

# 微极各向同性弹性板中的 Rayleigh\_Lamb 波<sup>\*</sup>

R·库玛<sup>1</sup>, G·帕塔泊<sup>2</sup>

(1. 库鲁克西察大学 数学系, 库鲁克西察 136119, 那亚那, 印度;  
2. 恩伯德卡国家工艺大学 应用数学系, 加兰德哈 144011, 庞加伯, 印度)

(我刊原编委戴天民推荐)

**摘要:** 研究了无应力作用条件下, 均匀、各向同性、圆柱形微极结构弹性板中波的传播, 导出了对称和斜对称模式下波传播的特征方程。对短波这一极端情况, 无应力圆板中对称和斜对称模态波的特征方程退化为 Rayleigh 表面波频率方程, 并得到薄板的计算结果, 给出了位移和微转动分量, 并绘制了相应图形, 给出了若干特殊情况的研究结果及对称和斜对称模态特征方程的图示。

**关键词:** 微极弹性板; 环形峰波; 特征方程; 相速度; 振动

**中图分类号:** O326      **文献标识码:** A

## 引 言

现代工程结构物通常由具有内部结构的材料构成, 多晶体材料、带纤维结构的材料或带粗粒料的材料均属于此, 经典弹性力学不能充分描述此类材料的性能, 分析此类材料需要引入定向介质理论(theory of oriented media), 在该领域, Eringen<sup>[1-3]</sup>发展了弹性固体、流体和非局部极性场的微极理论, 微极连续介质由内部联结的微粒构成, 这些微粒刚体可以平动和转动, Eringen<sup>[4-6]</sup>在他最近的著作中综述了微极弹性固体理论和非局部连续介质场论。

鉴于该问题在理论和实践中的重要性, 不少研究者讨论了微极弹性体的波和振动的若干问题, W. Nowacki 和 W. K. Nowacki<sup>[7]</sup>研究了无限大微极弹性板中单色波的传播, Benerji 和 Sengupta<sup>[8]</sup>讨论了无限大流体中微极弹性层中波的传播, K. M. Rao 和 B. K. Rao<sup>[9]</sup>及 K. M. Rao<sup>[10]</sup>研究了微极波导中的纵波传播问题, Rao 和 Reddy<sup>[11]</sup>讨论了微极柱面内 Rayleigh 型波的传播, Kumar 和 Singh<sup>[12]</sup>研究了广义微极热弹性扩展层中波的传播, Kumar 和 Deswal<sup>[13]</sup>讨论了微极扩展弹性介质中通过柱孔时波的传播, Kumar 和 Tomer<sup>[14]</sup>讨论了微极弹性扩展介质中, 柱孔弹性波的传播, Kumar 和 Choudhary<sup>[15]</sup>研究了正交各向异性微极弹性介质中调和时间源的响应, Kumar 和 Ailawalia<sup>[16]</sup>研究了粘性对微极界面上作用移动荷载的影响。

柱形微极结构板和面板广泛地用作结构的元件, 其振动特性对实际设计非常重要, 早期大量的研究集中在各向同性弯曲面板的振动, 复合材料厚壳、板可用作航空和航天结构、近海结构、水底结构、压力容器、土木工程结构、化工管道和自动悬吊设备的组件。

\* 收稿日期: 2005\_08\_21; 修订日期: 2006\_02\_13

作者简介: R·库玛(联系人, E\_mail: rajneesh\_kuk@rediffmail. com)·

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校。

本文旨在研究厚为  $2d$  的无限大、均匀、各向同性、圆柱形微极结构弹性板中, 平面峰波的传播。注意到矩形板中环形峰波的运动满足 Rayleigh-Lamb 型特征方程。在短波这一极端情况, 无应力圆板对称和斜对称模态的特征方程退化为 Reyleigh 表面波频率方程。

## 1 基本方程

Eringen<sup>[17]</sup> 给出了无体力和体耦合时微极弹性介质中的运动方程和本构关系:

$$(\lambda + 2\mu + K) \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu + K) \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) + K \nabla \times \phi = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \nabla \cdot (\nabla \cdot \phi) - \gamma \nabla \times (\nabla \times \phi) + K \nabla \times \mathbf{u} - 2K\phi = \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$t_{kl} = \lambda u_{r,r} \delta_{kl} + \mu (u_{k,l} + u_{l,k}) + K (u_{l,k} - \epsilon_{klr} \phi_r), \quad (3)$$

$$m_{kl} = \alpha \phi_{r,r} \delta_{kl} + \beta \phi_{k,l} + \gamma \phi_{l,k}, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  为位移矢量,  $\phi = (\phi_r, \phi_\theta, \phi_z)$  为微转动矢量,  $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, K$  为材料常数,  $\rho$  为密度,  $j$  为微惯量,  $t_{kl}$  和  $m_{kl}$  分别为力应力和耦合应力分量。

## 2 问题的数学描述及其解

我们考虑一个厚度为  $2d$  的无限大、均匀、各向同性、圆柱形微极结构板。板关于  $z_-$  轴是对称的, 坐标系  $(r, \theta, z)$  的原点取在板的中心面上,  $z_-$  轴沿厚度方向垂直于中面。表面  $z = \pm d$  服从不同的边界条件。以  $r-z$  平面作为波的入射平面。作为二维问题, 我们取  $\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z)$ ,  $\phi = (0, \phi_\theta, 0)$ 。

定义如下无量纲量

$$\begin{cases} r' = \frac{\omega^*}{c_1} r, & u'_r = \frac{\omega^*}{c_1} u_r, & u'_z = \frac{\omega^*}{c_1} u_z, & t' = \omega^* t, & \phi'_\theta = \frac{\omega^{*2}}{c_1^2} j \phi_\theta, & \omega^{*2} = \frac{K}{\theta}, \\ t'_{ij} = \frac{1}{\mu} t_{ij}, & m'_{ij} = \frac{\omega^* j}{\gamma c_1} m_{ij}, & \omega'^2 = \frac{\omega^2}{\omega^{*2}}, & c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu + K}{\rho}, & c_2^2 = \frac{\mu + K}{\rho}, \\ c_4^2 = \frac{\gamma}{\theta}, & p = \frac{K}{\rho c_1^2}, & \delta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, & \delta_2^2 = \frac{c_1^2}{c_4^2}, & \delta^{*2} = \frac{K}{\rho c_4^2}, \end{cases} \quad (5)$$

其中  $\omega^*$  为介质的特征频率。

将方程(5)代入方程(1)和(2), 得到

$$(1 - \delta^2) \frac{\partial e}{\partial r} + \delta^2 \left[ \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right] u_r - \frac{\partial \phi_\theta}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$(1 - \delta^2) \frac{\partial e}{\partial z} + \delta^2 \nabla^2 u_z + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_\theta) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\left[ \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_\theta - 2\delta_2^2 \phi_\theta + \delta^{*2} \left[ \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] = \delta_2^2 \frac{\partial^2 \phi_\theta}{\partial t^2}, \quad (8)$$

其中

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \text{和} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

为方便计, 这里省去了字母上角的撇号。

在方程(6)、(7)、(8)中, 通过下列关系, 引入势函数  $\phi$  和  $\psi$ 。

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r}, \quad (9)$$

得到

$$\ddot{\phi} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{\phi} - \frac{\phi}{r^2} - \frac{\phi_0}{\delta^2} - \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (11)$$

$$\delta^{*2} \left[ \ddot{\phi} - \frac{1}{r^2} \phi \right] = \delta_2^2 \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} + 2\delta_2^2 \phi_0 - \left[ \ddot{\phi} - \frac{1}{r^2} \phi \right] \phi_0. \quad (12)$$

假设方程组(10)~(12)有如下形式的解

$$(\phi, \psi, \phi_0) = [f(z)J_0(\xi r), g(z)J_1(\xi r), h(z)J_1(\xi r)] e^{-i\omega t}, \quad (13)$$

其中  $\omega$  为频率,  $\xi$  为波数,  $J_0(\xi r)$  和  $J_1(\xi r)$  分别为 0 阶和 1 阶 Bessel 函数.

将方程(13)代入方程组(10)~(12), 并求解该微分方程组, 得到  $\phi$ ,  $\psi$  和  $\phi_0$  的表达式

$$\phi = (A \cos m_1 z + B \sin m_1 z) J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (14)$$

$$\psi = (C \cos m_2 z + D \sin m_2 z + E \cos m_3 z + F \sin m_3 z) J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (15)$$

$$\phi_0 = \delta^2 [(\beta^2 - m_2^2)(C \cos m_2 z + D \sin m_2 z) + (\beta^2 - m_3^2)(E \cos m_3 z + F \sin m_3 z)] J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} m_1^2 = \xi^2(c^2 - 1) = \alpha^2, & m_2^2 = \xi^2(c^2 a_2^2 - 1), \\ m_3^2 = \xi^2(c^2 a_3^2 - 1), & \beta^2 = \xi^2 \left[ \frac{c^2}{\delta^2} - 1 \right], \end{cases} \quad (17)$$

$$(a_2^2, a_3^2) = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \delta_2^2 + \frac{1}{\delta^2} + \frac{\delta^{*2}}{\omega^2 \delta^2} \left( 1 - \frac{2\delta_2^2 \delta^2}{\delta^{*2}} \right) \right] \pm \left[ \left( \frac{1}{\delta^2} - \delta_2^2 + \frac{\delta^{*2}}{\omega^2 \delta^2} \left( 1 - \frac{2\delta_2^2 \delta^2}{\delta^{*2}} \right) \right)^2 + \frac{4\delta_2^2}{\omega^2 \delta^2} (\delta^{*2} - 2(\delta_2^2 \delta^2 - 1)) \right]^{1/2} \right\}, \quad (18)$$

且  $c = \omega/\xi$  为波的相速度.

由方程(9)、(14)~(16), 得到位移分量  $u_r$  和  $u_z$

$$u_r = [-\xi(A \cos m_1 z + B \sin m_1 z) - m_2(C \sin m_2 z - D \cos m_2 z) - m_3(E \sin m_3 z - F \cos m_3 z)] J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (19)$$

$$u_z = [-m_1(A \sin m_1 z - B \cos m_1 z) - \xi(C \cos m_2 z + D \sin m_2 z + E \cos m_3 z + F \sin m_3 z)] J_0(\xi r) e^{-i\omega t}. \quad (20)$$

$z = \pm d$  处的无量纲力学边界条件为

$$t_{zz} = 0, \quad t_{rz} = 0, \quad m_{z0} = 0, \quad (21)$$

其中  $t_{zz}$ 、 $t_{rz}$ 、 $m_{z0}$  为

$$\begin{aligned} t_{zz} &= (2\mu + K) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda e, \\ t_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + K \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \phi_0 \right), \\ m_{z0} &= \gamma \frac{\partial \phi_0}{\partial z}. \end{aligned}$$

### 3 特征方程的推导

应用板外表面  $z = \pm d$  处的边界条件(21), 并利用方程(14)~(20), 我们得到由 6 个方程

联立的方程组:

$$P(Ac_1 + Bs_1) + Q\{m_2(Cs_2 - Dc_2) + m_3(Es_3 - Fc_3)\} = 0, \quad (22)$$

$$P(Ac_1 - Bs_1) + Q\{m_2(-Cs_2 - Dc_2) + m_3(-Es_3 - Fc_3)\} = 0, \quad (23)$$

$$Q(-m_1s_1A + m_1c_1B) + P(Cc_2 + Ds_2 + Ec_3 + Fs_3) = 0, \quad (24)$$

$$Q(m_1s_1A + m_1c_1B) + P(Cc_2 - Ds_2 + Ec_3 - Fs_3) = 0, \quad (25)$$

$$f_2(Cm_2s_2 - Dm_2c_2) + f_3(Em_3s_3 - Fm_3c_3) = 0, \quad (26)$$

$$f_2(Cm_2s_2 + Dm_2c_2) + f_3(Em_3s_3 + Fm_3c_3) = 0, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} P = \beta^2 - \xi^2 + \frac{p\xi^2}{\delta^2}, & Q = 2\xi\left[1 - \frac{p}{2\delta^2}\right], & f_i = \beta^2 - m_i^2, & i = 2, 3, \\ s_i = \sin m_i z, & c_i = \cos m_i z, & i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (28)$$

如果  $[A, B, C, D, E, F]^T$  的系数行列式等于零, 则方程组(22) ~ (27) 有一个非平凡解。经过冗长的代数运算, 导得板的特征方程为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_2 d} \right]^\pm - \frac{m_2(\beta^2 - m_2^2)}{m_3(\beta^2 - m_3^2)} \left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{-4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 m_1 m_2 (m_3^2 - m_2^2)}{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2 (m_3^2 - \beta^2)}. \quad (29)$$

这里, 上角 + 1 表示斜对称模式, - 1 表示对称模式。方程(29) 便是板中微极弹性波传播的修正特征方程。该方程被认为是微极弹性固体中, 无限大矩形板内传播对称和斜对称波的 Rayleigh\_Lamb 方程。我们宁可称它为 Rayleigh\_Lamb 波而不称它为 Lamb 波, Lamb 波的性质是由 Lamb<sup>[18]</sup> 从弹性动力学中, 由各向同性弹性固体中导出的。从而 Rayleigh\_Lamb 型方程也给出了板中呈环形峰波的微极弹性的控制方程。尽管频率波数关系, 无论对于直峰波和环形峰波都是成立的。就径向坐标而言, 确定位移和应力的变化, 选用 Bessel 函数比三角函数更适宜。

对大的  $r$  值, 有

$$J_0(\xi_r) \rightarrow \frac{\sin \xi_r + \cos \xi_r}{\sqrt{\pi \xi_r}}, \quad J_1(\xi_r) \rightarrow \frac{\sin \xi_r - \cos \xi_r}{\sqrt{\pi \xi_r}}, \quad (30)$$

但远非一开始在  $r$  向的运动就是周期性的。实际上, 用“远(far)”字倒不如用“迅速(repidly)”, 发生在 Bessel 函数的 4 到 5 个零点内。当  $r$  变得很大时, 环形峰波趋于直峰波。

特殊情况: 弹性板

在没有微极效应 ( $K = p = j = 0$ ) 的情况下, 有

$$m_1^2 = \alpha^2, \quad a_2^2 = \frac{1}{\delta^2}, \quad a_3^2 = 0, \quad m_2^2 = \beta^2, \quad m_3^2 = -\xi^2,$$

从而, 特征方程(29) 变为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_2 d} \right]^\pm = - \frac{4\xi^2 \alpha \beta}{(\beta^2 - \xi^2)^2}. \quad (31)$$

方程(31) 与 Graff 在文献[19] 中讨论的均匀、各向同性、无应力弹性板相符。

## 4 特征方程的讨论

特征方程的区域

特征方程的区域取决于: 无论  $c < \delta, 1, 1/|a_i|$  ( $i = 2, 3$ ) 我们都会有  $\beta, m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

为纯虚数、0 或实数。这时, 频率方程(29) 出现如下相应的情况:

区域 I 该区域用  $c < \delta, 1/|a_i| (i = 2, 3)$  表征。这里我们分别用  $i\beta'$  代替  $\beta$ , 用  $i\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 代替  $m_i$ , 则特征方程(29) 变为

$$\left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tanh \alpha_2 d} \right]^{\pm} - \frac{\alpha_2(\beta'^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3(\beta'^2 - \alpha_3^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tanh \alpha_3 d} \right]^{\pm} = \frac{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{(p\xi^2/\delta^2 - \beta'^2 - \xi^2)^2 (\alpha_3^2 - \beta'^2)}. \quad (32)$$

区域 II 该区域用  $\delta < c < 1$  表征。这时我们有  $\beta = i\beta', m_1 = i\alpha_1, m_2 = m_2, m_3 = m_3$ , 则特征方程变为

$$\left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tan m_2 d} \right]^{\pm} - \frac{m_2(\beta'^2 - m_2^2)}{m_3(\beta'^2 - m_3^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tan \alpha_3 d} \right]^{\pm} = - \frac{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_1 m_2 (m_3^2 - m_2^2)}{(p\xi^2/\delta^2 - \beta'^2 - \xi^2)^2 (m_3^2 - \beta'^2)}. \quad (33)$$

区域 III 该区域用  $\xi < \omega, c > 1$  表征, 则特征方程即是方程(29)。

## 5 薄板结果

让我们考虑当横波波长相对于板的厚度相当大的情况, 此时  $2\pi/m_1, 2\pi/m_2, 2\pi/m_3, 2\pi/\beta \gg d$ 。这时候, 从区域 I 和区域 II 可导出有趣的结果。在区域 I 中, 对称模态波, 无解; 斜对称模态波时, 在双曲正切函数的展开式中保留前两项, 则特征方程(32) 变为

$$\left[ \frac{p\xi^2}{\delta^2} - \beta'^2 - \xi^2 \right]^2 \left[ 1 - \frac{\beta'^2 d^2}{3} \right] = 4\xi^2 \left[ 1 - \frac{p}{2\delta^2} \right]^2 \alpha_2^2 \left[ 1 - \frac{\alpha_2^2 d^2}{3} \right]; \quad (34)$$

如果忽略微极效应, 即  $K = p = j = 0$ , 则方程(34) 又变为

$$(\beta'^2 - \xi^2)^2 \left[ 1 - \frac{\beta'^2 d^2}{3} \right] = 4\xi^2 \alpha_2^2 \left[ 1 - \frac{\alpha_2^2 d^2}{3} \right]. \quad (35)$$

在区域 II 中, 斜对称模态波无解; 对称模态波特征方程变为

$$(\alpha_3^2 + \alpha_2^2 - \beta'^2) = \frac{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_2^2 \alpha_3^2}{(\beta'^2 + \xi^2 - p\xi^2/\delta^2)^2}; \quad (36)$$

如果忽略微极效应, 即  $K = p = 0$ , 则方程(36) 又变为

$$(\beta'^2 + \xi^2)^2 = 4\xi^2 \beta'^2. \quad (37)$$

## 6 短波长波

令  $\xi \rightarrow \infty$ , 可得到一些有关渐近解特性的信息。若取  $\xi > \omega/\delta$ , 则  $c > \delta, 1$ 。特征方程的根位于区域 I。这时分别用  $i\beta'$  代替  $\beta$ , 用  $i\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  代替  $m_i$ , 则特征方程(29) 化为

$$\left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tanh \alpha_2 d} \right]^{\pm} - \frac{\alpha_2(\beta'^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_3(\beta'^2 - \alpha_3^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tanh \alpha_3 d} \right]^{\pm} = \frac{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_3^2 - \alpha_2^2)}{(p\xi^2/\delta^2 - \beta'^2 - \xi^2)^2 (\alpha_3^2 - \beta'^2)}. \quad (38)$$

当  $\xi \rightarrow \infty, (\tanh \alpha_1 d)/(\tanh \alpha_i d) \rightarrow 1 (i = 2, 3)$ , 则对称和斜对称模态的频率方程(38) 成为

$$4\xi^2 \left[ 1 - \frac{p}{2\delta^2} \right]^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 + \alpha_3) = \left[ \frac{p\xi^2}{\delta^2} - \beta'^2 - \xi^2 \right]^2 (\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_2 \alpha_3 - \beta'^2). \quad (39)$$

只不过, 它们已成为 Rayleigh 表面波方程。因为对这样的短波长来说, 有限厚度的板可看作一个半空间, 正好是 Rayleigh 表面波的结果。所以, 振动能量主要是沿板的表面传播。如果在方程(39) 中忽略微极效应, 即  $K = p = 0$ , 则得到

$$4\xi^2 \alpha_1 \beta' = (\beta'^2 + \xi^2)^2. \quad (40)$$

## 7 Lamb 模态

Lamb 模态是一类特殊的精确解, 首先由 Lamb<sup>[18]</sup> 在  $\beta^2 = \xi^2(1 - p/\delta^2)$  条件下得到。其解

在区域II中,并且频率方程(29)变为:

对称模态:

$$\tanh m_2 d = \infty \Rightarrow m_2 = \frac{n\pi}{2d}, \quad n = 1, 3, 5, \dots;$$

斜对称模态:

$$\tanh m_2 d = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{n\pi}{2d}, \quad n = 0, 2, 4, \dots;$$

于是,其频率为

$$\omega = \frac{\sqrt{4\beta^2 d^2 + n^2 \pi^2 (1 - p/\delta^2)}}{2da_2 \sqrt{1 - p/\delta^2}}.$$

不过,不计微极效应( $p = 0$ )时, $\beta = m_2$ ,从而频率为 $\omega = n\pi\delta/(\sqrt{2}d)$ ,这与文献[19]相吻合.显然,这些模态取决于微极参数( $K$ 或 $p$ )和板的厚度.

## 8 位移和微转动的幅值

本节,讨论对称模态和斜对称模态平面波,位移分量和微转动幅值的计算.利用方程(19)、(20)和方程组(22)~(27),有

$$\begin{aligned} (u_r)_{\text{sym}} &= - \left\{ \xi \cos m_1 z + L m_2 \cos m_2 z + M m_3 \cos m_3 z \right\} A J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (u_r)_{\text{asym}} &= - \left\{ \xi \sin m_1 z + L' m_2 \sin m_2 z + M' m_3 \sin m_3 z \right\} B J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (u_z)_{\text{sym}} &= - \left\{ m_1 \sin m_1 z - \xi (L \sin m_2 z + M \sin m_3 z) \right\} A J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (u_z)_{\text{asym}} &= \left\{ m_1 \cos m_1 z - \xi (L' \cos m_2 z + M' \cos m_3 z) \right\} B J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (\phi_0)_{\text{sym}} &= \delta^2 \left\{ (\beta^2 - m_2^2) \cos m_2 z - (\beta^2 - m_3^2) \frac{f_2 m_2 s_2}{f_3 m_3 s_3} \cos m_3 z \right\} C J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (\phi_0)_{\text{asym}} &= \delta^2 \left\{ (\beta^2 - m_2^2) \sin m_2 z - (\beta^2 - m_3^2) \frac{f_2 m_2 c_2}{f_3 m_3 c_3} \sin m_3 z \right\} C J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L &= - \frac{P^2 T_1^{-1} - Q^2 m_1 m_3 T_3^{-1}}{PQ(m_2 T_2^{-1} - m_3 T_3^{-1})} \frac{s_1}{s_2}, \quad M = - \frac{Q^2 m_1 m_2 T_2^{-1} - P^2 T_1^{-1}}{PQ(m_2 T_2^{-1} - m_3 T_3^{-1})} \frac{s_1}{s_3}, \\ L' &= \frac{Q^2 m_1 m_3 T_3 - P^2 T_1}{PQ(m_2 T_2 - m_3 T_3)} \frac{c_1}{c_2}, \quad M' = \frac{P^2 T_1 - Q^2 m_1 m_2 T_2}{PQ(m_2 T_2 - m_3 T_3)} \frac{c_1}{c_3}, \\ T_i &= \tanh m_i d, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

## 9 算例

通过对前面得到的理论结果的分析,给出一些数值结果.为此,材料选用镁晶体(微极弹性固体),其物理参数如下:

$$\begin{aligned} \rho &= 1.74 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \lambda = 9.4 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \mu = 4.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ K &= 1.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \gamma = 0.779 \times 10^9 \text{ N}, \quad j = 0.2 \times 10^{19} \text{ m}^2, \quad d = 0.01 \text{ m}. \end{aligned}$$

根据特征方程(29),计算对称和斜对称模态传播波在各种无量纲波数下相对应的相速度.不同模态( $n = 0$ 到 $n = 6$ )下对应的相速度的数值计算结果示于图1和图2.实曲线代表微极弹性板(MEP),虚曲线代表弹性板(EP).对称和斜对称模态的位移和微转动分量幅值的数值计算结果示于图3~图8.

最低阶对称模态( $n = 0$ )的相速度并不随波数变化,而保持为常数;反之,最低阶斜对称

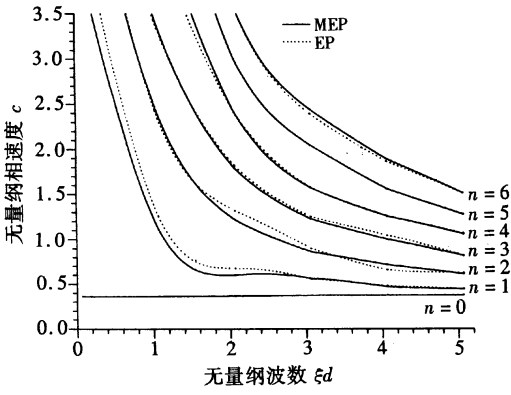


图 1 对称模式传播波的相速度剖面

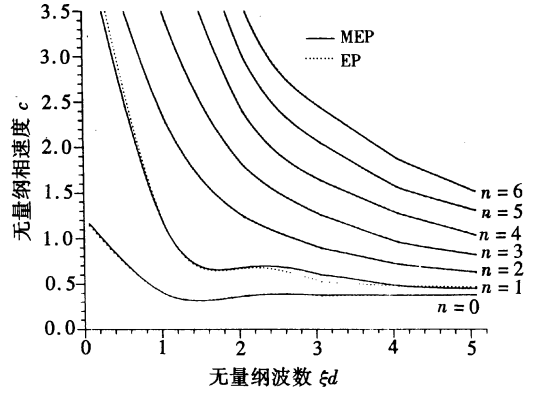


图 2 斜对称模式传播波的相速度剖面

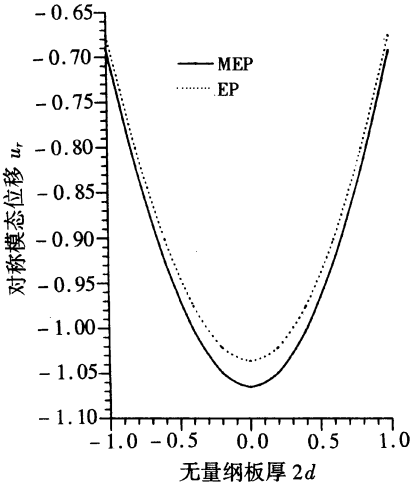


图 3 对称模式下位移  $u_r$  的幅值

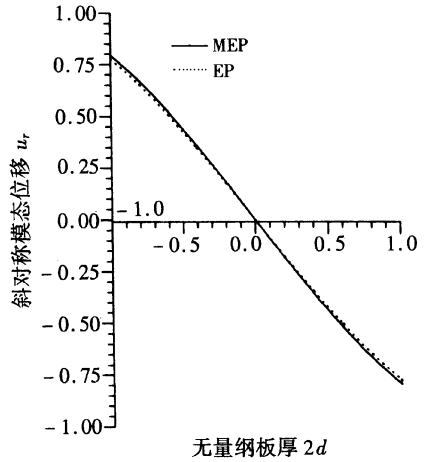


图 4 斜对称模式下位移  $u_r$  的幅值

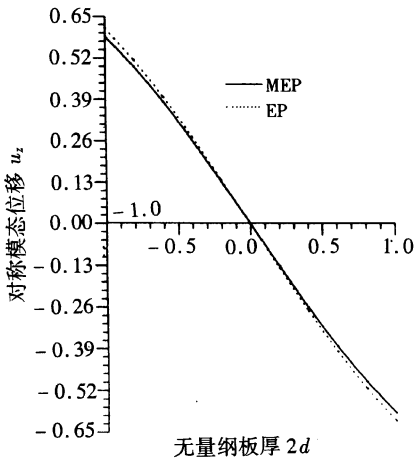


图 5 对称模式下位移  $u_z$  的幅值

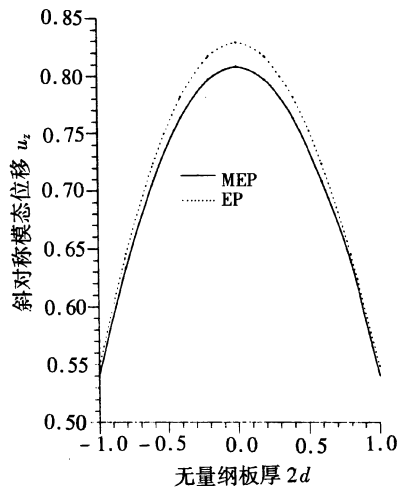


图 6 斜对称模式下位移  $u_z$  的幅值

模式的相速度在低波数段是变化的, 在高波数段达到常数。以高阶模式传播波时, 无论是对称模式还是非对称模式, 当波数接近于 0 时, 相速度很快达到一个相当大的值, 随着波数的增大,

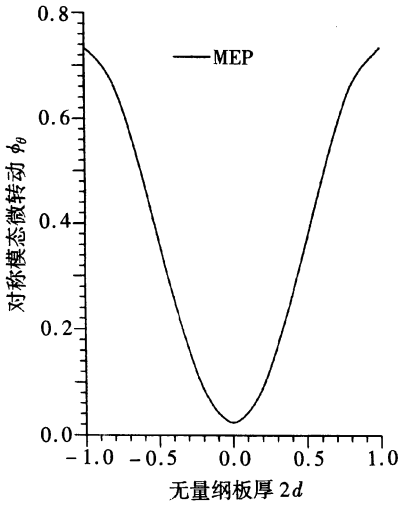


图7 对称模式下微转动  $\phi_0$  的幅值

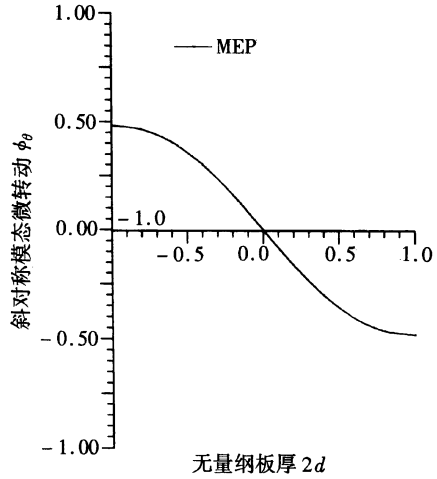


图8 斜对称模式下微转动  $\phi_0$  的幅值

相速度急剧下降后逐渐变得平稳。由此可见,不同阶模式下波传播的相速度,在接近零波数时达到大值,并呈现很强频散现象,然后趋于平稳,在高波数时达到材料的微极 Reyleigh 波速。这一渐近特性,究其原因在于,对于短波长(或高频)而言,材料板有如厚板一样,使上下界面间的耦合减弱,从而使对称和斜对称波的性质变得越来越相似。

还可看出,  $n = 1$  的对称模式:当波数  $\xi d \leq 3$  时,微极弹性板(MEP)的相速度小于弹性板(EP);当波数  $\xi d \geq 3$  时,MEP 的相速度与 EP 的相速度几乎相同。 $n = 2$  的对称模式:当波数在 1.5 ~ 3.0 时,EP 的相速度较 MEP 的相速度大;而当波数为  $\xi d \leq 1.5$  和  $\xi d \geq 3$  时,EP 和 MEP 的相速度剖面图重合。高阶对称模式( $n = 4$ ):当波数  $\xi d \geq 2.0$  时,MEP 和 EP 的相速度剖面图重合;而当  $\xi d \leq 2.0$  时,EP 的相速度值较小。 $n = 3, 5, 6$  的对称模式,EP 和 MEP 的相速度剖面图重合。

对斜对称模式传播波,我们发现:(a) 对  $n = 1$ , 波数  $\xi d \leq 1$  时,EP 中的相速度大于 MEP 中的相速度;而波数为 1.0 ~ 2.0 时,MEP 和 EP 中的相速度几乎相同;波数为 2.0 ~ 4.0 时,MEP 的相速度大于 EP 的相速度;波数  $\xi d \geq 4.0$  时,两者几乎相同。(b) 模数  $n = 0, 2, 3, 4, 5, 6$  时,MEP 和 EP 中的相速度重合。

图3~图6示出了对称和斜对称模式下,微极弹性板(MEP)和弹性板(EP)位移  $u_r$  和  $u_z$  的变化情况。在对称模式下,板中心位移  $u_r$  出现极小值,而在板表面出现极大值;在斜对称模式下,板中心  $u_r$  为 0,板表面为极大值(见图3和图4)。在图5和图6中,对称模式板中心的位移  $u_z$  为 0,板表面的位移  $u_z$  为极大值;斜对称模式板中心的位移  $u_z$  为极大值,板表面的位移  $u_z$  为极小值。图7和图8示出了对称和斜对称模式下微极弹性板(MEP)微转动  $\phi_0$  的变化情况。可以看出,对称模式板中心的微转动  $\phi_0$  为极小值,板表面的微转动  $\phi_0$  为极大值;斜对称模式板中心的微转动  $\phi_0$  为 0,板表面的微转动为极大值。 $(u_r)_{sym}、(u_r)_{asym}、(u_z)_{sym}、(u_z)_{asym}、(\phi_0)_{sym}、(\phi_0)_{asym}$  分别表示  $u_r、u_z、\phi_0$  的对称和斜对称模式下的数值。可以看出: $(u_r)_{asym}$  和  $(u_z)_{sym}$  的情况和变化趋势相似, $(u_r)_{sym}$  和  $(u_z)_{asym}$  正好相反。对称和斜对称模式下,弹性板(EP)的  $u_z$  值较微极弹性板(MEP)大。对称模式下,弹性板(EP)的位移  $u_r$  值较微极弹性板(MEP)大;而在斜对称模式下,弹性板的位移  $u_r$  值较微极弹性板小。



## 10 结 论

本文研究了无限大、均匀、各向同性、圆柱形微极结构弹性板中, 环形峰波的传播, 并导出了特征方程。注意到, 环形峰波的运动满足 Rayleigh\_Lamb 型特征方程。还探讨了特征方程的适合区域。对短波这一极端情况来说, 对称和斜对称模态传播波的特征方程和无应力圆板中传播波一样, 可以简化为 Rayleigh 表面频率方程。这是因为, 这种情况下有限厚度的板可视为半空间, 并且振动能量沿板的表面传播。当横波波长相对于板的厚度大得多时, 在区域 I 和区域 II 出现了有趣的结果。在区域 I 中, 斜对称模态的特征方程属于挠曲振动, 在整个频谱中, 只需要在有限频域中用单个振动模态来描述。区域 II 中对称模态的特征方程, 其相速度表达式归结为薄板的相速度, 或者归结为板应力的模拟量, 即纵杆理论(也与微极效应有关)的杆速度。作为一个特例可得到 Graff<sup>[19]</sup>的结果。

### [参 考 文 献]

- [1] Eringen A C. Linear theory of micropolar elasticity[J]. J Math Mech, 1966, **15**(6): 909—923.
- [2] Eringen A C. Theory of micropolar fluids[J]. J Math Mech, 1966, **16**: 1—18.
- [3] Eringen A C. Non Local Polar Field Theories in Continuum Physics [M]. New York: Academic Press, 1976, 205—267.
- [4] Eringen A C. Microcontinuum Field Theories, Foundations and Solids [M]. New York: Springer-Verlag, Inc, 1999.
- [5] Eringen A C. Microcontinuum Field Theories, Fluent Media [M]. New York: Springer-Verlag, Inc, 2001.
- [6] Eringen A C. Nonlocal Continuum Field Theories [M]. New York: Springer-Verlag, Inc, 1999.
- [7] Nowacki W, Nowacki W K. Generation of waves in an infinite micropolar elastic solids I, II [J]. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Techn, 1969, **17**(2): 75—81, 83—89.
- [8] Bannerji D K, Sengupta P R. Micropolar elastic waves in a cylindrical bore containing a fluid I, II [J]. Bull Acad Polon Sci Ser Sci Techn, 1977, **25**: 257—262, 263—270.
- [9] Rao K M, Rao B K. Longitudinal wave propagation in a micropolar wave guide of circular cross-section [J]. Lett Appl Engng Sci, 1983, **21**(9): 1137—1144.
- [10] Rao K M. Longitudinal wave propagation in a micropolar wave guide [J]. Internat J Engng Sci, 1988, **26**(2): 135—144.
- [11] Rao K M, Reddy M P. Rayleigh type wave propagation on a micropolar cylindrical surface [J]. J Appl Mech, 1993, **60**: 857—865.
- [12] Kumar R, Singh B. Wave propagation in a micropolar generalized thermoelastic body with stretch [J]. Proc Indian Acad Sci, Math Sci, 1996, **106**: 183—199.
- [13] Kumar R, Deswal S. Wave propagation through cylindrical bore contained in a microstretch elastic medium [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, **250**: 711—722.
- [14] Kumar R, Tomer S K. Elastic wave propagation in a cylindrical bore situated in a micropolar elastic medium with stretch [J]. Proc Indian Acad Sci, Math Sci, 1999, **109**: 425—433.
- [15] Kumar R, Choudhary S. Response of orthotropic micropolar elastic medium due to time harmonic source [J]. Sadhana, 2004, **29**(1): 83—92.
- [16] Kumar R, Ailawalia P. Effects of viscosity with moving load at micropolar boundary surface [J]. Internat J Appl Mech Engrg, 2005, **10**(1): 95—108.

- [17] Eringen A C. Theory of micropolar elasticity [A]. In: Leibowitz H, Ed. Fracture [C]. Vol II, New York : Academic Press, 1968.
- [18] Lamb H. On waves in an elastic plate [J]. Phil Trans Roy Soc, London, Ser A, 1917, **93**: 114—128.
- [19] Graff K F. Wave Motion in Elastic Solids [M]. New York: Dover Publications, Inc 1991.

## Rayleigh Lamb Waves in a Micropolar Isotropic Elastic Plate

Rajneesh Kumar<sup>1</sup>, Geeta Partap<sup>2</sup>

( 1. Department of Mathematics, Kurukshetra University,  
Kurukshetra 136119, Haryana, India ;

2. Department of Applied Mathematics, Dr. B. R. Ambedkar  
National Institute of Technology, Jalandhar 144011, Punjab, India )

**Abstract:** The propagation of waves in a homogeneous isotropic micropolar elastic cylindrical plate subjected to stress free conditions is investigated. The secular equations for symmetric and skew symmetric wave mode propagation were derived. At short wave limit, the secular equations for symmetric and skew symmetric waves in a stress free circular plate reduces to Rayleigh surface wave frequency equation. Thin plate results are also obtained. The amplitude of displacements and microrotation components are obtained and depicted graphically. Some special cases are also deduced from the present investigations. The secular equations for symmetric and skew symmetric modes are also presented graphically.

**Key words:** micropolar elastic plate; circular crested waves; secular equations; phase velocity; amplitudes