

文章编号: 1000-0887(2006) 07-0833-06

多自由度强非线性颤振分析的 增量谐波平衡法*

蔡 铭¹, 刘济科², 李 军¹

(1. 中山大学 工学院, 广州 510275;

2. 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275)

(黄小清推荐)

摘要: 对多个自由度上含有强非线性项系统的颤振问题, 推广应用增量谐波平衡法进行分析。考虑带有强非线性立方平移和俯仰刚度项的二元机翼颤振方程, 首先将方程用矩阵形式表示, 然后把振动过程分解成为振动瞬态的持续增量过程, 再采用振幅作为控制参数应用谐波平衡法, 以这种推广的增量谐波平衡法求得方程解的表达式, 并由此分析系统的分岔现象、极限环颤振现象和谐波项数的取值问题, 最后用龙格_库塔数值方法进行验算, 结果表明: 分析多个自由度的强非线性颤振, 增量谐波平衡法是精确有效的。

关键词: 强非线性颤振; 增量谐波平衡法; 分岔; 极限环

中图分类号: O322; V215.3+4 **文献标识码:** A

引 言

飞行器的颤振是典型的自激振动, 它是由于空气动力、弹性力和惯性力的相互作用而引起的一种动不稳定问题。在工程实际中, 由于飞行器结构日益复杂, 部件间难免存在各种各样的非线性环节, 它们有时甚至是强非线性的, 其影响使系统出现许多现象, 如 Hopf 分岔、极限环颤振, 混沌等。因此, 飞行器的强非线性颤振分析有其重要的意义。

最早研究含有非线性环节机翼的气动弹性问题的是 Woolston^[1]和 Shen^[2], 他们分别通过计算机的帮助及谐波平衡法去分析此问题, 其中谐波平衡法的研究为后人所广泛应用。Breitbach^[3]对结构非线性颤振问题的分析工作也是相当突出, 他通过谐波平衡法和傅立叶级数展开得到近似分析解, 这种认为一阶谐波占运动主要成分的当量线性化方法称为等效线化法, 它被进一步用于分析机翼的 Hopf 分岔^[4]和亚临界分岔^[5]。然而采用等效线化法必须假设非线性环节的运动幅值, 当非线性环节多于一个时, 无法计算出其真实幅值, 所以上述文献都只考虑了系统带一个方向非线性的情况。为此, Lee^[6]提出了一种迭代求解的方法, 用于多个自由

* 收稿日期: 2004_10_10; 修订日期: 2006_04_04

基金项目: 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20050558032); 广东省自然科学基金资助项目(05003295)

作者简介: 蔡铭(1977—), 男, 广东人, 讲师, 博士(Tel: + 86_20_84112638; E_mail: caming@mail.sysu.edu.cn);

刘济科(联系人, Tel: + 86_20_84114666; Fax: + 86_20_84039914; E_mail: jikeliu@hotmail.com)。

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}, \quad \omega = \omega_0 + \Delta \omega, \quad (3)$$

将(3)式代入颤振方程(2),略去高阶项,得到矩阵形式的增量方程

$$\omega_0^2 \mathbf{M} \Delta \mathbf{X}'' + \omega_0 \mathbf{C} \Delta \mathbf{X}' + (\mathbf{K} + 3\mathbf{K}^{(3)}) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{R} - (2\omega_0 \mathbf{M} \mathbf{X}_0'' + \mathbf{C} \mathbf{X}_0') \Delta \omega, \quad (4)$$

$$\mathbf{R} = -(\omega_0^2 \mathbf{M} \mathbf{X}_0'' + \omega_0 \mathbf{C} \mathbf{X}_0' + \mathbf{K} \mathbf{X}_0 + \mathbf{K}^{(3)} \mathbf{X}_0), \quad (5)$$

\mathbf{R} 是误差向量,当 \mathbf{X}_0 和 ω_0 为准确解时,其值为 0.

IHB 法的第 2 步就是谐波平衡过程. 把 \mathbf{X}_0 和 $\Delta \mathbf{X}_0$ 展开成 Fourier 级数

$$x_{j0} = \sum_{k=1}^{N_c} a_{jk} \cos(k-1)\tau + \sum_{k=1}^{N_s} b_{jk} \sin k\tau = \mathbf{C}_s \mathbf{A}_j, \quad (6)$$

$$\Delta x_{j0} = \sum_{k=1}^{N_c} \Delta a_{jk} \cos(k-1)\tau + \sum_{k=1}^{N_s} \Delta b_{jk} \sin k\tau = \mathbf{C}_s \Delta \mathbf{A}_j, \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{C}_s = [1, \cos \tau, \cos 2\tau, \dots, \cos(N_c - 1)\tau, \sin \tau, \sin 2\tau, \dots, \sin N_s \tau],$$

$$\mathbf{A}_j = [a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jN_c}, b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jN_s}]^T, \quad j = 1, 2.$$

写成矩阵形式

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{S} \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{X} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{A}, \quad (8)$$

$$\text{其中 } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}.$$

将(8)式代入(4)式,并应用 Galerkin 过程,得到

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{X})^T [\omega_0^2 \mathbf{M} \Delta \mathbf{X}'' + \omega_0 \mathbf{C} \Delta \mathbf{X}' + (\mathbf{K} + 3\mathbf{K}^{(3)}) \Delta \mathbf{X}] d\tau = \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{X})^T [\mathbf{R} - (2\omega_0 \mathbf{M} \mathbf{X}_0'' + \mathbf{C} \mathbf{X}_0') \Delta \omega] d\tau. \quad (9)$$

最后可得到以 $\Delta \mathbf{A}$ 和 $\Delta \omega$ 表示的线性方程组

$$\mathbf{K}_{mc} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{mc} \Delta \omega, \quad (10)$$

其中

$$\mathbf{K}_{mc} = \omega_0^2 \mathbf{M} + \omega_0 \mathbf{C} + \mathbf{K} + 3\mathbf{K}^{(3)}, \quad \mathbf{R} = -(\omega_0^2 \mathbf{M} + \omega_0 \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}^{(3)}) \mathbf{A},$$

$$\mathbf{R}_{mc} = (2\omega_0 \mathbf{M} + \mathbf{C}) \mathbf{A}, \quad \mathbf{M} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} d\tau,$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} d\tau, \quad \mathbf{K}^{(3)} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{K}^{(3)} \mathbf{S} d\tau.$$

方程组(10)的未知量的数目比方程数目多 1 个,求解时必须选定 1 个未知量为控制参数.

由于颤振是自激振动,某个风速下的颤振频率 ω 是不变的,这时可以取某一谐波的振幅作为控制参数,从而求得频率 ω 和其它振幅. 也就是说,用计算机求解方程组(10),除了给定初值 \mathbf{A}_0 和 ω_0 ,还要给定某一振幅 a_k ,再通过不断迭代和(5)式的误差修正,求得方程组(10)的其它未知数. 本文对 IHB 法的这种推广,能有效地求解飞行器颤振问题.

3 结果验算及分析

应用上述 IHB 法对图 1 的颤振系统进行了大量计算,同时采用变步长四阶龙格-库塔数值积分方法(RK 法)进行验证. 在两种方法的计算程序中都为广义风速 Q 设定了一系列的值,

以便分析二元机翼的分岔现象。以 A 和 H 分别表示俯仰方向 α 和平移方向 h 的振幅, 图 2 分别是二元机翼两个方向的分岔图, 由此图可以很容易地观察到颤振的分岔点及振幅随广义气流速度 Q 的变化规律。同时可以看出, IHB 法和 RK 法两者得出的结果是比较相近的。由于 IHB 法是半数值半解析方法, 能得到解的表达式, 各参数的物理意义和大小都非常明晰, 这是 RK 法无法比拟的。

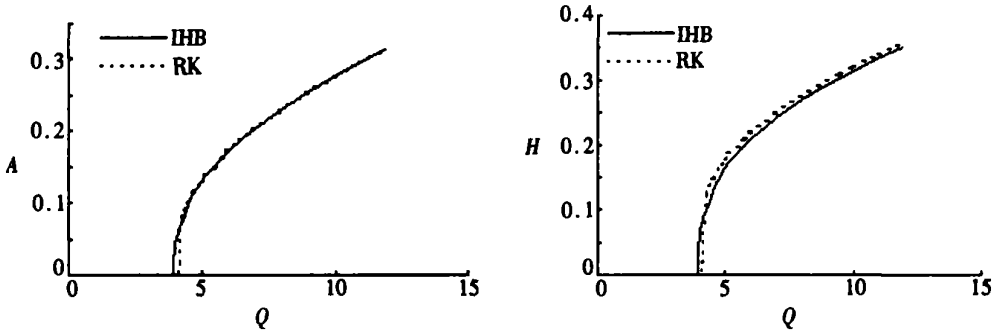
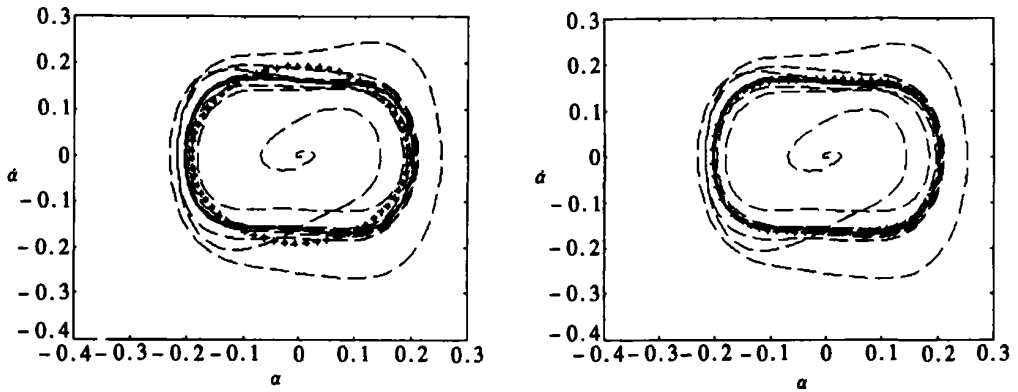


图 2 $Q \sim A, Q \sim H$ 分岔图

谐波项 N_c, N_s 的取值是一个重要的问题, 也是较难掌握的问题。 N_c, N_s 越大, 方程组的阶数就越大, 对于 1 个含有 n 个自由度的系统, 方程组的阶数将是 $2 \cdot n \cdot (N_c + N_s) + 1$, 由于 IHB 法的求解过程要进行积分、迭代等复杂运算, 大的方程组阶数将使求解过程占据很大的计算机内存, 花费很多的计算时间。所以 N_c, N_s 不是越大越好。但是, 若取得太小, 则会影响解的精度, 对于某些问题, 这种误差还是不能忽略的。例如, 考虑 $Q = 7$ 时俯仰方向的相图, 图 3(a) 是 IHB 法取 1 个谐波项时和 RK 法的逼近程度, 图 3(b) 是 IHB 法取 3 个谐波项时和 RK 法的逼近程度, 显而易见, 图 3(b) 更为可靠精确。



(a) IHB 法取 1 个谐波项

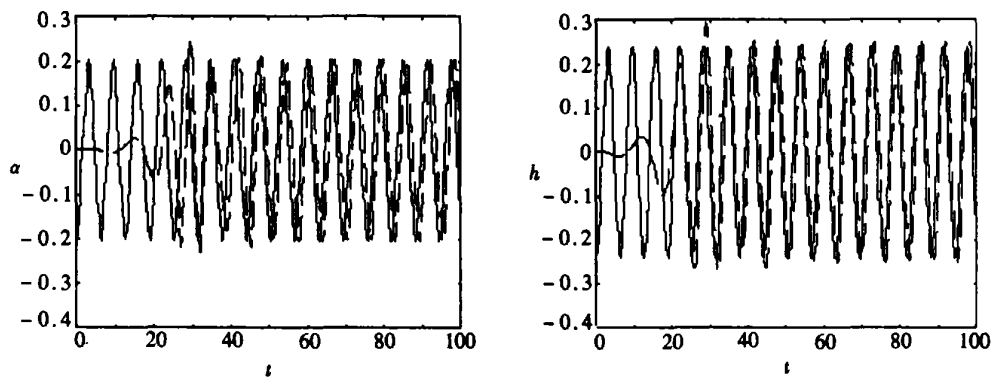
(b) IHB 法取 3 个谐波项

图 3 $Q = 7$ 时俯仰方向的相图(***** IHB 法, ---- RK 法结果)

图 4 则是 $Q = 7$ 时 α, h 两个方向的时间历程图。实线是 IHB 法结果, 虚线是 RK 法结果。从图中可见, 振动稳定时两种方法的计算结果几乎是重合的。

4 结 语

增量谐波平衡法能有效地求解两个方向具有强非线性的颤振问题, 分析极限环、分岔等非线性现象, 与数值方法所得结果一致, 有较高的精度。由于增量谐波平衡法是一种半数值半解

(a) α 的时间历程(b) h 的时间历程图4 $Q = 7$ 时 α 和 h 的时间历程(—— IHB法, ---- RK法结果)

析方法, 结果有直观的表达式, 这既明晰了参数的物理意义, 也易分析参数变化对系统振动特性的影响。值得注意的是, 谐波项数的多少会影响解的精度。对于复杂的强非线性颤振问题, 增量谐波平衡法成功推广应用, 不仅具有很高的理论价值, 在颤振工程设计中也具有广阔的应用前景。

感谢 本文得到香港中山大学高等学术研究中心基金资助(06M8); 中山大学青年教师科研启动基金资助(1131011); 特此感谢。

[参 考 文 献]

- [1] Woolston D S, Runyan H L, Andrews R E. An investigation of effects of certain types of structural nonlinearities on wing and control surface flutter[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1957, **24**(1): 57—63.
- [2] Shen S F. An approximate analysis of nonlinear flutter problem[J]. Journal of the Aeronautical Sciences, 1959, **28**(1): 25—32, 45.
- [3] Breitbach E. Flutter Analysis of an Airplane With Multiple Structural Nonlinearities in the Control System [M]. Hampton, Virginia: National Aeronautics and Space Administration, NASA TN-1620, 1980.
- [4] Liu J K, Zhao L C. Bifurcation analysis of airfoils in incompressible flow[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, **154**(1): 117—124.
- [5] Yang Y R, Zhao L C. Subharmonic bifurcation analysis of wing with store flutter[J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, **157**(3): 477—484.
- [6] Lee C L. An iterative procedure for nonlinear analysis[J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 1986, **24**(5): 833—840.
- [7] Lau S L, Cheung Y K. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic system[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1981, **48**(4): 959—964.
- [8] Cheung Y K, Chen S H, Lau S L. Application of the incremental harmonic balance method to cubic nonlinearity systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1990, **140**(2): 273—286.
- [9] Wong C W, Zhang W S, Lau S L. Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise linear systems by incremental harmonic balance method[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, **149**(1): 91—105.

- [10] Zhang W Y, Huseyin K. Complex formulation of the IHB technique and its comparison with other methods[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2001, **26**(1): 53—75.
- [11] 蔡铭, 刘济科, 杨怡. 强非线性颤振分析的增量谐波平衡法[J]. *机械科学与技术*, 2004, **23**(6): 742—744.
- [12] Zhao L C, Yang Z C. Chaotic motion of an airfoil with nonlinear stiffness in incompressible flow[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **138**(2): 245—254.

Incremental Harmonic Balance Method for Airfoil Flutter With Multiple Strong Nonlinearities

CAI Ming¹, LIU Ji_ke², LI Jun¹

(1. School of Engineering, Zhongshan University, Guangzhou 510275, P. R. China;

2. Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University,
Guangzhou 510275, P. R. China)

Abstract: The incremental harmonic balance method was extended to analyze the flutter of systems with multiple structural strong nonlinearities. The strongly nonlinear cubic plunging and pitching stiffness terms were considered in the flutter equations of two-dimensional airfoil. First, the equations were transferred into matrix form, then the vibration process was divided into the persistent incremental processes of vibration moments. And the expression of their solutions could be obtained by using a certain amplitude as control parameter in the harmonic balance process, and then the bifurcation, limit cycle flutter phenomena and the number of harmonic terms were analyzed. Finally, numerical results calculated by the Runge_Kutta method were given to verify the results obtained by the proposed procedure. It has been shown that the incremental harmonic method is effective and precise in the analysis of strongly nonlinear flutter with multiple structural nonlinearities.

Key words: strongly nonlinear flutter; incremental harmonic balance method; bifurcation; limit cycle