} & \frac{\xi'}{r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi\xi'}{r} & \frac{\xi\xi'}{r} & -r' & 0 \\ \frac{\kappa}{2c\rho_p} & \frac{\xi' \kappa \phi}{2cc_p} & \frac{\xi' \kappa \phi}{2cc_p} & \frac{\xi' \kappa \phi}{2cc_p} & 0 \\ -\frac{\vartheta}{2c\rho_p} & -\frac{\xi' \phi \vartheta}{2cc_p} & -\frac{\xi' \phi \vartheta}{2cc_p} & -\frac{\xi' \phi \vartheta}{2cc_p} & 0 \end{bmatrix}, R_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\rho_p \phi}{\kappa} & -\frac{\rho_p \phi}{\vartheta} \\ 0 & -\frac{\xi'}{r} & \frac{\xi' \xi'}{r} & \frac{c_p \xi'}{\kappa} & \frac{c_p \xi'}{\vartheta} \\ 0 & \frac{\xi'}{r} & \frac{\xi' \xi'}{r} & -\frac{c_p \xi'}{\kappa} & -\frac{c_p \xi'}{\vartheta} \\ 0 & 0 & -r' & -\frac{c_p \xi'}{\kappa} & -\frac{c_p \xi'}{\vartheta} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\phi}{\kappa} & -\frac{\phi}{\vartheta} \end{bmatrix}$$

这里 $\phi = U\alpha - c$, $\varphi = U\alpha + c$, $\kappa = \sqrt{(\rho^2 \phi^2 + 1)c_p^2 + \phi^2}$, $\vartheta = \sqrt{(\rho^2 \phi^2 + 1)c_p^2 + \phi^2}$, $\xi_x'^2 + \xi_y'^2 + \xi_z'^2 = 1$, $U = u\xi'_x + v\xi'_y + w\xi'_z$, $c = \sqrt{\alpha^2 U^2 + U_r^2}$ 。

根据对称性原则, 同样可以获得 B_r 的左、右特征向量 (L_B, R_B) 和 C_r 的左、右特征向量 (L_C, R_C)。

4 Roe 格式

应用 Roe 的 Riemann 逼近方法^[8], 每个单元边界上的无粘通量 E 可以表达如下:

$$E_{i+1/2, j, k} = 0.5[E(Q^+) + E(Q^-) - A(Q^+ - Q^-)]_{i+1/2, j, k}$$

这里 $A = \Gamma |A_r|$, $|A_r| = R_A |\Lambda_A| L_A$, 下标 (i, j, k) 规定了单元的位置, Q^- 和 Q^+ 是单元界面上重构后的左、右 Riemann 不变量, A_r 和 Γ 分别是 Roe 平均的 A_r 和 Γ 。 A 是 Jacobi 矩阵 Roe 平均, (L_A, R_A) 是 A_r 的左、右特征向量。 Λ_A 是 A_r 的特征值的对角阵。无粘通量 F 和 G 的表达与 E 类似。

5 空间和时间离散

在变换后的坐标内, 考虑一个有限控制单元 $d\xi d\eta d\zeta$, 这个单元的中心点位于 (i, j, k) , 这个单元的体积是 $dV_{i, j, k}$, 时间步数为 n 。方程组 (2) 可以离散为如下形式:

$$\Gamma_{i, j, k} \delta Q_{i, j, k}^{n+1} dV_{i, j, k} / \Delta t + (E_{i+1/2, j, k}^{n+1} - E_{i-1/2, j, k}^{n+1}) + (F_{i, j+1/2, k}^{n+1} - F_{i, j-1/2, k}^{n+1}) +$$

$$(G_{i,j,k+1/2}^{n+1} - G_{i,j,k-1/2}^{n+1}) = R_{hs}, \quad (3)$$

其中
$$R_{hs} = (E_{i+1/2,j,k}^V - E_{i-1/2,j,k}^V)^{n+1} + (F_{i,j+1/2,k}^V - F_{i,j-1/2,k}^V)^{n+1} + (G_{i,j,k+1/2}^V - G_{i,j,k-1/2}^V)^{n+1} + S_{i,j,k}^{n+1} dV_{i,j,k} \cdot$$

对原始变量 Q , 采用如下高精度的重构格式:

$$\begin{cases} Q_{i+1/2} = Q_i + 0.25[(1-\sigma)(Q_i - Q_{i-1}) + (1+\sigma)(Q_{i+1} - Q_i)], \\ Q_{i+1/2}^+ = Q_i - 0.25[(1-\sigma)(Q_{i+2} - Q_{i+1}) + (1+\sigma)(Q_{i+1} - Q_i)] \cdot \end{cases}$$

可以证明, $\delta = 0.5$ 时, 该格式是具有三阶精度的逆风格式。

为了加强对角占优的特性, 让 $\delta Q_{i+1/2}^+ = \delta Q_{i+1}$ 且 $\delta Q_{i+1/2}^- = \delta Q_i$, 这样有:

$$\begin{cases} E_{i+1/2,j,k}^{n+1} = E_{i+1/2,j,k}^n + 0.5[(\partial E/\partial Q)_{i,j,k}^n \delta Q_{i,j,k}^{n+1} + (\partial E/\partial Q)_{i+1,j,k}^n \delta Q_{i+1,j,k}^{n+1}] - 0.5A_{i+1/2,j,k}(\delta Q_{i+1,j,k}^{n+1} - \delta Q_{i,j,k}^{n+1}), \\ E_{i-1/2,j,k}^{n+1} = E_{i-1/2,j,k}^n + 0.5[(\partial E/\partial Q)_{i-1,j,k}^n \delta Q_{i-1,j,k}^{n+1} + (\partial E/\partial Q)_{i,j,k}^n \delta Q_{i,j,k}^{n+1}] - 0.5A_{i-1/2,j,k}(\delta Q_{i-1,j,k}^{n+1} - \delta Q_{i,j,k}^{n+1}) \cdot \end{cases}$$

类似地, $(F_{i,j+1/2,k}^{n+1} - F_{i,j-1/2,k}^{n+1})$ 和 $(G_{i,j,k+1/2}^{n+1} - G_{i,j,k-1/2}^{n+1})$ 也可以详细地表达出来, 将上述所有关系代入方程(3), 应用块状三对角求节器, 可以逐条线地解出原始变量 δQ^{n+1} 。

6 算 例

为了验证上述计算方法, 下面给出了几个典型算例, 如超音速平板流动、亚音速平板流动、很低速度平板流动、不可压绕流、含激波的跨音速流动。

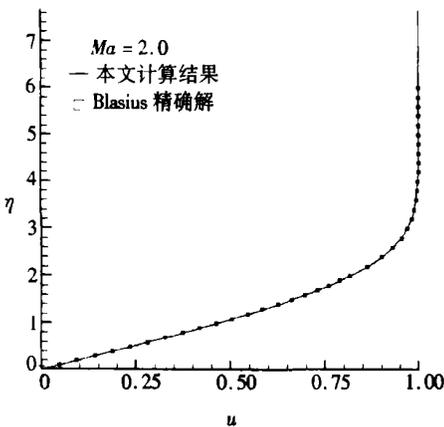


图 1 Mach 数为 2.0 时的速度分布比较

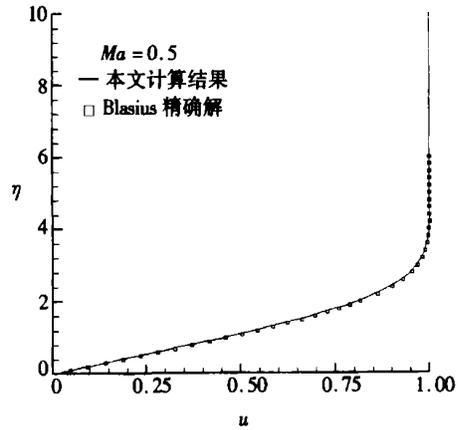


图 2 Mach 数为 0.5 时的速度分布比较

图 1 是 Mach 数为 2.0 时平板流动的速度分布, 图 2 是 Mach 数为 0.5 时平板流动的速度分布, 网格数为 80×80 , 实线是本文的计算结果, 小方块是 Blasius 精确解, 可见本文的计算结果与精确解完全一致。

图 3 给出了 Mach 数为 0.01 时的速度分布, 图 4 给出了该 Mach 数下的温度分布, 实线是本文的计算结果。从这两幅图可以看出, 在低速流动时, 预处理方法的计算结果与精确解是一致的。特别值得一提的是, 本文计算过程中采用了双精度, 从温度分布图上可以看出, 流场具有极高的分辨率。

图 5 是水绕流半圆头状物体的等压线图, 计算网格为 140×120 , Reynolds 数为 13 600。Rouse 和 McNown 对这样一个问题做过详细的试验^[9]。图 6 给出了本文计算结果与试验的比

较, 实线是本文的计算结果, 小方块是试验值, 横坐标 s/d 是半圆头最前端起的行程与直径之比, 纵坐标是无量纲压力。从图 6 可以看出, 本文计算结果与试验值吻合较好, 证明本文的计算方法对不可压流场的计算是可行的。

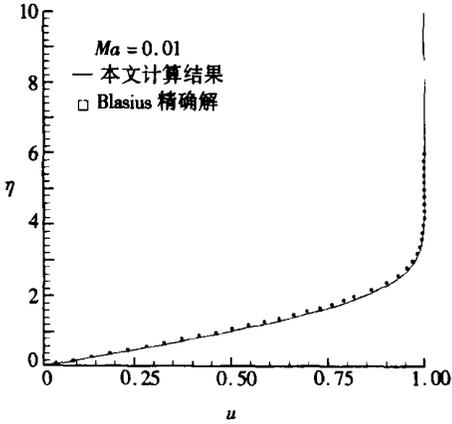


图 3 Mach 数为 0.01 时的速度分布比较

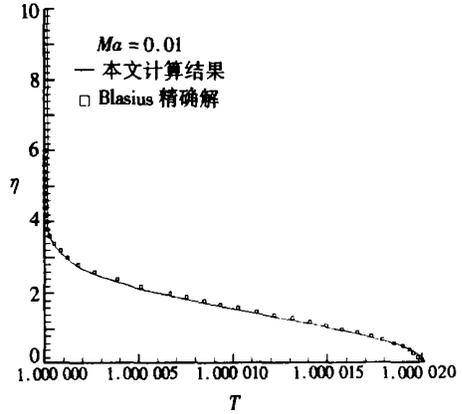


图 4 Mach 数为 0.01 时的温度分布比较

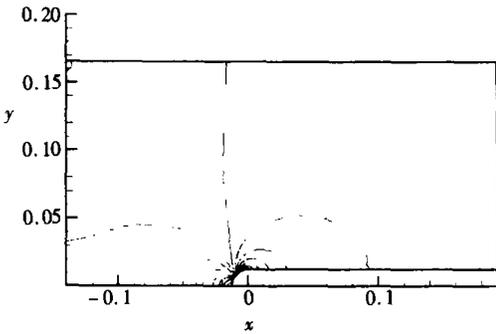


图 5 等压线分布

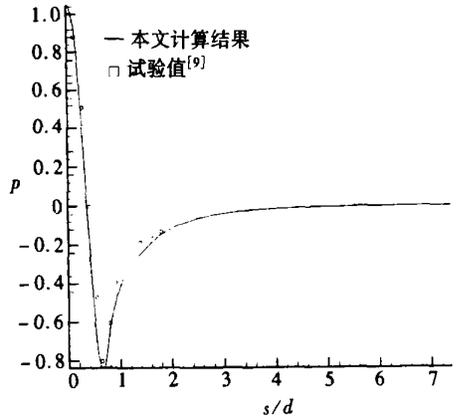


图 6 物体表面的压力分布比较

将本文方法用于缩放喷管含有激波问题的流场仿真^[10], 压比为 0.72, Reynolds 数为 172 800。图 7 给出了喷管内的等压线分布, 紊流模型采用 Baldwin-Lomax 代数模型。无粘通量采用三阶精度, 粘性项采用二阶精度。图 7 可以看出, 在喉部下游, 一个正激波被捕获。可见, 本文方法对于存在间断面的流场仿真是成功的。



图 7 缩放喷管内的等压线

7 结 论

利用预处理技术, 本文发展了一个统一的流体力学计算方法, 它可以同时求解可压与不可压 N_S 方程。该预处理程序是由一个基于有限体积全隐 Roe 格式的可压缩流场求解器发展而来。文中给出了流动控制方程、预处理矩阵、相应的特征值及特征向量等。算例表明, 该方法可以求解超声速流动、跨声速流动、亚声速流动、低速流动、不可压流动, 还能捕获流场的间断面。

致谢 本文的部分工作是在美国 Miami 大学 CFD 实验室完成的, 并得到了美国 Florida Space Grant Consortium 的资助, 感谢查戈成博士对本文工作的帮助。

[参 考 文 献]

- [1] Turkel E. Preconditioned method for solving the incompressible and low speed compressible equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **72**(2): 277—298.
- [2] Guillard Herve, Viozat Cecile. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit [J]. *Computer & Fluids*, 1999, **28**(1): 63—86.
- [3] Storti M, Nigro N, Idelsohn S. Steady state incompressible flows using explicit schemes with an optimal local preconditioning[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, **124**(3): 231—252.
- [4] Weiss Jonathan M, Smith Wayne A. Preconditioning applied to variable and constant density flow [J]. *AIAA J*, 1995, **33**(11): 2050—2057.
- [5] Merkle Charles L, Sullivan Jennifer Y, Buelow Philip E O, et al. Computation of flow with arbitrary equations of state[J]. *AIAA J*, 1998, **36**(4): 515—521.
- [6] Choi Y H, Merkle C L. The application of preconditioning in viscous flows[J]. *Journal of Computational Physics*, 1993, **105**(2): 207—223.
- [7] Edwards Jack R, Franklin Randall K, Liou Meng_Sing. Low_diffusion flux_splitting methods for real fluid flows with phase transitions[J]. *AIAA J*, 2000, **38**(9): 1624—1633.
- [8] Roe P L. Approximate Riemann solvers, parameter vector, and difference schemes[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, **43**(2): 357—372.
- [9] Rouse H, McNown J S. Cavitation and Pressure Distribution, Head Forms at Zero Angle of Yaw [M]. *Studies in Engineering Bulletin 32*. Iowa: State University of Iowa, 1948.
- [10] Bogar T, Sajben M, Kroutil J. Characteristic frequencies of transonic diffuser flow oscillations[J]. *AIAA J*, 1983, **21**(9): 1232—1240.

Unified Computation of Flow With Compressible and Incompressible Fluid Based on Roe's Scheme

HUANG Dian_gui

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: A unified numerical scheme for the solutions of the compressible and incompressible Navier-Stokes equations is investigated based on a time_derivative preconditioning algorithm. The primitive variables were pressure, velocities and temperature. The time integration scheme was used in conjunction with a finite volume discretization. The preconditioning was coupled with a high order implicit upwind scheme based on the definition of a Roe's type matrix. Computational capabilities are demonstrated through computations of high Mach number, middle Mach number, very low Mach number, and incompressible flow. It has also been demonstrated that the discontinuous surface in flow field can be captured for the implementation Roe's scheme.

Key words: flow field; preconditioning; compressible fluid; incompressible fluid