

# 功能梯度材料 Timoshenko 梁的热过屈曲分析\*

李世荣, 张靖华, 赵永刚

(兰州理工大学 理学院, 兰州 730050)

(王铁军推荐)

**摘要:** 研究了功能梯度材料 Timoshenko 梁在横向非均匀升温下的热过屈曲。在精确考虑轴线伸长和一阶横向剪切变形的基础上, 建立了功能梯度 Timoshenko 梁在热机械载荷作用下的几何非线性控制方程, 将问题归结为含有 7 个基本未知函数的非线性常微分方程边值问题。其中, 假设功能梯度梁的材料性质为沿厚度方向按照幂函数连续变化的形式。然后采用打靶法数值求解所得强非线性边值问题, 获得了横向非均匀升温场内两端固定 Timoshenko 梁的静态非线性热屈曲和热过屈曲数值解。绘出了梁的变形随温度载荷及材料梯度参数变化的特性曲线, 分析和讨论了温度载荷及材料的梯度性质参数对梁变形的影响。结果表明, 由于材料在横向的非均匀性, 均匀升温时的梁中存在拉弯耦合变形。

**关键词:** 功能梯度材料; Timoshenko 梁; 热屈曲; 打靶法; 数值解

**中图分类号:** O343.7      **文献标识码:** A

## 引 言

功能梯度材料(functionally graded materials, FGMs)的概念最早由日本科学家在 1984 年提出<sup>[1]</sup>。FGMs 是一种新型、微观非均匀的材料, 其力学性质从一个表面到另一个表面是平滑而连续变化的。它在工程应用中表现出很多优越的特性, 例如抵抗高温梯度、平缓应力集中等。因此, FGMs 已被广泛用于航空航天、核反应堆等高温梯度环境中工作的结构元件。所以, 功能梯度材料结构在热载荷下的力学行为吸引了越来越多的固体力学和材料科学领域的研究人员<sup>[1-10]</sup>, 并已经成为固体力学的一个新的研究方向。

FGM 结构的稳定性分析已经有很多文献报道。Feldman 和 Aboudi 研究了功能梯度板在面内压力作用下的弹性分支屈曲问题, 给出了四边简支和固定矩形板的临界屈曲载荷<sup>[2]</sup>; Javeri 和 Eslami 讨论了功能梯度板的热屈曲问题, 得到了问题在多种热载荷作用下的近似解<sup>[3]</sup>; Ma 和 Wang 基于一阶和三阶剪切变形理论, 研究了功能梯度圆板在机械和热载荷共同作用下的非线性弯曲及过屈曲行为<sup>[4,5]</sup>。Liew 等讨论了带压电层功能梯度复合材料混合矩形板在热、电、机械多种载荷作用下的屈曲和过屈曲<sup>[6]</sup>; Reddy 和 Chin 研究了 FGM 圆柱壳和板的动力

\* 收稿日期: 2005\_02\_01; 修订日期: 2006\_02\_14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472039)

作者简介: 李世荣(1957—), 男, 甘肃人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_931\_2976083; Fax: + 86\_931\_2976040; E\_mail: lsr2000@yahoo.com.cn)。

热弹性响应问题,考虑三维热传导方程,利用一阶剪切变形板理论,推导了功能梯度板的热弹性边值问题<sup>[7]</sup>。Yang 和 Shen 给出了四边固支功能梯度矩形板的屈曲载荷,并讨论在其它边界条件下预加横向载荷功能梯度矩形板的后屈曲行为<sup>[8]</sup>。Ma 和 Wang 基于经典非线性 von Kármán 板理论,研究了 FGM 圆板分别在机械、热和热机械载荷同时作用下的大挠度弯曲问题,同时研究了 FGM 圆板的热过屈曲问题<sup>[9]</sup>。文献[8]和[9]的研究结果都表明,与均匀材料板类似,功能梯度材料板具有稳定的过屈曲平衡路径。

本文分析了功能梯度材料 Timoshenko 梁在横向非均匀升温下的热过屈曲问题。基于轴线可伸长和横向可剪切的几何非线性理论,建立了 FGM 梁在热机械载荷作用下的弹性大变形控制方程。采用打靶法数值求解所得强非线性常微分方程边值问题,得到两端完全固定的 FGM Timoshenko 梁在横向非均匀升温时的热屈曲和热过屈曲响应解,给出了梁的热过屈曲平衡路径,详细分析和讨论了材料梯度性质和热载荷对变形及过屈曲温度的影响。

## 1 基本方程

考虑由功能梯度材料制成的 Timoshenko 梁,初始长度为  $l$ ,矩形截面宽为  $b$ 、高为  $h$ 。假设梁上同时作用机械载荷( $q_x, q_z$ )和温度载荷  $T(z)$ 。 $T_c$  和  $T_m$  分别为上、下表面的升温。



图1 两端固定 Timoshenko 梁的几何模型

### 1.1 FGMs 的物性参数

设功能梯度梁的物性参数(弹性模量  $E$ 、泊松比  $\nu$ 、热膨胀系数  $\alpha$  和热传导系数  $K$ )是陶瓷体积含量  $V_c$  和金属含量  $V_m$  的函数<sup>[10]</sup>,可统一表示为:

$$P(z) = P_m + V_c(P_c - P_m), \quad (1)$$

其中下标  $c$ 、 $m$  分别表示陶瓷材料和金属材料,  $V_c$  为陶瓷体积含量,其沿厚度方向坐标的变化为幂函数形式

$$V_c(z) = \left[ \frac{2z + h}{2h} \right]^n, \quad (2)$$

其中  $z$  为厚度方向的坐标( $-h/2 \leq z \leq h/2$ ),  $n$  为陶瓷材料的体积分指数( $0 \leq n < \infty$ ),其不同值代表了成分含量不同的功能梯度材料,  $n = 0$  时退化为均匀各向同性陶瓷材料,  $n \rightarrow \infty$  为纯金属材料。功能梯度材料为非均匀各向同性材料,其剪切弹性模量满足方程

$$G(z) = \frac{E(z)}{2[1 + \nu(z)]}. \quad (3)$$

### 1.2 非线性几何方程

精确考虑梁的轴线伸长,可得梁变形后轴线的几何方程<sup>[11]</sup>:

$$\frac{ds_0}{dx} = \Lambda_0, \quad \frac{du_0}{dx} = \Lambda_0 \cos \theta - 1, \quad \frac{dw_0}{dx} = \Lambda_0 \sin \theta, \quad (4)$$

其中  $s_0(x)$  为梁变形后的轴线弧长,  $u_0(x)$  和  $w_0(x)$  分别为轴线上的点在  $x$  和  $z$  方向的位移,  $\theta(x)$  为梁变形后轴线切线与  $x$  轴正向的夹角,  $\Lambda_0(x)$  为轴线伸长率。假设梁变形过程中横截面仍然保持为平面,可以求得横截面上任意点处的正应变和剪应变分别为

$$\varepsilon(x, z) = \Lambda_0 \cos \gamma - 1 - z \frac{d\varphi}{dx}, \quad \gamma = \Lambda_0 \sin \gamma, \quad (5)$$

其中  $\varphi$  为横截面法线与  $x$  轴之间的夹角,  $\gamma$  为剪切角,与  $\varphi$  和  $\theta$  有如下关系:

$$\varphi = \theta + \gamma. \quad (6)$$

### 1.3 本构方程

设材料为线性热弹性材料, 于是有本构关系

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha T), \quad \tau = G\gamma, \quad (7)$$

其中升温  $T = T(z)$  满足一维热传导方程

$$-\frac{d}{dz} \left[ K(z) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad (8)$$

利用边界条件  $T(h/2) = T_c$  和  $T(-h/2) = T_m$  积分(8)式可得

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \int_{-h/2}^z \frac{1}{K(z)} dz \bigg/ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{K(z)} dz \quad (9)$$

把式(5)代入式(7)然后在横截面上积分可得梁的轴力  $N(x)$ 、弯矩  $M(x)$  和剪力  $Q(x)$  分别为

$$N(x) = \iint_A \sigma dA = C_1(\Lambda_0 \cos \gamma - 1) - C_2 \frac{d\varphi}{dx} - N_T, \quad (10)$$

$$M(x) = \iint_A \sigma z dA = C_2(\Lambda_0 \cos \gamma - 1) - C_3 \frac{d\varphi}{dx} - M_T, \quad (11)$$

$$Q(x) = \frac{1}{k} \iint_A \tau dA = \frac{C_4}{k} \Lambda_0 \sin \gamma, \quad (12)$$

其中  $k$  为 Timoshenko 剪切修正系数, 其值由梁的截面形状而定(对于矩形截面  $k = 3/2$ )。  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  和  $C_4$  为刚度系数, 分别定义为

$$(C_1, C_2, C_3) = \iint_A (1, z, z^2) E(z) dA, \quad C_4 = \iint_A G(z) dA; \quad (13)$$

$N_T$  和  $M_T$  分别为热轴力和热弯矩, 具体可以表示为

$$(N_T, M_T) = \iint_A (1, z) \alpha(z) E(z) T(z) dA \quad (14)$$

### 1.4 平衡方程

推导得出几何非线性变形 Timoshenko 梁的平衡方程为如下形式<sup>[11]</sup>

$$\frac{dH}{dx} = \Lambda_0 q_x, \quad \frac{dV}{dx} = \Lambda_0 q_z, \quad \frac{dM}{dx} = \Lambda_0 (-H \sin \theta + V \cos \theta), \quad (15)$$

其中  $H$  和  $V$  分别为横截面内沿  $x$  和  $z$  方向的内力分量,  $M$  为弯矩。合力  $(H, V)$  等效于  $(N, Q)$  可表示为

$$N = H \cos \varphi + V \sin \varphi, \quad Q = H \sin \varphi - V \cos \varphi \quad (16)$$

将式(16)代入式(10)~(12), 可得

$$\frac{d\varphi}{dx} = - [C_1(M + M_T) - C_2(H \cos \varphi + V \sin \varphi + N_T)] / (C_1 C_3 - C_2^2), \quad (17)$$

$$\Lambda_0 \cos \gamma = [C_3(H \cos \varphi + V \sin \varphi + N_T) - C_2(M + M_T)] / (C_1 C_3 - C_2^2) + 1, \quad (18)$$

$$\Lambda_0 \sin \gamma = k(H \sin \varphi - V \cos \varphi) / C_4 \quad (19)$$

至此, 方程(4)、(15)和(17)就构成了功能梯度材料 Timoshenko 梁在热、机械载荷同时作用下的几何非线性力学行为的基本控制方程。其中包含了 7 个基本未知量  $s_0(x)$ 、 $u_0(x)$ 、 $w_0(x)$ 、 $\varphi(x)$ 、 $H(x)$ 、 $V(x)$  和  $M(x)$ 。它们都是定义在未变形梁长  $[0, l]$  上的未知函数。轴线伸长率  $\Lambda_0$  和剪切角  $\gamma$  可表示为上述基本未知量的函数。

## 2 无量纲控制方程和边界条件

引入下列无量纲量:

$$(\xi, S, U, W) = (x, s_0, u_0, w_0)/l, \quad (F_1, F_2, F_4) = (l^2 C_1, l C_2, l^2 C_4)/C_3,$$

$$(P_H, P_V, P_T) = l^2(H, V, N_T)/C_3, (p_x, p_z) = l^3(q_x, q_z)/C_3,$$

$$(m, m_T) = l(M, M_T)/C_3, L = \frac{l}{h}, E_r = \frac{E_c}{E_m}, \alpha_r = \frac{\alpha_c}{\alpha_m},$$

$$K_r = \frac{K_c}{K_m}, a = \frac{1}{K_r - 1}, T_r = \frac{T_c}{T_m}, \lambda = L^2 \alpha_m T_m.$$

控制方程(4)、(15)以及式(17)~(19)可转换为如下无量纲形式

$$\frac{dS}{d\xi} = \Lambda_0, \quad \frac{dU}{d\xi} = \Lambda_0 \cos \theta - 1, \quad \frac{dW}{d\xi} = \Lambda_0 \sin \theta, \quad (20)$$

$$\frac{dP_H}{d\xi} = \Lambda_0 p_x, \quad \frac{dP_V}{d\xi} = \Lambda_0 p_z, \quad \frac{dm}{d\xi} = \Lambda_0 (-P_H \sin \theta + P_V \cos \theta), \quad (21)$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = [-F_1(m + m_T) + F_2(P_H \cos \varphi + P_V \sin \varphi + P_T)] / (F_1 - F_2^2), \quad (22)$$

其中

$$\Lambda_0 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad \gamma = \arctan(a_2/a_1), \quad (23)$$

$$a_1 = \Lambda_0 \cos \gamma = [P_H \cos \varphi + P_V \sin \varphi + P_T - F_2(m + m_T)] / (F_1 - F_2^2) + 1,$$

$$a_2 = \Lambda_0 \sin \gamma = \frac{k}{F_4} (P_H \sin \varphi - P_V \cos \varphi).$$

由式(23)可知, 剪切变形与  $a_2$  有关, 显然, 如果令  $a_2 = 0$  或者  $F_4 \rightarrow \infty$ , 则有  $\gamma = 0, \varphi = 0$ . 于是方程(20)~(22)就退化为 Euler-Bernoulli 梁的控制方程.

对图 1 所示两端固定梁(fixed-fixed), 可给出无量纲形式边界条件如下:

$$\begin{cases} S(0) = 0, U(0) = 0, W(0) = 0, \varphi(0) = 0, \\ U(1) = 0, W(1) = 0, \varphi(1) = 0. \end{cases} \quad (24)$$

### 3 结果与讨论

由于方程(20)~(22)的强非线性和多未知量之间的耦合效应, 很难获得解析解. 因此, 采用打靶法寻求方程(20)~(22)和边界条件(24)的数值解. 首先是把两点边值问题转化为包含待定初始参数的初值问题, 然后采用 Runge-Kutta 法和 Newton-Raphson 法有机结合的数值方法不断修正这些未定的初始参数, 从而使初值问题的解满足终点  $\xi = 1$  的边界条件. 这样即可得到相应的边值问题的解. 关于采用打靶法求解的具体实现步骤和需要注意的问题, 详细内容可参见文献[11, 12].

计算中考虑由陶瓷氧化锆(ZrO<sub>2</sub>)和金属铝(Al)制成的功能梯度 Timoshenko 梁结构. 陶瓷的弹性模量、Poisson 比、热膨胀系数和导热系数分别为

$$E_c = 151 \text{ GPa}, \quad \nu_c = 0.288, \quad \alpha_c = 10 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad K_c = 2.09 \text{ W/m}\cdot\text{K},$$

金属分别为

$$E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0.31, \quad \alpha_m = 23 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}, \quad K_m = 204 \text{ W/m}\cdot\text{K}^{[10]}.$$

陶瓷材料的体积分数指数  $n$  等于零时, 功能梯度材料退化为均匀陶瓷材料. 图 2 首先给出了  $n = 0$  时梁在均匀升温下的热屈曲临界温度  $\lambda_{cr}$  与长细比参数  $L$  之间的关系曲线. 其中 Euler 梁的结果是在令  $F_4 \rightarrow \infty$  (或  $k = 0$ ) 的条件下得到的. 两者之间的差别反映了剪切变形对临界载荷的影响, 显然剪切变形增加了梁的柔性, 而且剪切变形的影响随着梁的长细比的增加而逐步减弱. 因此, 对于细长梁, 可以忽略剪切变形, 看作 Euler-Bernoulli 梁.

图 3 和 4 分别绘出给定不同的上下表面升温比值  $T_r$  时无量纲热轴力  $P_T$  和热弯矩  $m_T$  与体

积分指数  $n$  的关系曲线。从图 3 中可以看到, 当无量纲升温  $\lambda$  给定时, 热轴力随着体积分数指数  $n$  增大而单调增加。从图 4 中发现, 只有在  $T_r > 1$  时热弯矩才是  $n$  的单调增函数。当  $n > 20$  后, 材料梯度参数  $n$  对  $P_T$  和  $m_T$  的影响逐渐变小。特别要说明的是, 由于功能梯度材料的横向非均匀性, FGM 梁内存在拉弯耦合刚度项, 所以即使在均匀升温情况下, 热弯矩也不为零,  $m_T$  表现出先增后减的变化趋势, 当  $n \rightarrow \infty$  时, FGM 梁变为均匀金属材料梁, 其热弯矩趋于零, 这是由于均匀升温作用时均匀各向同性梁内无热弯矩产生<sup>[11, 12]</sup>。

图 5 和 6 分别比较了不同体积分数指数  $n$  下 FGM 梁的最大挠度  $W(0.5)$  和轴向伸长量  $\Delta = 2S(1) - 1$  随温度参数  $\lambda$  变化的关系曲线。可以看出, FGM 梁具有类似于均匀材料梁热过屈曲时的载荷变形关系曲线<sup>[11, 12]</sup>。曲线与  $\lambda$  轴的交点坐标即为无量纲临界升温  $\lambda_c$ 。显然, 随着  $n$  的增大, 无量纲临界温度减小。这是由于随着体积分数指数  $n$  的增加, FGM 梁中 Al 的含量增加,  $ZrO_2$  含量减少, 所以 FGM 梁的抗弯刚度随  $n$  的升高而降低。

图 7 和 8 分别比较了不同温度参数  $\lambda = 2, 3, 5$  下功能梯度材料 Timoshenko 梁的最大挠度  $W(0.5)$  和轴向伸长量  $\Delta$  随体积分数指数  $n$  的变化关系。从图中可以看到, 给定温度  $\lambda$  时, 最大挠度和轴向伸长量随参数  $n$  的增加而增大。这是由于横截面的抗拉和抗弯刚度随  $n$  的增加而减小的缘故。

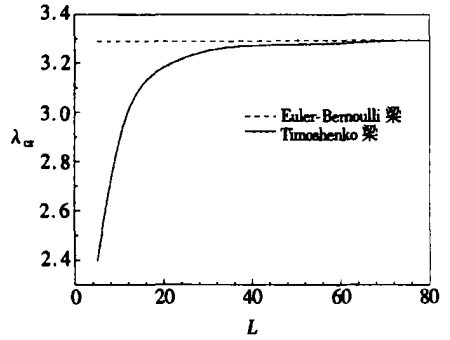


图 2 均匀材料梁的临界屈曲载荷与长细比的关系曲线 ( $n = 0, T_r = 1$ )

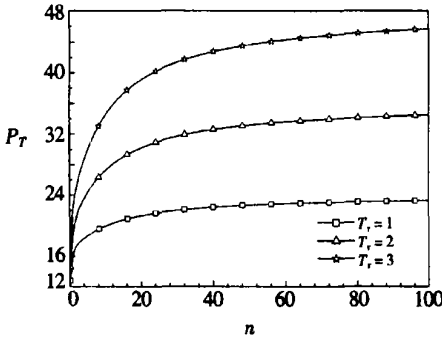


图 3 无量纲热轴力  $P_T$  与  $n$  的关系曲线 ( $L = 15, \lambda = 2$ )

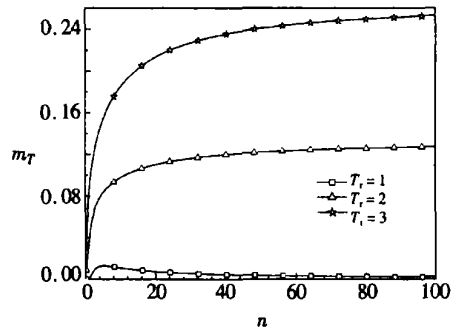


图 4 无量纲热轴力  $m_T$  与  $n$  的关系曲线 ( $L = 15, \lambda = 2$ )

## 4 结 论

分析了功能梯度材料 Timoshenko 梁在横向非均匀升温下的热过屈曲问题。在精确考虑轴线伸长和一阶横向剪切变形的基础上, 建立了功能梯度 Timoshenko 梁在热和机械载荷同时作用时的几何非线性控制方程, 其中包含 7 个基本未知函数。采用打靶法数值求解所得非线性边值问题, 获得了两端固定 Timoshenko 梁在横向非均匀升温作用下的静态非线性热屈曲和热过屈曲数值解。从结果中可以得到如下结论: 1) 随着体积分数指数的增大, FGM 梁的无量纲热轴力相应增大, 这是由于同样温度下随着金属成分的增加, 梁的热膨胀也相应增大; 2) 由于

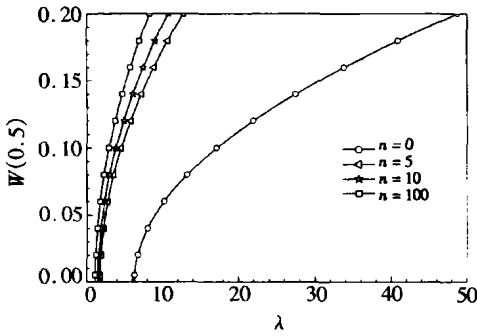


图5 给定不同梯度参数  $n$  时中心挠度  $W(0.5)$  与  $\lambda$  的关系曲线 ( $L = 15, T_r = 5$ )

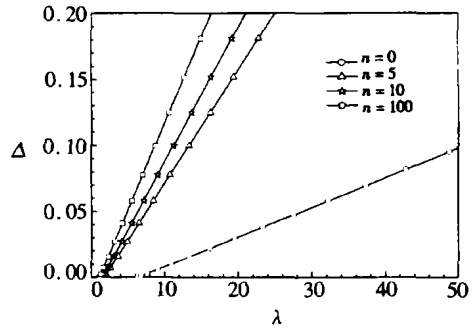


图6 给定不同梯度参数  $n$  时轴向伸长量  $\Delta$  与  $\lambda$  的关系曲线 ( $L = 15, T_r = 5$ )

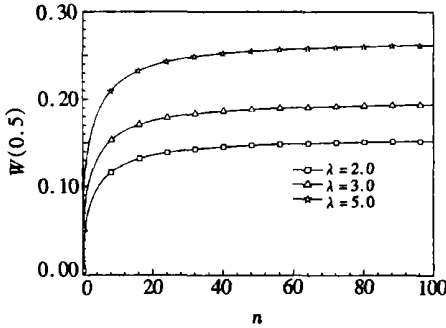


图7 给定不同升温参数  $\lambda$  时  $W(0.5)$  与  $n$  的关系曲线 ( $L = 15, T_r = 15$ )

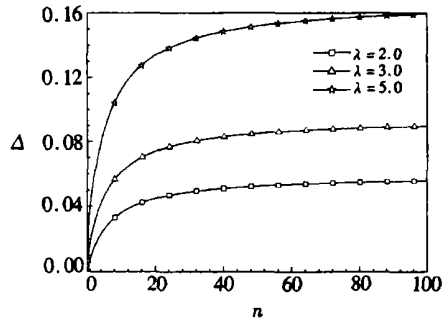


图8 给定不同升温参数  $\lambda$  时  $\Delta$  与  $n$  的关系曲线 ( $L = 15, T_r = 15$ )

功能梯度材料的横向非均匀性, 梁内存在拉\_弯耦合刚度, 所以, 即使均匀升温情况, 热弯矩也不为零; 3) 功能梯度材料梁结构在给定温度载荷时, 其过屈曲变形和轴向伸长量随着梯度变化指数的增大而增大。

### [参 考 文 献]

- [1] Koizumi M, Nino M. Overview of FGM research in Japan[J]. MRS Bull, 1995, 20(1): 19—21.
- [2] Feldman E, Aboudi Jacob. Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading[J]. Composite Structures, 1997, 38(1/4): 29—36.
- [3] Javaheri R, Eslami M R. Thermal buckling of functionally graded plates[J]. AIAA J, 2002, 40(1): 162—169.
- [4] Ma L S, Wang T J. Axisymmetric post\_buckling of a functionally graded circular plate subjected to uniformly distributed radial compression[J]. Materials Science Forum, 2003, (423/425): 719—724.
- [5] Ma L S, Wang T J. Relationships between the solutions of axisymmetric bending and buckling of functionally graded circular plates based on the third\_order plate theory and the classical solutions for isotropic circular plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 41(1): 85—101.
- [6] Liew K M, Yang J, Kitipornchia S. Post\_buckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro\_mechanical loading[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 41(15): 3869—3892.
- [7] Reddy J N, Chin C D. Thermo\_mechanical analysis of functionally graded cylinders and plates[J]. Journal of Thermal Stresses, 1998, 21(6): 593—626.

- [8] Yang J, Shen H S. Non\_linear analysis of functionally graded plates under transverse and in\_plane loads[J]. International Journal of Non\_Linear Mechanics, 2003, **38**(4): 467—482.
- [9] Ma L S, Wang T J. Nonlinear bending and post\_buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(13/14): 3311—3330.
- [10] 杨杰. 功能梯度复合材料板结构的非线性力学行为与动力特性[D]. 博士学位论文. 上海: 上海交通大学, 2001, 42—45.
- [11] Li S R, Zhou Y H. Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko beams under thermo\_mechanical loadings[J]. Journal of Thermal Stresses, 2003, **26**(9): 861—872.
- [12] Li S R, Zhou Y H, Zheng X J. Thermal post\_buckling of a heated elastic rod with pinned\_fixed ends [J]. Journal of Thermal Stresses, 2002, **25**(1): 45—56.

## Thermal Post\_Buckling of Functionally Graded Material Timoshenko Beams

LI Shi\_rong, ZHANG Jing\_hua, ZHAO Yong\_gang

(Department of Engineering Mechanics, Lanzhou University of Technology,  
Lanzhou 730050, P. R. China)

**Abstract:** Analysis of thermal post\_buckling of FGM Timoshenko beams subjected to transversely non\_uniform temperature rise is presented. By accurately considering the axial extension and transverse shear deformation in the sense of theory of Timoshenko beam, geometrically nonlinear governing equations, including seven basic unknown functions, for functionally graded beams subjected to mechanical and thermal loads were formulated. In the analysis, it was assumed that the material properties of the beam vary continuously as a power function of the thickness coordinate. By using a shooting method, the obtained nonlinear boundary value problem was numerically solved and thermal buckling and post\_buckling response of transversely non\_uniformly heated FGM Timoshenko beams with fixed\_fixed edges were obtained. Characteristic curves of the buckling deformation of the beam varying with thermal load and the power law index are plotted. The effects of material gradient property on the buckling deformation and critical temperature of beam were discussed in details. The results show that there exists the tension\_bend coupling deformation in the uniformly heated beam because of the transversely non\_uniform characteristic of materials.

**Key words:** functionally graded material; Timoshenko beam; thermal buckling; shooting method; numerical result