文章编号: 1000_0887(2006) 07_0775_06

关于非扩张映象的最近的公共不动点问题*

张石生[1,2]

(1. 宜宾学院 数学系, 四川 宜宾 644007;
2. 四川大学 数学系, 成都 610064)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 利用粘性逼近方法, 在自反 Banach 空间的框架下, 研究无限族非扩张映象及对给定的压缩映象的迭代程序的收敛性问题• 在适当的条件下, 证明了该迭代序列强收敛于某一公共不动点, 而且这一公共不动点也是自反 Banach 空间中某一变分不等式的唯一解• 所得结果改进和推广了一些人的最新的结果•

关 键 词: 公共不动点; 非扩张映象序列; 粘性逼近; 半闭原理; 弱序列连续的对偶映象; 正规对偶映象

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 引言及预备知识

关于迭代序列

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} f(x_n) + (1 - \lambda_{n+1}) T_{n+1} x_n, \qquad \forall n \geqslant 0, \tag{1}$$

对一个, 有限个或无穷多个非扩张映象 $T_1, T_2, \cdots$ 的收敛性问题, 在 Hilbert 空间或 Banach 空间的框架下, 已被许多人引入和研究(如文献[1]~ 文献[7]及其参考文献)• 本文的目的是在自反 Banach 空间的框架下, 研究无限族非扩张映象 $T_1, T_2, \cdots$ 及对给定的压缩映象 f 的迭代程序(1)的收敛性问题• 在适当的条件下, 证明了该迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $T_i, i = 1, 2, \cdots$ 之一公共不动点 p, 而且这一公共不动点是下面的变分不等式的唯一解

$$\langle (f - I)p, J(y - p) \rangle \leqslant 0, \qquad \forall y \in F, \tag{2}$$

其中 F 是 $T_i, i = 1, 2, \cdots$ 的公共不动点的集合• 本文所得结果改进和推广了 Xu[7], O' Hara 等[5], Song 等[6], Jung[4], Chang[3], Shioji 等[8]及 Shimizu 等[9]文中相应的结果•

为叙述方便起见, 我们首先追述某些定义, 符号及结论•

本文处处假定 E 是一自反 Banach 空间, C 是 E 之一非空闭凸子集• E^* 是 E 的对偶空间, 而 $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象

$$J(x) = \left\{ f \in E^*, \langle x, f \rangle = \| x \| \cdot \| f \|, \| x \| = \| f \| \right\}, \qquad x \in E,$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表广义对偶对• 以后, 我们用 j 表单值正规对偶映象, 而用 $F(T)$ 表 T 的不动点的集合• 如果 $\{x_n\}$ 是 E 中之一序列, 我们将用 $x_n \to x$ (相应地 $x_n \rightharpoonup x$, $x_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} x$) 表 $\{x_n\}$ 强(相应地, 弱, 弱*) 收敛于 x•

* 收稿日期: 2004_12_03; 修订日期: 2006_04_11

作者简介: 张石生(1934—), 男, 云南曲靖人, 教授(E_mail: sszhang_1@yahoo.com.cn)•

定义 1.1(文献[2]) Banach 空间 E 称为具有一弱序列连续的正规对偶映象 $J: E \to E^*$, 如果 J 是单值的而且是弱_弱* 连续的, 即, 对 E 中的任一序列 $\{x_n\}$, 如果在 E 中 $x_n \rightharpoonup x$, 则在 E^* 中, $J(x_n) \rightharpoonup J(x)$.

由定义 1.1, 可得下面的结果

引理 1.1 如果 E 是一自反 Banach 空间, 其具有一弱序列连续的正规对偶映象, 则

1) E 满足 Opial 条件, 即, 在 E 中当 $x_n \rightharpoonup x$, 且 $y \neq x$ 时, 则 $\limsup_{n\to\infty} \| x_n - x \| < \limsup_{n\to\infty} \| x_n - y \|$ (见文献[10]).

2) (半闭原理) 如果 $T: E \to E$ 是一非扩张映象, 则映象 $I - T$ 是半闭的, 即, 对 E 中的任意的序列 $\{x_n\}$, 如果 $x_n \rightharpoonup x$ 而且 $(x_n - Tx_n) \to y$, 则 $(I - T)x = y$ (见文献[11]).

引理 1.2[12] 设 E 是一实 Banach 空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x, y \in E$, 下面的不等式成立

$$\| x + y \|^2 \leqslant \| x \|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \qquad \forall j(x + y) \in J(x + y),$$
$$\| x + y \|^2 \geqslant \| x \|^2 + 2\langle y, j(x)\rangle, \qquad \forall j(x) \in J(x).$$

引理 1.3[13] 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是 3 个非负的实序列, 满足条件

$$a_{n+1} \leqslant (1 - \alpha_n) a_n + b_n + c_n, \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

其中 n_0 是某一非负整数, $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $b_n = o(\alpha_n)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, 则 $a_n \to 0$ (当 $n \to \infty$).

定义 1.2 设 E 是一自反 Banach 空间, C 是 E 之一非空闭凸子集, 而 $\{S(t)\}_{t\in R^+}$ 是 C 到其自身的一族映象. $\{S(t)\}_{t\in R^+}$ 称为 C 上的非扩张映象半群, 如果其满足下列的条件

1) $S(t_1 + t_2)x = S(t_1)S(t_2)x$ 对任意 $t_1, t_2 \in R^+$ 及 $x \in C$.

2) $S(0)x = x$ 对每一 $x \in C$.

3) 对每一 $x \in C$, $t \mapsto S(t)x$ 是连续的.

4) $\| S(t)x - S(t)y \| \leqslant \| x - y \|$ 对每一 $t \in R^+$ 及 $x, y \in C$.

引理 1.4(文献[14]) 设 E 是一致凸的 Banach 空间, C 是 E 之一非空的有界闭凸子集, $T: C \to C$ 是一非扩张映象. 对每一 $x \in C$, 定义映象 $T_n: C \to C$, $n = 1, 2, \cdots$

$$T_n x = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j x.$$

则 $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \| T_n x - T(T_n x) \| = 0.$$

引理 1.5(文献[9]).

1) 设 H 是一 Hilbert 空间, C 是 H 之一非空有界的闭凸子集, $S, T: C \to C$ 是二非扩张映象使得 $ST = TS$. 对每一 $x \in C$, 如果定义

$$T_n(x) = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k} S^i T^j(x),$$

则 $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \| T_n x - S(T_n x) \| = 0,$$

而且 $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \| T_n x - T(T_n x) \| = 0.$$

2) 设 $\{S(t)\}_{t\in R^+}$ 是 C 上的一非扩张映象半群. 对每一 $x \in C$, $t > 0$, 令

$$T_t(x) = \frac{1}{t}\int_0^t S(u)x\,\mathrm{d}u,$$

则 $$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in C} \| T_t(x) - S(s)(T_t(x)) \| = 0, \qquad \forall s \in R^+.$$

2 公共不动点的逼近问题

设 E 是一 Banach 空间, C 是 E 之一非空闭凸子集, $f: C \to C$ 是具压缩常数 $\beta \in (0,1)$ 的压缩映象. 设 $\{T_n\}$ 是由 C 到 C 的一非扩张映象序列. 设 $\{t_m\}$ 是 $(0,1)$ 中之一数列, 且 $t_m \to 0$ (当 $m \to \infty$). 对每一 $m \geqslant 1$ 定义一映象 $T_{t_m}: C \to C$

$$T_{t_m}(x) = t_m f(x) + (1 - t_m) T_m x, \qquad \forall m \geqslant 1, x \in C.$$

易知, 对每一 $m \geqslant 1$, T_{t_m} 是由 C 到 C 的一压缩映象. 由 Banach 压缩映象原理, 存在唯一的不动点 $z_m \in C$ 使得

$$z_m = t_m f(z_m) + (1 - t_m) T_m z_m, \qquad \forall m \geqslant 1. \tag{3}$$

关于迭代序列 $\{z_m\}$ 的收敛性问题, 我们可以证明下面的定理

定理 2.1 设 E 是一实的自反 Banach 空间, 且其具有一弱序列连续的正规对偶映象 $J: E \to E^*$, C 是 E 之一非空闭凸子集, T_m, $m = 1, 2, \cdots$ 是 C 到 C 的一非扩张映象序列, 使得公共不动点集 $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$, 而 $f: C \to C$ 是一具压缩常数 $\beta \in (0,1)$ 的压缩映象. 如果存在一族非扩张映象 $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}: C \to C$, 其中 Γ 是一有限或无限的指标集, 使得

$$\emptyset \neq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} F(G_\gamma) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n), \tag{4}$$

而且对 C 中的每一有界子集 K 下面的式子成立

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} \| G_\gamma(T_n(x)) - T_n x \| = 0. \tag{5}$$

则 $\{z_m\}$ 强收敛于某一 $p \in F$, 而且它是下面的变分不等式在 F 中的唯一解

$$\langle (f - I)(p), J(y - p) \rangle \leqslant 0, \qquad \forall y \in F. \tag{2}$$

现在我们证明本文的主要结果

定理 2.2 设 E 是一实的自反 Banach 空间, 其具有一弱序列连续的正规对偶映象 $J: E \to E^*$, C 是 E 之一非空闭凸子集, T_n, $n = 1, 2, \cdots$ 是 C 到 C 的一非扩张映象序列, 使得公共不动点集 $F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$, 而 $f: C \to C$ 是一具压缩常数 $\beta \in (0,1)$ 的压缩映象. 对任意给定的 $x_0 \in C$, 设 $\{x_n\}$ 是由下式定义的迭代序列

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} f(x_n) + (1 - \lambda_{n+1}) T_{n+1} x_n, \qquad \forall n \geqslant 0, \tag{6}$$

其中 $\{\lambda_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的一序列. 如果下列的条件满足

(i) $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$.

(iii) 存在由 C 到 C 的一族非扩张映象: $\{G_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ (其中 Γ 是一有限或无限的指标集) 使得

$$\emptyset \neq \bigcap_{\gamma \in \Gamma} F(G_\Gamma) \subset F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n), \tag{7}$$

而且对 C 的每一有界子集 K 下式成立

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in K} \| G_\gamma(T_n(x)) - T_n x \| = 0, \qquad \forall \gamma \in \Gamma. \tag{8}$$

则由 (6) 式定义的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于某一公共不动点 $p \in F$, 而且这一不动点也是变分不等式 (2) 在 F 中的唯一解.

证明 在定理 2.2 的条件下, 易知定理 2.1 的条件被满足. 由定理 2.1 知, 由 (3) 定义的序列 $\{z_m\}$ 强收敛于 $p \in F$, 而且它是变分不等式 (2) 在 F 中的唯一解.

另一方面, 由定理 2.2 的假定, 我们也能证明由 (6) 式定义的序列 $\{x_n\}$ 是有界的, 而且

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - G_\gamma x_n\| = 0, \qquad \forall \gamma \in \Gamma, \tag{9}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\langle (f-I)p, j(x_{n+1}-p)\rangle \leqslant 0. \tag{10}$$

现在我们证明 $x_n \to p(n\to\infty)$. 事实上, 由(6) 及引理 1.2 有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\|^2 = {} & \|(1-\lambda_{n+1})(T_{n+1}x_n - p) + \lambda_{n+1}(f(x_n)-p)\|^2 \leqslant \\ & (1-\lambda_{n+1})^2\|T_{n+1}x_n - p\|^2 + 2\lambda_{n+1}\langle f(x_n)-p, j(x_{n+1}-p)\rangle \leqslant \\ & (1-\lambda_{n+1})^2\|x_n - p\|^2 + \lambda_{n+1}\beta\left\{\|x_n-p\|^2 + \|x_{n+1}-p\|^2\right\} + \\ & 2\lambda_{n+1}\langle f(p)-p, j(x_{n+1}-p)\rangle.\end{aligned} \tag{11}$$

令

$$\gamma_{n+1} = \max\left\{\langle f(p)-p, j(x_{n+1}-p)\rangle, 0\right\}, \qquad \forall n \geqslant 0. \tag{12}$$

由(10), 易于证明 $\gamma_n \geqslant 0$ 和 $\gamma_n \to 0$(当 $n\to\infty$). 把(12) 代入(11) 并简化之, 即得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-z\|^2 \leqslant {} & \frac{1-\lambda_{n+1}(2-\beta)}{1-\beta\lambda_{n+1}}\|x_n - p\|^2 + \\ & 2\lambda_{n+1}\left\{\lambda_{n+1}M + 2\gamma_{n+1}\right\}, \qquad \forall n \geqslant n_0.\end{aligned} \tag{13}$$

其中 M 为某常数. 又因

$$\frac{1-\lambda_{n+1}(2-\beta)}{1-\beta\lambda_{n+1}} = 1 - \frac{2\lambda_{n+1}(1-\beta)}{1-\beta\lambda_{n+1}} \leqslant 1 - 2\lambda_{n+1}(1-\beta),$$

故有

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-z\|^2 \leqslant {} & \left\{1-2\lambda_{n+1}(1-\beta)\right\}\|x_n - p\|^2 + \\ & 2\lambda_{n+1}\left\{\lambda_{n+1}M + 2\gamma_{n+1}\right\}, \qquad \forall n \geqslant n_0.\end{aligned} \tag{14}$$

由定理的假定知, 引理 1.2 的所有条件被满足, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0, \quad \text{当 } x_n \to p \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(F(T_i)).$$

定理 2.2 得证.

3 应 用

在本节中, 我们将利用定理 2.2 证明 Shimizu, Takahashi[9], O' Hara 等[5], Song, Chen, Zhou[6] 文中的某些最新结果是定理 2.2 的推论,

推论 3.1 设 E 是一致凸的 Banach 空间, 具有一弱序列连续的正规对偶映象 $J: E \to E^*$, C 是E 之一非空的有界的闭凸子集, 而 $T: C \to C$ 是一非扩张映象, 且 $F(T) \neq \emptyset$. 对每一 $x \in C$ 定义映象$T_n: C \to C$, $n = 1, 2, \cdots$

$$T_n x = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j x, \qquad n \geqslant 1. \tag{15}$$

设$f: C \to C$ 是任意给定的具压缩常数 $\beta \in (0, 1)$ 的压缩映象. 对任意给定的 $x_0 \in C$ 定义一迭代序列$\{x_n\}$

$$x_{n+1} = \lambda_{n+1} f(x_n) + (1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n, \qquad \forall n \geqslant 0, \tag{16}$$

其中$\{\lambda_n\}$ 是[0, 1] 中之一序列. 如果下面的条件满足

(i) $\lambda_n \to 0(n\to\infty)$.

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n = \infty$.

则序列$\{x_n\}$强收敛某一$p \in F(T)$, 它是变分不等式(2) 在 F 中的唯一解.

证明 易知, 对每一 $n \geqslant 1$, T_n 是一由C 到C 的非扩张映象, 而且

$$F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n). \tag{17}$$

由引理3.1, $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in C}\|T_n x - T(T_n x)\| = 0$.

取$\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{T\}$ (单点集), 得知定理2.2的所有条件被满足. 故推论3.1的结论由定理2.2直接可得.

推论3.2 设C是实Hilbert空间H中的一非空的有界闭凸子集, $\{\lambda_n\}$是$[0,1]$中的一序列, 满足推论3.1中的条件(i)和(ii). 设$f: C\to C$是任意给定的具压缩常数$\beta\in(0,1)$的压缩映象. 设$S, T: C\to C$是两个非扩张映象, $ST=TS$且$F(S)\cap F(T)\neq\emptyset$. 令

$$T_n(x)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i+j=k}S^iT^jx,\qquad x\in C,\ n\geqslant 1.$$

对任意给定的x_0, 定义一序列$\{x_n\}$

$$x_{n+1}=\lambda_{n+1}f(x_n)+(1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n,\qquad \forall n\geqslant 0,$$

则$\{x_n\}$强收敛于某一公共不动点$p\in(F(S)\cap F(T))=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$, 而且$p$是变分不等式(2)在$(F(S)\cap F(T))$中的唯一解.

证明 易知, 对每一$n\geqslant 1$, T_n是C到C的一非扩张映象, 而且

$$F(S)\cap F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n). \tag{18}$$

在定理2.2中取$\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{S,T\}$ (二元集), 则推论3.2的结论由定理2.2直接可得.

推论3.3 设C是实Hilbert空间H中的一非空的有界闭凸子集, $\{\lambda_n\}$是$(0,1)$中的一序列, 满足条件: $\lambda_n\to 0$而且$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$. 设$\{S(t)\}_{t\in R^+}: C\to C$是一非扩张映象半群, 且$\bigcap_{t\in R^+}F(S(t))\neq\emptyset$. 对$x\in C$及每一$t_n>0$(其中$\{t_n\}$是一正的发散的实序列)定义一映象$T_n: C\to C$

$$T_n(x)=\frac{1}{t_n}\int_0^{t_n}S(u)x\,\mathrm{d}u,\qquad x\in C,\ n\geqslant 1. \tag{19}$$

设$f: C\to C$是具压缩常数$\beta\in(0,1)$的压缩映象. 对任意给定的$x_0\in C$定义一序列$\{x_n\}$

$$x_{n+1}=\lambda_{n+1}f(x_n)+(1-\lambda_{n+1})T_{n+1}x_n,\qquad \forall n\geqslant 0.$$

则$\{x_n\}$强收敛于某一$p\in\bigcap_{t\in R^+}F(S(t))=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$, 而且$p$是变分不等式(2)在$\bigcap_{t\in R^+}F(S(t))$中的唯一解

证明 易知, 对每一$n\geqslant 1$, T_n是C到C之一非扩张映象, 而且

$$\bigcap_{s\in R^+}F(S(s))=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n). \tag{20}$$

在定理2.2中取$\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}=\{S(s)\}_{s\in R^+}$, 则推论3.3的结论可由定理2.2直接可得.

感谢 本文得到宜宾学院自然科学基金资助(2005Z3).

[参 考 文 献]

[1] Bauschke H H. The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **202**: 150—159.

[2] Browder F E. Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces[J]. Arch Rational Mech Anal, 1967, **24**: 82—90.

[3] Chang S S. Viscosity approximation methods for a finite family of nonexpansive mappings in Banach

spaces[EB]. http://www.elsevier.com/locate/jmaa (Available online 4 January 2006)

[4] Jung J S. Iterative approaches to common fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2005, **302**: 509—520.

[5] O' Hara J G, Pillay P, Xu H K. Iterative approaches to finding nearest common fixed point of nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Anal TMA, 2003, **54**: 1417—1426.

[6] Song Y S, Chen R D, Zhou H Y. Viscosity approximation methods for nonexpansive nonself_mappings [J]. J Math Anal Appl, 2006, **314**: 701—709.

[7] Xu H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 2004, **298**: 279—291.

[8] Shioji N, Takahashi W. Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1997, **125**: 3641—3645.

[9] Shimizu T, Takahashi W. Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 1997, **211**: 71—83.

[10] Lim T C, Xu H K. Fixed point theories for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Anal TMA, 1994, **22**: 1345—1355.

[11] Goebel K, Kirk W A. Topies in metric fixed point theory[J]. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, v 28, Cambridge University Press, 1990.

[12] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**(7): 4197—4208.

[13] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**: 114—125.

[14] Bruck R E. On the convex approximation property and the asymptotic behavior of nonlinear contractions in Banach spaces[J]. Israel J Math, 1981, **38**: 304—314.

On the Problem of Nearest Common Fixed Point of Nonexpansive Mappings

ZHANG Shi_sheng[1, 2]

(1. Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P.R.China;
2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, Sichuan 610064, P.R.China)

Abstract: The purpose is by using the viscosity approximation method to study the cnvergence problem of the iterative scheme for an infinite family of onexpansive mappings and a given contractive mapping in a reflexive Banach space. Under suitable conditions, it was proved that the iterative sequence converges strongly to a common fixed point which was also the unique solution of some variational inequality in a reflexive Banach space. The results presented extend and improve some recent results.

Key words: sequence of nonexpansive mappings; viscosity approximation; common fixed point; demi_closed principle; weakly sequentially continuous duality mapping; normalized duality mapping