文章编号: 1000_0887(2006) 06_0735_06

弹性地基上四边自由矩形薄板的解析解*

钟　阳[1]， 张永山[2]

(1. 大连理工大学 土木学院, 大连 116024;
2. 广州大学 土木学院, 广州 510405)

(钟万勰推荐)

摘要: 将弹性地基用 Winkler 模型来代替, 并首先把弹性地基上薄板弯曲问题的控制方程表示成为 Hamilton 正则方程, 然后利用辛几何方法对全状态相变量进行分离变量, 求出其本征值后, 再按本征函数展开的方法求出弹性地基上四边自由矩形薄板的解析解• 由于在求解过程中不需要事先人为的选取挠度函数, 而是从弹性地基上薄板弯曲的基本方程出发, 直接利用数学的方法求出可以满足四边自由边界条件的解析解, 使得问题的求解更加理论化• 还给出了计算实例来验证所采用的方法以及所推导出的公式的正确性•

关 键 词: 弹性地基; 四边自由矩形薄板; 辛几何; 解析解
中图分类号: TU412.64 文献标识码: A

引　　言

弹性地基上四边自由矩形薄板是土木工程结构中较常见的一种结构形式, 例如高速公路中的水泥混凝土路面, 飞机场跑道, 大型结构物中的基础结构等等• 但是, 由于数学方面的原因求其解析解是非常困难的• 这个问题也是弹性力学中的难题之一• 多年来, 国内外学者在求解弹性地基上四边自由矩形薄板问题方面进行了大量的工作, 其方法主要有数值法和解析法两种• 数值法有有限元法、边界元法[1], 但这类方法的缺点是输入输出量大, 计算较麻烦• 解析法有三角级数法和叠加法[2]• 虽然这两种方法可以得到解析解, 但求解过程中不但非常复杂, 并且需要事先人为地选择好挠度函数, 而挠度函数的选取具有一定的任意性, 无一定的规律可寻•

辛几何方法在弹性力学中的应用是由钟万勰教授首先提出的[3~5]• 这一方法的应用为弹性力学的求解开辟了新的思路• 本文就是采用辛几何的方法推导出弹性地基上四边自由矩形薄板的解析解• 文中将弹性地基用 Winkler 模型来代替, 并首先把弹性地基上矩形薄板弯曲问题的控制方程表示成为 Hamilton 正则方程, 然后利用辛几何方法对全状态相变量进行分离变量, 求出其本征值后, 再按本征函数展开的方法求出弹性地基上四边自由矩形薄板的解析解• 由于在求解过程中不需要人为的选取挠度函数而是从弹性板弯曲的原始方程出发, 直接利用数学的方法求出这类问题的解析解, 使得这类问题的求解更加理论化• 为了验证本文推导出

* 收稿日期: 2004_03_30; 修订日期: 2006_02_27
作者简介: 钟阳(1955—), 男, 四川富顺人, 教授, 博导, 博士(联系人. Tel: + 86_411_84708309; E_mail: zhongyang58@163.net)•

的解析解的正确性, 文中的最后还给出了数值实例加以验证•

1　弹性地基上矩形薄板的 Hamilton 正则方程和辛几何解法

弹性地基上矩形薄板的控制方程为:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+Q_x=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+Q_y=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+kW+q=0\bullet \tag{3}$$

板的内力可以表示为:

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right),\quad M_y=-D\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right); \tag{4}$$

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y};\quad Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 W,\quad Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 W; \tag{5}$$

$$V_x=Q_x+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y},\quad V_y=Q_y+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}; \tag{6}$$

其中, W、D 和 q 分别为板的竖向挠度、抗弯刚度和作用于板上的外力, k 为地基的反应模量; M_x、M_y, M_{xy}, Q_x、Q_y, V_x、V_y 分别为板的弯矩、扭矩、剪力和总剪力, 下标表示方向•

将(6) 式代入(3) 式, 可以得到

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}-\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+kW+q=0\bullet \tag{7}$$

令　$\partial W/\partial y=\alpha,$　　(8)

由(4) 式的第 2 式可得

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}=-\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{M_y}{D}; \tag{9}$$

再由(5) 式的第 1 式可得

$$M_{xy}=-D(1-\nu)\frac{\partial \alpha}{\partial x}; \tag{10}$$

由(5) 式的第 2 式、(9) 式和(6) 式的第 1 式以及(7) 式可以得到

$$\frac{\partial V_y}{\partial y}=D(1-\nu^2)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}-\nu\frac{\partial M_y^2}{\partial x^2}-kW-q; \tag{11}$$

由(2) 式和(10) 式可以得到

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}=V_y+2D(1-\nu)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}\bullet \tag{12}$$

令 $V_y=-U$, 式(12)、(11)、(9) 和式(8) 可写成为

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial M_y}{\partial y}=-U+2D(1-\nu)\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2},\\&\frac{\partial U}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}-D(1-\nu^2)\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+kW+q,\\&\frac{\partial \alpha}{\partial y}=-\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-\frac{M_y}{D},\\&\partial W/\partial y=\alpha\bullet\end{aligned}\right. \tag{13}$$

式(13) 也可以写成为

$$\dot{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{HZ} + \boldsymbol{f}, \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{Z} = [M_y \quad U \quad \alpha \quad W]^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{P} & -\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \nu \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2D(1-\nu)\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & k - D(1-\nu^2)\dfrac{\partial^4}{\partial x^4} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f} = [0 \quad q \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

为了讨论矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的性质, 可以仅考虑(14) 式的齐次方程. 定义辛内积为

$$\langle \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2 \rangle = \int_0^a \boldsymbol{Z}_1 \boldsymbol{J} \boldsymbol{Z}_2 \mathrm{d}x - 2D(1-\nu)\left[\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\right]_0^a,$$

其中, a 为板的宽度, $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{I} \\ -\boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix}$ 为辛矩阵, $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

上述定义满足辛定义, 故可组成一个辛空间. 通过分部积分可得到

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{HZ}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{HZ}_1 \rangle - \Bigg\{ & W_1\left[-D(1-\nu)\frac{\partial^3 W_2}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial M_{y2}}{\partial x} - 2D(1-\nu)\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y}\right] + \\ & W_2\left[-D(1-\nu^2)\frac{\partial^3 W_1}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial M_{y1}}{\partial x} - 2(1-\nu)\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y}\right] + \\ & \frac{\partial W_1}{\partial x}\left[-D(1-\nu^2)\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} + \nu M_{y2}\right] - \frac{\partial W_2}{\partial x}\left[-D(1-\nu^2)\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + \nu M_{y1}\right]\Bigg\}_0^\alpha . \end{aligned} \tag{15}$$

由(4) 式的第 1 式和(6) 式的第 2 式以及(9) 式可以得到板为对边自由时的边界条件为:

当 $x = \pm a$ 时

$$\begin{cases} M_x = -D(1-\nu^2)\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu M_y = 0, \\ V_x = -D(1-\nu^2)\dfrac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \nu \dfrac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - 2D(1-\nu)\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

因此, 只要 $\boldsymbol{Z}_1$ 和 $\boldsymbol{Z}_2$ 是满足板的边界条件(16) 式的连续可微全状态向量, 则恒有[5]

$$\langle \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{HZ}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{HZ}_1 \rangle, \tag{17}$$

即算子 $\boldsymbol{H}$ 为辛几何空间的Hamilton 算子矩阵. 这样就可以按文献[3, 4] 中辛几何的方法, 利用分离变量法先求解方程式(14) 的齐次方程的齐次解, 然后再叠加上与外力有关的非齐次解就可得到方程(14) 的全部解. 设

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X}(x)\boldsymbol{Y}(y), \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{X}(x) = [M_y(x) \quad U(x) \quad \alpha(x) \quad W(x)]^{\mathrm{T}}.$

将(18) 式代入(14) 式的齐次方程可得到

$$\boldsymbol{Y}(y) = \mathrm{e}^{\mu y} \tag{19}$$

以及本征方程

$$\boldsymbol{HX}(x) = \mu \boldsymbol{X}(x), \tag{20}$$

其中 μ 是本征值, 待求. 而 $\boldsymbol{X}(x)$ 是与之对应的本征函数向量. Hamilton 型算子矩阵 $\boldsymbol{H}$ 具有

如下性质：对于本征值 μ_i 和 μ_j，当 $\mu_i+\mu_j\neq 0$，相应的本征函数向量 $\boldsymbol{X}_i(x)$ 和 $\boldsymbol{X}_j(x)$ 具有辛正交关系

$$\langle \boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j\rangle=\int_{-a}^{a}\boldsymbol{X}_i^T(x)\boldsymbol{J}\boldsymbol{X}_j(x)\mathrm{d}x=0. \tag{21}$$

根据上述性质，任意全状态向量可以用本征向量展开为

$$\boldsymbol{Z}(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}[c_i(y)\boldsymbol{X}_{ai}+d_i(y)\boldsymbol{X}_{bi}], \tag{22}$$

其中 $c_i(y)$、$d_i(y)$ 是待定函数，由共轭辛正交关系得

$$c_i(y)=-\boldsymbol{X}_{bi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Z}(x,y),\quad d_i(y)=\boldsymbol{X}_{ai}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{Z}(x,y). \tag{23}$$

同理也可把外力向量 $\boldsymbol{f}$ 用本征向量展开得到

$$\boldsymbol{f}=\sum_{i=1}^{\infty}(f_{ai}\boldsymbol{X}_{ai}+f_{bi}\boldsymbol{X}_{bi}). \tag{24}$$

将(22)和(23)式代入(14)式，并利用共轭辛正交归一的关系可得

$$\dot{c}_i-\mu_i c_i=f_{ai},\quad \dot{d}_i+\mu_i d_i=f_{bi}. \tag{25}$$

求解常微分方程(25)式可得

$$c_i(y)=Q_{ai}\mathrm{e}^{\mu_i y}-\frac{f_{ai}}{\mu_i},\quad d_i(y)=Q_{bi}\mathrm{e}^{-\mu_i y}+\frac{f_{bi}}{\mu_i}. \tag{26}$$

将式(26)代入式(22)可得问题的全解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(x,y)=&\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\left[Q_{ai}\mathrm{e}^{\mu_i y}-\boldsymbol{X}_{bi}^{\mathrm{T}}\frac{f_{bi}}{\mu_i}\right]\cdot\boldsymbol{X}_{ai}+\right.\\&\left.\left[Q_{bi}\mathrm{e}^{-\mu_i y}+\boldsymbol{X}_{ai}^{\mathrm{T}}\frac{f_{bi}}{\mu_i}\right]\cdot\boldsymbol{X}_{bi}\right\},\end{aligned} \tag{27}$$

其中待定常数 Q_{ai} 和 $Q_{bi}(i=1,2,3,\dots)$ 可由板在 y 方向的两边边界条件确定出.

实际上，方程(20)是特征值问题，将它展开后可知，其解可归结为如下常微分方程的求解

$$\frac{\mathrm{d}^4W(x)}{\mathrm{d}x^4}+2\mu^2\frac{\mathrm{d}^2W(x)}{\mathrm{d}x^2}+(\mu^4+k)W(x)=0. \tag{28}$$

方程(28)的特征根为两组共轭复数 $r=\pm(\alpha+\mathrm{i}\beta)$，而

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^4+k}-\mu^2\right)},\quad \beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\mu^4+k}+\mu^2\right)},$$

所以其解为

$$W(x)=A_W\cos\alpha x\,\mathrm{sh}\,\beta x+B_W\cos\alpha x\,\mathrm{ch}\,\beta x+C_W\sin\alpha x\,\mathrm{sh}\,\beta x+F_W\sin\alpha x\,\mathrm{ch}\,\beta x. \tag{29}$$

由于板的内力都可用竖向挠度 W 表示，所以只给出 W 的表达式. 式中的常数 A_W、B_W、C_W、D_W 可由板在 x 方向的边界条件(16)式决定出. 将式(29)代入边界条件(16)式，经整理后可得到关于 x 轴对称部分有

$$\begin{cases}B_W[B_1A_1+B_2A_2]+C_W[B_1A_2-B_2A_1]=0,\\ B_W[\alpha B_3A_3+\beta B_4A_4]+C_W[\beta B_4A_3+\beta B_3A_4]=0,\end{cases} \tag{30}$$

其中

$$A_1=\cos a\alpha\,\mathrm{ch}\,a\beta,\quad A_2=\sin a\alpha\,\mathrm{sh}\,a\beta,\quad A_3=\sin a\alpha\,\mathrm{ch}\,a\beta,\quad A_4=\cos a\alpha\,\mathrm{sh}\,a\beta,$$

$$B_1=\alpha^2-\beta^2-\nu\mu^2,\quad B_2=2\alpha\beta,\quad B_3=\alpha^2-3\beta^2+(\nu-2)\mu^2,$$

$$B_4=\beta^2-3\alpha^2-(\nu-2)\mu^2.$$

令其系数行列式为零，可得到本征值的超越方程为

$$\sin 2a\alpha + \frac{\alpha(c_1 + c_2)}{\beta(c_1 - c_2)}\mathrm{sh}2a\beta = 0, \tag{31}$$

其中 $c_1 = k + [1 + \nu(\nu - 4)]\mu^4$, $c_2 = 2(\nu - 1)\mu^2\sqrt{k + \mu^4}$•

同理也可得到关于 x 轴反对称部分

$$\begin{cases} A_W[B_2A_3 + B_1A_4] + D_W[B_1A_3 - B_2A_4] = 0, \\ A_W[\alpha B_3A_2 + \beta B_4A_1] + D_W[\beta B_3A_1 - \beta B_4A_2] = 0• \end{cases} \tag{32}$$

并令其系数行列式为零, 可得到本征值的超越方程为

$$\sin 2a\alpha - \frac{\alpha(c_1 + c_2)}{\beta(c_1 - c_2)}\mathrm{sh}2a\beta = 0• \tag{33}$$

由式(30) 和(33) 可得到

$$A_W = B_2 - B_1R,\ B_W = B_2 - B_1R_1,\ C_W = B_1 + B_2R_1,\ D_W = B_1 + B_2R, \tag{34}$$

其中 $R = \tan(a\alpha)\mathrm{cth}a\beta$, $R_1 = \tan(a\alpha)\mathrm{th}a\beta$•

将上式代入(29) 式就可以得到 $W(x)$ 的解析表达式• 将其代入式(20) 可以求出向量 $\boldsymbol{X}(x)$ 的表达式• 再利用板在 y 方向的边界条件, 就可以决定出式(27) 中的待定常数 Q_{ai} 和 Q_{bi}• 由此可得到问题的全部解的解析表达式• 板在 y 方向的边界条件为

当 $y = \pm b$ 时: $M_y = 0$, $V_y = 0$,

当 $y = \pm b$ 和 $x = \pm a$ 时: $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0$•

2 算　　例

为了证明本文所推导出的公式的正确性, 取文献[2] 中的弹性地基上四边自由矩形薄板为例, 板的边长 $a = b$, Poisson 比 $\nu = 0.167$, $ka^4 = 10^4 D$, 在板面上中心位置作用有集中荷载 P• 分别计算板的挠度值以及在 $x = 0$ 边界处的板的弯矩值• 表 1 和表 2 分别同时列出了本计算结果和文献[2] 的结果, 以便加以对比•

表 1 板的挠度值 $(10^{-4}pa^4/D)$

项目			x 值				
			$-a/2$	$-3a/8$	$-a/4$	$-a/8$	0
挠度值 $W(x,y)$	$y = -a/2$	文献[2]	−0.12	−0.26	−0.36	−0.43	−0.45
		本文	−0.11	−0.24	−0.38	−0.48	−0.56
	$y = 0$	文献[2]	−0.45	−0.002	1.75	6.71	12.275
		本文	−0.46	−0.001	1.76	6.77	12.450

表 2 板在 $x = 0$ 边界上的弯矩值 M_x

项目		y 值		
		0	$-a/4$	$-a/2$
弯矩 M_x	文献[2]	$1.9\times10^{-4}P$	$-3.8\times10^{-4}P$	$1.2\times10^{-4}P$
	本文	$1.9\times10^{-4}P$	$-3.9\times10^{-4}P$	$1.3\times10^{-4}P$

由表 1、2 可知, 本文的计算结果同文献[2] 的计算结果非常接近, 从而表明本文采用辛几何方法推导出的弹性地基上四边自由矩形薄板的解析解是正确的•

3 结 束 语

将弹性地基上矩形薄板的基本方程导向 Hamilton 体系的正则方程,问题可以在辛几何空间中用分离变量法推导出该问题的解析解• 由于不需要人为选取位移函数, 而是直接从弹性板的基本方程出发, 推导出能完全满足边界条件的解析解, 使得本文的方法更加合理化和理论化• 通过数值算例也证明了本文方法的正确性•

[参 考 文 献]

[1] 曲庆璋, 章权, 梁兴复. 弹性薄板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
[2] 张福范. 弹性薄板[M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 1984.
[3] 钟万勰. 分离变量法与哈密而顿体系[J]. 计算结构力学及其应用, 1991, **8**(3): 229—240.
[4] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
[5] 姚伟岸, 钟万勰. 辛弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.

Theoretic Solution of Rectangular Thin Plate on Foundation With Four Edges Free by Symplectic Geometry Method

ZHONG Yang[1], ZHANG Yong_shan[2]
(1. Department of Civil Engineering, Dalian University of Technology,
Dalian 116023, P.R. China;
2. Department of Civil Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P.R. China)

Abstract: The theoretic solution for rectangular thin plate on foundation with four edges free was derived by symplectic geometry method. In the analysis proceeding, the elastic foundation was presented by the Winkler model. Firstly, the basic equations for elastic thin plate were transferred into Hamilton canonical equations. The symplectic geometry method was used to separate the whole variables and eigenvalues were obtained simultaneously. Finally, according to the method of eigen function expansion, the explicit solution for rectangular thin plate on foundation with the boundary conditions of four edges frees were developed. Since the basic elasticity equations of thin plate is only used and it is not need to select the deformation function arbitrary. Therefore, the solution is theoretical and reasonable. In order to show the correction of formulations derived, a numerical example was given to demonstrate the accuracy and convergence of the current solution.

Key words: elastic foundation; rectangular thin plate; symplectic geometry method; theoretic solution