

相互碰撞的圆粒子在竖直通道中 沉降的数值研究*

王叶龙

(浙江大学 力学系, 流体传动及控制国家重点实验室, 杭州 310027)

(本刊编委林建忠推荐)

摘要: 采用格子 Boltzmann 方法, 数值模拟了考虑相互碰撞的两圆粒子的沉降, 分析了 Re 数、初始相对位移及通道宽度对粒子沉降的影响。结果表明, 在 $0.1 < Re < 20$ 范围内, 粒子沉降具有周期性。 Re 数越大, 两圆粒子的相互作用越强, 粒子横向位移的幅度也越大。在大 Re 数时, 沉降的过程是两个粒子交替领先; 在较小 Re 数时, 当后面的粒子接近的时候, 领先的粒子被向右侧推了一段后仍会继续领先; 对中等 Re 数, 原先在后面的粒子在第一次加速后将取得领先位置并一直保持下去。粒子的初始分布位置对沉降的形态影响不大。管道宽度变化时, 粒子总的沉降特性不变, 而周期改变, 管道越宽, 周期越长。

关键词: 格子 Boltzmann 方程; 沉降; 碰撞; 圆粒子

中图分类号: O359+.2 **文献标识码:** A

引 言

粒子的沉降是自然界中存在的一种普遍现象, 在工业生产上也有着广泛的应用, 研究它具有重要的理论和实际意义。在多个粒子同时沉降时, 粒子之间除了水动力相互作用外, 还可能出现粒子间的直接碰撞, 这一现象使得沉降问题变得复杂。此外, 当粒子在有界区域沉降时, 壁面也将对沉降产生影响。因此, 多个粒子在有界区域沉降时, 其沉降过程由水动力学作用、壁面影响以及粒子直接相互碰撞等因素共同决定。

关于粒子的沉降已有一些研究结果, Feng 等^[1]用有限元方法模拟了二维垂直通道里给定初始条件下单个和两个圆粒子的沉降, 发现单个圆粒子沉降时, 随着 Re 数从 0 增加到 600 的过程中, 粒子经历 5 种不同的运动形式, 即稳定的沉降、稳定有过冲的沉降、尾迹振动、强振动和不规则的振动; 而两个圆粒子沉降时, 周期性的尾流作用会引起所谓的漂移_接触_翻滚 (drafting_kissing_tumblin, DKT) 现象。Qi^[2]模拟了两个圆粒子的沉降, 再现了 DKT 过程。但是, 他们的研究只考虑了水动力的相互作用, 而没有考虑粒子间的直接碰撞所产生的效应。

粒子沉降的数值模拟方法包括有限元^[1]、拉格朗日乘子和虚拟区域^[3,4]、格子 Boltzmann 等方法^[5-8], 其中后者近 10 年来得到广泛的应用。本文采用格子 Boltzmann 方法, 在考虑具有粒

* 收稿日期: 2004_08_21; 修订日期: 2006_04_04

基金项目: 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20030335001)

作者简介: 王叶龙(1978—), 男, 安徽人, 博士(Tel: + 86_571_87952221; E_mail: wyl@zju.edu.cn)。

子相互碰撞的情况下, 研究有界通道内两圆粒子的沉降, 以更真实地体现粒子沉降的过程。

1 模型与方程

1.1 格子 Boltzmann 方法简介

格子 Boltzmann 方法的基本方程是构筑于微观离散的速度空间之上的 Boltzmann 方程, 微观流体粒子的分布函数 f_i 满足方程^[9]

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \Delta x, t + \Delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) + \Omega_i(f_i(\mathbf{x}, t)), \quad (1)$$

式中 \mathbf{e}_i 是沿 i 方向的局部流体粒子速度, $\Omega_i(f_i(\mathbf{x}, t))$ 是线性碰撞矩阵算子, 用来决定不同速度方向之间流体粒子的散射率。假设流体粒子的分布函数以不变速率回复到平衡态, 这样可以将方程(1)中的碰撞算子简化为单弛豫时间的碰撞项^[9]

$$\Omega_i = - (1/\tau)(f_i - f_i^{\text{eq}}), \quad (2)$$

式中 f_i^{eq} 是平衡态分布函数, τ 是弛豫时间, 格子 Boltzmann 方程平衡态分布函数由方程(3)给出^[9], 它满足 Maxwell 分布。

$$f_i^{\text{eq}} = \rho w_i \left[1 + \frac{3}{c^2} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3u^2}{2c^2} \right], \quad i = 0, \dots, n, \quad (3)$$

式中 w_i 是加权值, $c = \Delta x / \Delta t$ 是格子速度, ρ 和 \mathbf{u} 分别是流体的宏观密度和速度, 它们与分布函数的关系为

$$\rho = \sum_i f_i, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i f_i \mathbf{e}_i \quad (4)$$

由 Chapman-Enskog 多尺度级数展开, 可在长波和低频条件下, 得到 N-S 方程^[9], 其中粘度为

$$\nu = [(c^2 \Delta t) / 6] (2\tau - 1) \quad (5)$$

本文用到的 D2Q9 格子模型如图 1 所示, 相应的加权值分别为: $w_0 = 4/9$; $w_i = 1/9$ ($i = 1 \sim 4$); $w_i = 1/36$ ($i = 5 \sim 8$)。

1.2 边界条件

每个时间步, 流体粒子离开原来格点, 沿着其速度方向达到邻近的格点。当流体粒子运动到固定壁面时, 为满足壁面无滑移条件, 假设流体粒子以与入射角相同的角度弹回流场; 而在运动壁面上, 通过下式进行修正^[7]

$$f_i(\mathbf{x}, t + 1) = f_i(\mathbf{x}, t_c) - 2B_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_b), \quad (6)$$

式中 t_c 表示碰撞后时刻, i' 和 i 是反射和入射方向, $B_i = (3/(2c^2)) \rho w_i$, \mathbf{u}_0 是固粒质心平动速度, \mathbf{u}_b 是边界运动速度 $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_0 + \Omega \times \mathbf{x}_b$, Ω 是固粒转动角速度, $\mathbf{x}_b = \mathbf{x} + (1/2) \mathbf{e}_i - \mathbf{x}_0$, \mathbf{x}_0 是固粒质心位置。

1.3 作用在固粒上的力和力矩

由于在 \mathbf{e}_i 方向反弹, 在 \mathbf{x} 上流体对固粒的力和力矩为

$$\begin{cases} \mathbf{F} \left[\mathbf{x} + (1/2) \mathbf{e}_i, t \right] = 2\mathbf{e}_i (f_i(\mathbf{x}, t_c) - B_i(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_b)), \\ \mathbf{T} \left[\mathbf{x} + (1/2) \mathbf{e}_i, t \right] = \mathbf{x}_b \times \mathbf{F}. \end{cases} \quad (7)$$

固粒受到总的力和力矩为

$$\mathbf{F}_T = \sum \mathbf{F} \left[\mathbf{x} + (1/2) \mathbf{e}_i, t \right], \quad \mathbf{T}_T = \sum \mathbf{T} \left[\mathbf{x} + (1/2) \mathbf{e}_i, t \right]. \quad (8)$$

1.4 固粒最终 Reynolds 数

为描述固粒最终沉降速度, 定义固粒沉降 Reynolds 数 Re_T , 由如下公式描述^[10]

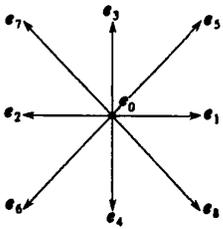


图 1 二维格子模型

$$\lg(Re_T) = a_1 + a_2 w + a_3 w^2 + a_4 w^3, \quad (9)$$

其中: $a_1 = -0.81824 - 0.55689/A$, $a_2 = 2.41277 + 1.54674/A - 0.53872/A^2$, $a_3 = -0.2056 - 1.34714/A + 0.65696/A^2$, $a_4 = 0.82343 - 27a_1/64 - 9a_2/16 - 3a_3/4$, $w = \lg(C_d Re_T^2)^{1/3}$, $C_d Re_T^2 = \pi \rho \Delta Q_g d^3 / (2 \mu^2)$, d 为固粒直径, A 是圆柱的长径比, 文中取 $A = 100$, $\Delta \rho$ 是固粒和流体的密度差, ρ 为流体密度, μ 为流体粘度。

1.5 碰撞模型

图2为碰撞示意图。假设两个圆粒子碰撞是瞬时的, 没有摩擦作用, 并且为弹性碰撞。碰撞后, 两圆粒获得一个大小相等方向相反的冲量 I , 沿着两圆粒圆心连线。该冲量决定两个固粒碰撞后的速度, 其表达式为

$$I \mathbf{p} + m_1 \mathbf{v}_1 = m_1 \mathbf{v}_1', \quad (10)$$

$$-I \mathbf{p} + m_2 \mathbf{v}_2 = m_2 \mathbf{v}_2', \quad (11)$$

式中 m 和 \mathbf{v} 是固粒质量和速度, \mathbf{p} 是碰撞法向的单位矢量, 下标 1 和 2 表示两个不同固粒, 带“'”的量是碰撞后的量。根据弹性碰撞的定义有

$$k = - \frac{v_{2p}' - v_{1p}'}{v_{2p} - v_{1p}}, \quad (12)$$

其中 k 是固粒的弹性系数(对完全弹性碰撞, $k = 1$), v_{1p} , v_{2p} 是碰撞前两个固粒的速度在法向方向的投影。不考虑摩擦时, 两圆粒子的碰撞没有力矩作用, 联立上面 3 个方程求解, 可得冲量 I

$$I = \frac{m_1(1+k)(v_{2p} - v_{1p})}{1 + m_1/m_2}. \quad (13)$$

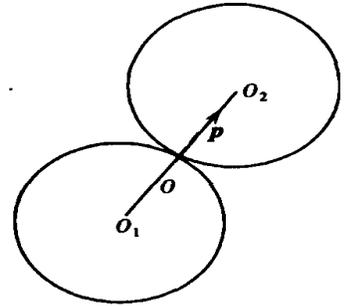


图2 圆粒子碰撞示意图

1.6 计算步骤

固粒由静止开始沉降; 在某一个时间, 固粒到达新的位置, 由(8)式求固粒所受的力和力矩, 然后确定一个时间步后固粒新的位置, 如此反复得到固粒整个沉降过程。如果固粒发生碰撞, 则由方程(10)~(13)计算固粒碰撞后的速度, 然后继续计算。计算时整个计算区域随着固粒移动, 壁面上满足无滑移条件。

2 结果与讨论

对所有算例, 取重力方向为 $-Y$ 方向, 横向为 X 方向, 计算区域随粒子的沉降向下移动; 对两个圆粒的沉降, 增减 Y 向网格数以保持上方的粒子离区域上边界距离为 $15D$ 、下方的粒子离下边界距离为 $10D$ 。所有给出结果和图表中的位移都用圆粒子的直径 D 无量纲化, 速度用 Clift 等^[10]的经验公式(10)算得的单个粒子在无界流场中沉降的 Re_T 导出的速度 V_T 无量纲化, 时间用 D/V_T 无量纲化。

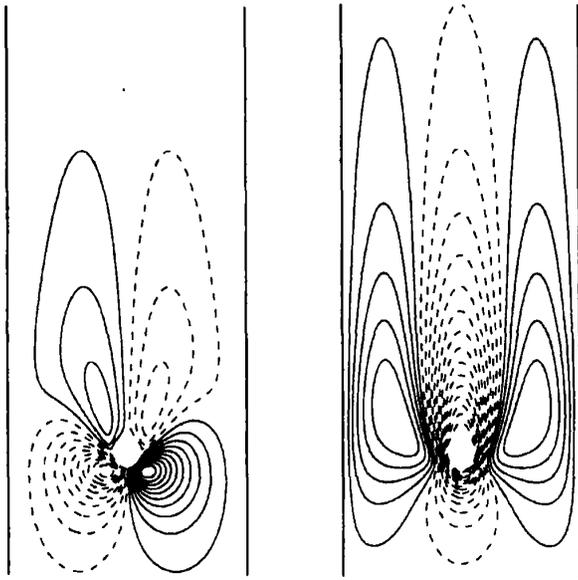
2.1 单个圆粒子的沉降

取圆粒子的直径 $D = 15$, 通道宽度为 $8D$, 计算区域为 $8D \times 25D$ 。粒子一旦开始沉降, 其侧面将形成环流, 在后面形成尾流, 如图3所示。从 Y 向速度的分布可见, 粒子的尾流场是典型的剪切流场。粒子周围的流体在粒子的带动下一起运动。对 Y 向速度而言, 粒子对迎风区的影响远远小于其对尾流区的影响。该粒子在无界流场中的沉降 $Re = 7.52$ 。

2.2 两个圆粒子的沉降

下面分析两个圆粒子的沉降, 考虑 Re 数、初始相对位移及通道宽度对沉降的影响。

2.2.1 不同 Re 数的沉降



(a) X 方向 (b) Y 方向

图3 速度等值线图

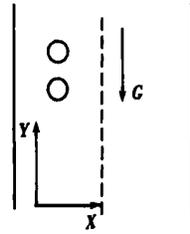
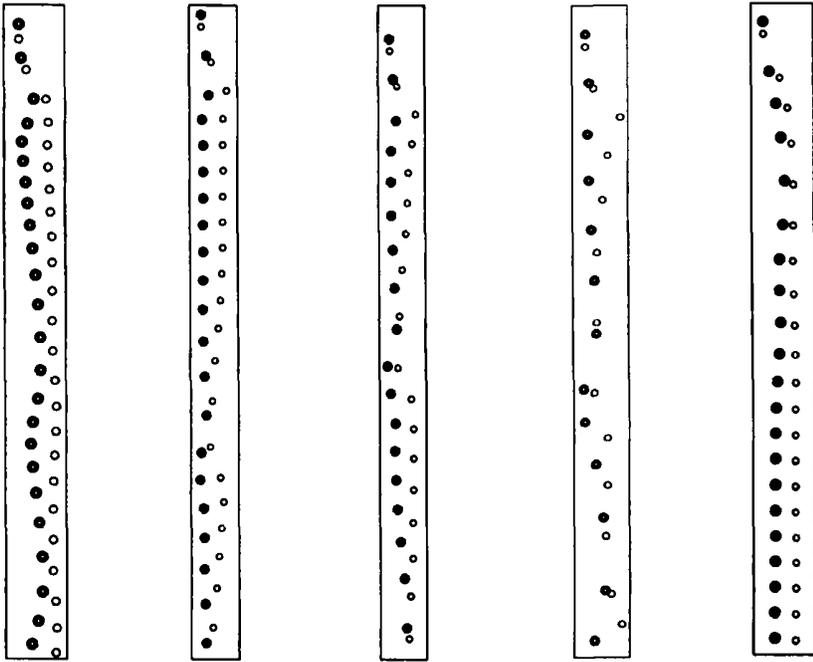


图4 两粒子初始位置示意图



(a) $Re = 2.85$ (b) $Re = 4.66$ (c) $Re = 7.52$ (d) $Re = 17.14$ (e) $Re = 0.87$

图5 两个圆粒子沉降的过程

首先分析 Re 数对沉降的影响, 通道宽 W 为 $8D$, 初始时刻两个圆粒子在 $x = W/4$ 垂直线上一前一后、距离为 $2D$, 见图4所示。所选择的 Re 数范围为 $0.1 < Re < 20$, 对5种不同的 Re 数, 沉降的过程如图5所示。释放后, 由于两粒子更靠近左壁面, 所以壁面会把两粒子向中间推, 上面的粒子在下方粒子尾涡的作用下会加速沉降, 同时也注定其横向速度小于下方的粒

子;上方粒子逐渐赶上下方的粒子,由于向右的惯性作用及粒子间的排斥力,下方的粒子被继续推向右侧,过了中线以后壁面将阻止下方粒子的进一步靠近,同时阻碍这个粒子的沉降,上方粒子进一步赶超,已经接近下方粒子的左侧位置,同时两粒子通过各自的侧面环流相互排斥,把两粒子向两侧推.这时分3种情况:

1) Re 数足够大,也即惯性足够大.下方粒子向右运动的惯性大,一直会运动到非常靠近右壁面的位置,沉降速度大大减小,同时它的尾涡对后面粒子的吸引大.所以上方粒子加速后可以追上下方粒子,赶超过去,领先沉降,随着初始在下方的粒子被推向壁面,壁面的反弹的增强,壁面将该粒子向中心位置推,因此这一粒子也进入前粒子的尾流区,沉降速度加大,上述过程周而复始的进行着,如图 5(c)、图 5(d) 所示.

2) Re 数较小,粒子的惯性比较小,领先的粒子被向右侧推了一段后仍会继续领先,粒子横坐标将作小的摆动,如图 5(a) 和图 5(e) 所示.

3) 上述两者之间的情况,如图 5(b) 所示,原先在上方的粒子在取得领先位置后将保持该优势.

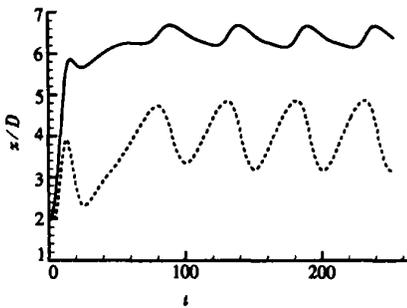
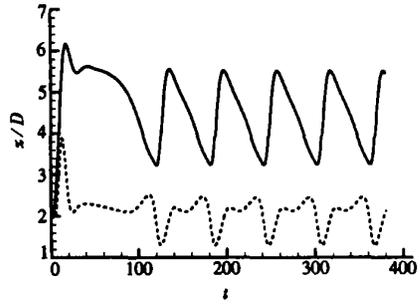
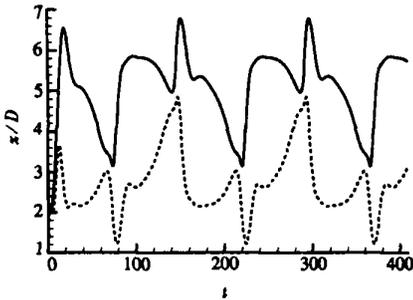
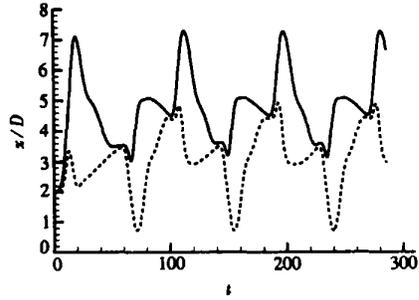
(a) $Re = 2.85$ (b) $Re = 4.66$ (c) $Re = 7.52$ (d) $Re = 17.14$

图 6 沉降时横向位置随时间的变化

(实线为初始时刻在前的粒子,虚线为初始时刻在后的粒子)

对所计算的 5 个 Re 数,只有在 $Re = 17.14$ 的时候发生碰撞,所建立的模型可以有效地处理.

图 6 所示是上述前 4 种 Re 下两圆粒子横向坐标随时间的变化.可见:在这几个 Re 数下,两粒子的横向位移经过一段时间的发展后都具有很好的周期性,如图 6(a)~图 6(d) 所示;但是不同 Re 数下,横向位移的波动不一样, Re 数越大,横向位移的波动越大.

图 7 所示为上述前 4 种 Re 下初始时刻在上方的粒子相对于下方粒子的(无量纲化)相对位移 DX 、 DY 随时间的变化. Re 数小时,上方的粒子或者不会超过下方的粒子,或者超过一次又

被反超, 该位移较小, 如图 7(a)、图 5(a) 及图 5(e) 所示; Re 数大时, 两个粒子交替领先, Y 向相对位移 DY 周期性变化, 该位移值较大, 如图 7(c) 和图 7(d) 所示; $Re = 4.66$ 时, 从图 7(b) 易见 Y 向相对位移 DY 改变了符号。所有 4 幅图所示的横向相对位移 DX 都始终为负, 也即初始时刻在上方的粒子始终处在左侧位置, 当 Re 数小时, 横向相对位移 DX 始终较大, 而振幅较小, 也即两个粒子在横向始终保持较大的间隔, 间隔的变化幅度不大。反之, 当 Re 数大时, 横向相对位移 DX 时而近似为 0, 时而变得很大, 振幅较大, 也即两个粒子在横向的位移变化幅度大。 Re 数越大, 两粒子间的相互作用越强, 相对位移 DX 、 DY 的振幅越大。

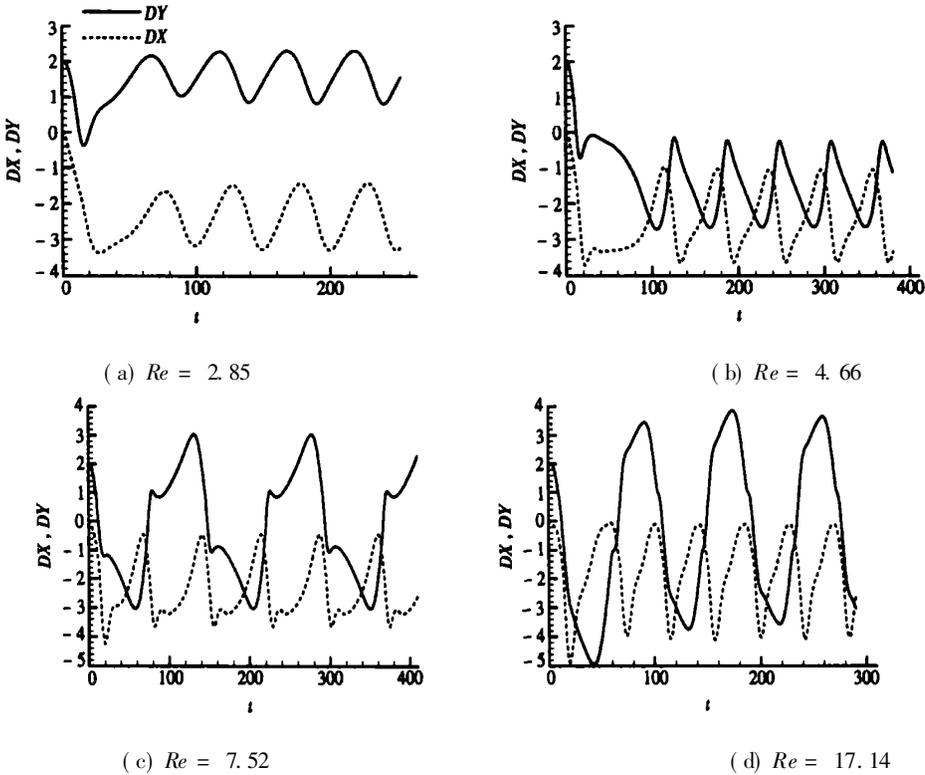


图 7 沉降时粒子间相对位移随时间的变化

(实线和虚线分别表示 Y 向和 X 向相对位移 DY 和 DX)

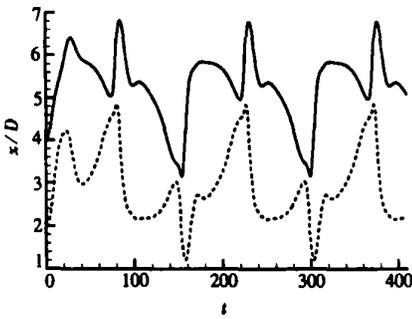
2.2.2 初始位置的影响

这里考虑初始位置对两圆粒子沉降的影响, 我们通过对上面 $Re = 7.52$ 的情况取不同的初始位置来说明这一影响。我们对下方粒子取在中线位置, 初始时刻上方粒子相对于下方粒子的位移分别为 $(-2D, 2D)$ 和 $(-2D, 4D)$ 的两种情况进行了模拟, 两粒子横向的位移随时间的变化和粒子间相对位移随时间的变化分别如图 8 和图 9 所示, 图中实线和虚线的含义和前面相应的一样。对比这两种情况和前面的图 6(c)、图 7(c), 可知初始位置对沉降的形态影响不大。

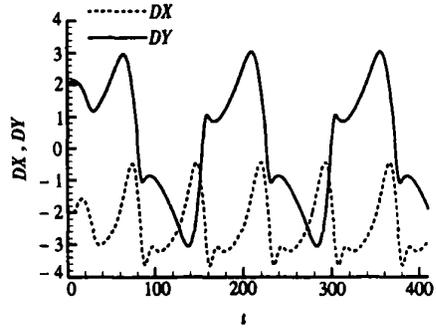
2.2.3 管道宽度的影响

现在分析在较宽的管道下的两个粒子的沉降。对宽为 $20D$ 的管道, 初始时刻, 下方粒子取在中线位置, 上方粒子在下方粒子的左上方, 相对于下方粒子的位移为 $(-4D, 4D)$, 其余的参数与前述 $Re = 7.52$ 的情况下的参数一致, 得到的两粒子横向的位移随时间的变化和粒子间相对位移随时间的变化如图 10 所示。对比这种情况和前面的图 6(c)、图 7(c)、图 8 及图 9,

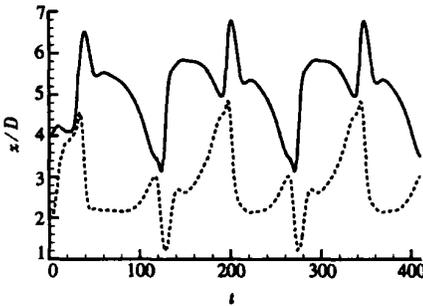
可知总体而言沉降的特性没变,但由于管道变宽, X 和 Y 向相对位移都比前面的大,特别是 Y 向相对位移,最大已经接近 $13D$,同时整个周期延长,周期由前面的 150 增加到 560 。



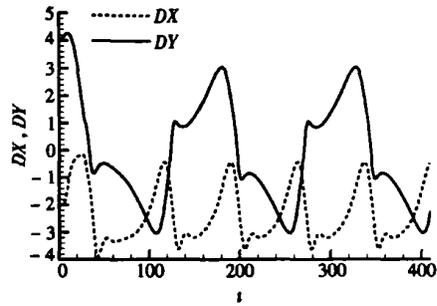
(a) 横向位置



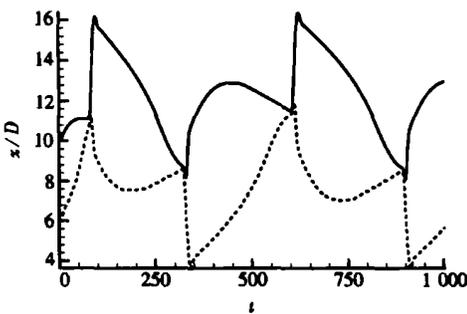
(b) 相对位移

图8 $Re = 7.52$, 初始相对位移为 $(-2D, 2D)$ 时横向位置及相对位移随时间的变化

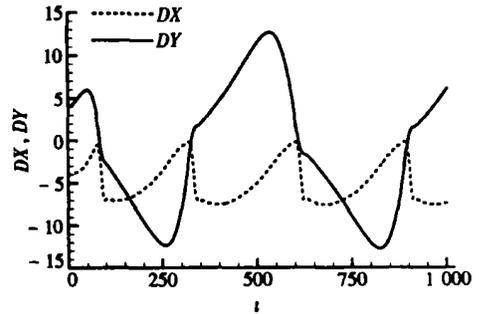
(a) 横向位置



(b) 相对位移

图9 $Re = 7.52$, 初始相对位移为 $(-2D, 4D)$ 时横向位置及相对位移随时间的变化

(a) 横向位置



(b) 相对位移

图10 宽管道里横向位置及相对位移随时间的变化

3 结 论

本文主要研究了二维有界通道内两圆粒子的沉降,采用弹性模型处理圆粒子间的碰撞,分析了 Re 数、初始相对位移及通道宽度对沉降的影响。研究发现,沉降具有一定的周期性。在所研究的 $0.1 < Re < 20$ 范围, Re 数越大,两圆粒子的相互作用越强,粒子横向位移的振幅越大;在 Re 数大时,沉降的过程是两个粒子交替领先;在 Re 数较小时,在后面的粒子接近的时候,领先的粒子被向右侧推了一段后仍会继续领先;对中等 Re 数,原先在后面粒子在第一次加

速后将取得领先位置,以后将一直保持这一优势;对所选择的5种 Re 数,只在 $Re = 17.14$ 时圆粒间有碰撞,所建立的碰撞模型可以有效地处理。而初始位置对沉降的形态影响不大。管道宽度变化时,总的沉降的特性没变,周期改变,管道变宽,周期变长。

[参 考 文 献]

- [1] Feng J, Hu H H, Joseph D D. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid. part 1. Sedimentation[J]. *J Fluid Mech*, 1994, **261**(1): 95—134.
- [2] Qi D W. Lattice Boltzmann simulations of particles in no zero Reynolds number flows[J]. *J Fluid Mech*, 1999, **385**(1): 41—62.
- [3] Pantaka N A, Singh P, Joseph D D, et al. A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows[J]. *Int J Multiphase Flow*, 2000, **26**(9): 1509—1524.
- [4] SHAO Xue_ming, LIN Jian_zhong, YU Zhao_sheng. Sedimentation of a single particle between two parallel walls[J]. *J of Zhejiang University Science*, 2004, **5**(1): 111—116.
- [5] LIN Jian_zhong, SHI Xing, YOU Zhen_jiang. Effects of the aspect ratio on the sedimentation of a fiber in Newtonian fluids[J]. *J Aerosol Sci*, 2003, **34**(7): 909—921.
- [6] LIN Jian_zhong, SHAO Xue_ming, SHI Xing, et al. Study on the interaction of sedimenting cylindrical particles in still fluid[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2004, **20**(1): 33—45.
- [7] Ladd J C. Numerical simulation of particulate suspension via discrete lattice Boltzmann equation. part 2: Numerical results[J]. *J Fluid Mech*, 1994, **271**(1): 311—339.
- [8] WANG Ye_long, LIN Jian_zhong. Numerical simulation of two elliptical particles sedimentation with inertial using lattice Boltzmann method[A]. In: *Recent Advances in Fluid Mechanics* [C]. Beijing: Tsinghua University Press & Springer Verlag, 2004, 757—761.
- [9] Chen H, Chen S Y, Matthaeus W H. Recovery of the Navier-Stokes equations using a lattice gas Boltzmann method[J]. *Phys Rev A*, 1992, **45**(8): 5339—5342.
- [10] Clift R, Grace R J, Weber M E. *Bubble, Drops, and Particles* [M]. New York: Academic Press, 1978.

Simulation of the Sedimentation of Two Circular Particles With Collision Considered in a Vertical Channel

WANG Ye_long

(Department of Mechanics, State Key Laboratory of Fluid Power Transmission and Control,
Zhejiang University, Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: D2Q9 model of Lattice Boltzmann equation method was used to simulate the sedimentation of two circular particles in a bounded two dimension channel. The characteristics of the sedimentation shows some periodicity for the Reynolds number Re chosen, 0.1~20. The larger the Reynolds number, the stronger the interaction between the two particles and the larger the transversal displacements. For large Re , the two particles leading alternately; for small Re , the initially leading particle will keep its leading position and for moderate Re , the initially upper particle will get leading position and keep it. The influence of the initially relative position of the two particles on sedimentation is small. The width of the channel won't change the characteristics of the sedimentation as a whole, but will change the period of the sedimentation. The wider the channel, the longer the period will be.

Key words: lattice Boltzmann equation; sedimentation; collision; circular particle