文章编号: 1000_0887(2006) 08_0931_09　

关于溢额损失再保险的条件分布的递推方程*

杨静平[1]，王晓谦[2]，程士宏[1]

(1. 北京大学 数学与应用数学实验室, 北京大学 数学学院, 北京 100871;
2. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 南京 210046)

(郭懋正推荐)

摘要: 在索赔数目服从 Poisson 分布、二项分布或负二项分布, 以及索赔额分布的密度函数连续且有界的条件下, 研究了溢额损失再保险条款的总体损失分布的条件递推方程• 在再保险人或分出人的索赔数目给定的条件下, 得到了再保险人以及分出人的总赔付额分布的递推方程•

关键词: Panjer 递推; Poisson 分布; 二项分布; 负二项分布; 溢额损失再保险
中图分类号: O213.9　文献标识码: A

1 引言和内容介绍

一个同质的保单组, 在一个固定的时间段内的理赔次数记为 N, 记 $X_1, X_2, \cdots$ 为理赔额序列• 本文假设 X_i, $i = 1, 2, \cdots$ 为独立同分布的序列(i. i. d.), 具有分布函数 F, 并假设序列 X_i, $i = 1, 2, \cdots$ 与理赔次数 N 独立•

考虑一个溢额损失再保险条款• 对于每笔索赔额, 再保险人赔付超过自留额 d 以上的超额部分, 这样再保险人总的赔付额可表示为

$$S_R = \sum_{i=1}^{N}(X_i - d)_+ ,$$

因此分出人支付的总索赔额为

$$S_C = \sum_{i=1}^{N}X_i \wedge d•$$

记 $N_R(d)$ 为再保险人赔付的保单数目, $N_C(d)$ 为只由分出人赔付的保单数目, 则有

$$N_R(d) = \sum_{i=1}^{N}I\left\{X_i > d\right\},\quad N_C(d) = \sum_{i=1}^{N}I\left\{X_i \leqslant d\right\},$$

且有 $\quad N_R(d) + N_C(d) = N•$

关于 (S_R, S_C) 的联合分布的递推方程的研究, 文献[1] 在索赔额分布 F 离散的条件下得到了递推方程, 文献[2] 讨论了 F 连续的情况• 进一步的, 如果已知索赔的数目, 则可以对再保险人和分出人的总赔付额提供进一步的信息• 因此, 本文在索赔次数 $N_C(d)$ 或 $N_R(d)$ 给定的

* 收稿日期: 2004_09_24; 修订日期: 2006_04_26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471008; 19831020)
作者简介: 杨静平, 博士, 副教授(联系人. E_mail: yangjp@math.pku.edu.cn);
王晓谦, 博士, 副教授;
程士宏, 教授•

条件下, 讨论(S_R, S_C)的边缘分布的递推方程•

本文在下面的假设下来讨论•

假设 A1 索赔额分布函数$F(x)$具有连续有界的密度函数$f(x)$;

假设 A2 对某参数(a, b), 索赔次数N属于$R_1(a, b)$_族, 即$p_n = P\{N = n\}$满足

$$p_n = p_{n-1}(a + b/n), \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

记为$N \sim R_1(a, b)$•

在精算学中, 常使用连续分布来拟合实际损失数据, 故假设 A1 是有实际背景的假设• $R_1(a, b)$_族是在实际中常使用的分布族, $R_1(a, b)$_族包括 Poisson、二项和负二项分布[3], 其中在汽车险中常使用 Poisson 分布和负二项分布[4]• 为简单计, 假设自留额d是一个整数•

在前面的假设下, 本文讨论在给定$N_C(d)$或$N_R(d)$的条件下(S_R, S_C)的边缘分布的递推方程• 本文结构如下: 在第 2 节给出本文的主要结果, 定理的证明在第 3 节给出•

2 主 要 结 果

对在前一节定义的向量$(N_R(d), N_C(d))$, 有

$$p(j, n) := P\{N_R(d) = j, N_C(d) = n\} = p_{n+j} C_{n+j}^{j} F(d)^n (1 - F(d))^j, \quad j \geqslant 0, n \geqslant 0•$$

记
$$p^{(1)}(j) := P\{N_R(d) = j\} = \sum_{n=0}^{\infty} p(j, n)$$

以及
$$p^{(2)}(n) := P\{N_C(d) = n\} = \sum_{j=0}^{\infty} p(j, n)•$$

这里 $Z =: \{0, 1, 2 \cdots\}$•

已知$N_C(d)$的条件下, 可以得到下面的定理 1•

定理 1 已知假设 A1 和假设 A2 成立, 且$P\{N_C(d) = n\} > 0$• 则

(a) 给定$N_C(d) = n$的条件下, 在$y > 0$时S_R的密度函数$f_{S_R | N_C(d) = n}(y)$存在, 且满足

$$(1 - F(d)) f_{S_R | N_C(d) = n}(y) = \frac{p(1, n)}{p^{(2)}(n)} f(y + d) + (1 - F(d)) \int_0^y \left(a + \frac{(b + an)u}{y} \right) f(u + d) f_{S_R | N_C(d) = n}(y - u) \mathrm{d}u• \tag{1}$$

同时, S_R在零点有概率

$$P\{S_R = 0 | N_C(d) = n\} = [p(0, n)] / [p^{(2)}(n)]•$$

对于$n \geqslant 2$, 函数$f_{S_R | N_C(d) = n-1}$可由$f_{S_R | N_C(d) = n}$通过下面的方程计算得到:

$$(1 - a(1 - F(d))) f_{S_R | N_C(d) = n-1}(y) = f_{S_R | N_C(d) = n}(y) - a \int_0^y f_{S_R | N_C(d) = n}(y - u) f(u + d) \mathrm{d}u - a \frac{p(0, n)}{p^{(2)}(n)} f(y + d), \qquad y > 0• \tag{2}$$

(b) 假设$n \geqslant 2$• 在条件$N_C(d) = n$下, S_C的概率密度函数$f_{S_C | N_C(d) = n}(z), z > 0$存在• 对于$z \neq md, m \in Z$, $f_{S_C | N_C(d) = n}(z) - a(1 - F(d)) f_{S_C | N_C(d) = n}(z - d)$可由$f_{S_C | N_C(d) = n-1}$通过下面的递推关系得到:

$$f_{S_C | N_C(d) = n}(z) = a(1 - F(d)) f_{S_C | N_C(d) = n}(z - d) + \frac{1 - a(1 - F(d))}{F(d)} \int_0^{z \wedge d} f_{S_C | N_C(d) = n-1}(z - s) f(s) \mathrm{d}s• \tag{3}$$

定理 1 表明, 给定$N_C(d) = n$的条件下, S_C和S_R的密度函数$f(s)/F(d)$都在$(0, \infty)$上

存在, 且零点是 S_R 的原子点. 式(2) 和(3) 给出了不同条件之间的递推关系, 式(2) 说明 $f_{S_R|N_C(d)=n-1}(y), y>0$ 可由 $f_{S_R|N_C(d)=n}(y), y>0$ 计算得到, 式(3) 说明已知函数 $f_{S_R|N_C(d)=n-1}$ 时, 可以计算得到 $f_{S_R|N_C(d)=n}(y)-a(1-f(d))f_{S_R|N_C(d)=n}(y-d)$.

注 密度函数 $f_{S_C|N_C(d)=n}(z)$ 在点 $z=md, m\in Z$ 可能不连续.

给定 $N_R(d)$ 的条件下, 我们有下面的结果:

定理 2 已知假设 A1 和假设 A2 成立, 且 $P\left\{N_R(d)=j\right\}>0$.

(a) 在条件 $N_R(d)=j$ 下, 当 $z>jd$ 时 S_C 的概率密度函数 $f_{S_C|N_R(d)=j}(z)$ 存在, 且对 $z>jd, z\neq md, m\in Z$, 满足递推方程

$$f_{S_C|N_R(d)=j}(z)=\int_0^{(z-jd)\wedge d}\left(a+\frac{(b+aj)s}{z-jd}\right)f(s)f_{S_C(d)|N_R(d)=j}(z-s)\,\mathrm{d}s+\frac{p(j,1)}{F(d)p^{(1)}(j)}f(z-jd)I\left\{z<(j+1)d\right\}. \tag{4}$$

S_C 在点 jd 有概率

$$P\left\{S_C=jd\mid N_R(d)=j\right\}=[p(j,0)]/[p^{(1)}(j)];$$

(b) 设 $j\geqslant 2$. 则函数 $f_{S_C|N_R(d)=j-1}$ 可由函数 $f_{S_C|N_R(d)=j}$ 通过下面的方式递推得到:

$$\begin{aligned}(1-aF(d))f_{S_C|N_R(d)=j-1}(z-d)=&\\ f_{S_C|N_R(d)=j}(z)-aF(d)\int_0^{(z-dj)\wedge d}&f_{S_C|N_R(d)=j}(z-s)f(s)\,\mathrm{d}s-\\ ap_j(1-F(d))^jf(z-jd)I&\left\{z<(j+1)d\right\}/p^{(1)}(j),\end{aligned} \tag{5}$$

其中, $z>jd$ 且 $z\neq md, m\in Z$.

当 $N_R(d)=j$ 时, 易知 $S_C\geqslant jd$ 成立. 根据定理 2, S_C 的密度函数在区间 (jd,∞) 存在, 且 jd 为 S_C 的原子点. 式(5) 给出 $N_R(d)$ 在不同条件下的递推关系.

可将定理 1~ 定理 3 的结果所蕴涵的关系整理为表 1 和表 2. 变量的密度函数存在的区间以及原子点在表 1 中给出, 表 2 中总结了不同给定条件下的函数之间的递推关系.

表 1 密度存在区间及原子点 $(j\geqslant 1, n\geqslant 1)$

变量及条件	密度函数存在区间	原子点	原子点概率
$S_R\mid N_C(d)=n$	$(0,\infty)$	0	$[p(0,n)]/[p^{(2)}(n)]$
$S_C\mid N_C(d)=n$	$[0,\infty)$	无	—
$S_R\mid N_R(d)=j$	$[0,\infty)$	无	—
$S_C\mid N_R(d)=j$	(jd,∞)	jd	$[p(j,0)]/[p^{(1)}(j)]$

表 2 二元递推关系 $(j\geqslant 2, n\geqslant 2)$

变量及条件	欲计算的值	递推计算中所需要的函数值
$S_R\mid N_C(d)$	$f_{S_R\mid N_C(d)=n-1}(y)$	$f_{S_R\mid N_C(d)=n}(s), s\leqslant y$
$S_C\mid N_C(d)$	$f_{S_C\mid N_C(d)=n}(z)$	$f_{S_C\mid N_C(d)=n-1}(s), s<z; f_{S_C\mid N_C(d)=n}(z-d)$
$S_C\mid N_R(d)$	$f_{S_C\mid N_R(d)=j-1}(z-d)$	$f_{S_R\mid N_R(d)=j}(s), z-d\leqslant s\leqslant z$
$S_R\mid N_R(d)$	$f_{S_R\mid N_R(d)=n}(y)$	$f_{S_R\mid N_R(d)=n-1}(s), s\leqslant y$

3 定理的证明

假 $\left\{Y(d), Y_i(d), i\geqslant 1\right\}$ 和 $\left\{Z(d), Z_i(d), i\geqslant 1\right\}$ 为两个独立同分布的随机变量列, 且两

个序列分别独立于索赔数目 $N_R(d)$ 和 $N_C(d)$. 假设序列 $\{Y(d), Y_i(d), i \geqslant 1\}$ 与 $\{Z(d), Z_i(d), i \geqslant 1\}$ 也彼此独立. 令 $Y(d)$ 的分布函数为

$$P\{Y(d) \leqslant y\} = \frac{F(d+y)-F(d)}{1-F(d)}, \qquad y \geqslant 0,$$

$Z(d)$ 的分布为

$$P\{Z(d) \leqslant z\} = \frac{F(d \wedge z)}{F(d)}, \qquad z \geqslant 0.$$

在假设 A1 下, 知 $Y(d)$ 的密度函数为

$$f_{Y(d)}(x) = \frac{f(x+d)}{1-F(d)}, \qquad x > 0,$$

$Z(d)$ 的密度函数为

$$f_{Z(d)}(x) = \frac{f(x)I_{\{x \leqslant d\}}}{F(d)}, \qquad x > 0.$$

引理 1 对于自留额为 d 的溢额损失再保险, 有

$$(S_R, S_C, N_R(d), N_C(d)) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{N_R(d)} Y_i(d), \sum_{i=1}^{N_C(d)} Z_i(d) + dN_R(d), N_R(d), N_C(d)\right).$$

引理 1 的证明见文献[2].

当索赔数目 N 属于 R_1_族时, 可以证明 $N_R(d)$ 和 $N_C(d)$ 也属于 R_1_族.

引理 2 假设 $N \sim R_1(a, b)$. 则

1) 对 $p(j, n)$ 下面的递推方程成立:

$$p(j, n) = (1-F(d))\left(a + \frac{b}{j}\right)p(j-1, n) + aF(d)p(j, n-1),$$
$$j > 0, n \geqslant 0; \tag{6}$$

$$p(j, n) = F(d)\left(a + \frac{b}{n}\right)p(j, n-1) + a(1-F(d))p(j-1, n),$$
$$n > 0, j \geqslant 0. \tag{7}$$

2) $N_R(d)$ 和 $N_C(d)$ 满足

$$N_R(d) \sim R_1\left(\frac{a(1-F(d))}{1-aF(d)}, \frac{b(1-F(d))}{1-aF(d)}\right), \tag{8}$$

$$N_C(d) \sim R_1\left(\frac{aF(d)}{1-a(1-F(d))}, \frac{bF(d)}{1-a(1-F(d))}\right), \tag{9}$$

$$N_C(d) \mid N_R(d) = j \sim R_1(aF(d), (b+aj)F(d)), \tag{10}$$

$$N_R(d) \mid N_C(d) = n \sim R_1(a(1-F(d)), (b+an)(1-F(d))). \tag{11}$$

引理 2 的证明 易于验证

$$P\{N_R(d) = j \mid N_R(d) + N_C(d) = n\} = C_n^j(1-F(d))^j F(d)^{n-j}.$$

这样, $(N_R(d), N_C(d))$ 属于文献[5]所讨论的模型 A, 利用文献[5]中的定理 2.1 和定理 2.3 可得到本引理.

下面我们证明定理 1.

定理 1 的证明

(a) 在假设 A1 和假设 A2 下, 由引理 2 知式(11)成立, $Y(d)$ 连续且密度函数为 $f_{Y(d)}$. 应用引理 1 和文献[6] 的递推公式, 知条件密度函数 $f_{S_R \mid N_C(d)=n}(y)$, $y > 0$ 存在, 且满足

$$f_{S_R \mid N_C(d)=n}(y) = \frac{p(1, n)}{p^{(2)}(n)} f_{Y(d)}(y) + \int_0^y \Big(a(1-F(d)) +$$

$$\frac{(b+an)(1-F(d))u}{y}\Bigg)f_{Y(d)}(u)f_{S_R|N_C(d)=n}(y-u)\mathrm{d}u=$$
$$\frac{p(1,n)}{p^{(2)}(n)}\frac{f(y+d)}{1-F(d)}\int_0^y\left(a+\frac{(b+an)u}{y}\right)f(u+d)f_{S_R|N_C(d)=n}(y-u)\mathrm{d}u,$$

故式(1)成立.

由于 $P\{Y(d)=0\}=0$, 利用引理 1 可得

$$P\{S_R=0|N_C(d)=n\}=P\left\{\sum_{i=1}^{N_R(d)}Y_i(d)=0|N_C(d)=n\right\}=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{p(i,n)}{p^{(2)}(n)}P\{Y(d)=0\}^i=\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}.$$

进一步的, 概率密度函数 $f_{S_R|N_C(d)=n}(y)$, $y>0$ 可被表示为

$$f_{S_R|N_C(d)=n}(y)=\sum_{m=1}^{\infty}p(m,n)\frac{f_{Y(d)}^{*(m)}(y)}{p^{(2)}(n)}. \tag{12}$$

利用下式代替(12)中的 $p(m,n)$,

$$p(m,n)=F(d)\left(a+\frac{b}{n}\right)p(m,n-1)+a(1-F(d))p(m-1,n),$$

则有

$$f_{S_R|N_C(d)=n}(y)=\sum_{m=1}^{\infty}\Bigg\{F(d)\left(a+\frac{b}{n}\right)p(m,n-1)+$$
$$a(1-F(d))p(m-1,n)\Bigg\}\frac{f_{Y(d)}^{*(m)}(y)}{p^{(2)}(n)}=$$
$$F(d)\left(a+\frac{b}{n}\right)\sum_{m=1}^{\infty}p(m,n-1)\frac{f_{Y(d)}^{*(m)}(y)}{p^{(2)}(n)}+$$
$$a(1-F(d))\sum_{m=1}^{\infty}p(m-1,n)\frac{f_{Y(d)}^{*(m)}(y)}{p^{(2)}(n)}=$$
$$F(d)\left(a+\frac{b}{n}\right)\sum_{m=1}^{\infty}p(m,n-1)\frac{f_{Y(d)}^{*(m)}(y)}{p^{(2)}(n)}+$$
$$a(1-F(d))\sum_{m=1}^{\infty}p(m,n)\frac{f_{Y(d)}^{*(m+1)}(y)}{p^{(2)}(n)}+$$
$$a(1-F(d))p(0,n)\frac{f_{Y(d)}(y)}{p^{(2)}(n)}. \tag{13}$$

将式(12)中的 n 变为 $n-1$,

$$f_{S_R|N_C(d)=n-1}(y)=\sum_{m=1}^{\infty}p(m,n-1)\frac{f_{Y(d)}^{*(m)}(y)}{p^{(2)}(n-1)}.$$

然后再利用式(12)和上面的式子, 式(13)可化简为

$$f_{S_R|N_C(d)=n}(y)=F(d)\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{p^{(2)}(n-1)}{p^{(2)}(n)}f_{S_R|N_C(d)=n-1}(y)+$$
$$a(1-F(d))\int_0^y f_{S_R(d)|N_R(d)=n}(y-u)f_{Y(d)}(u)\mathrm{d}u+\frac{ap(0,n)f(y+d)}{p^{(2)}(n)}. \tag{14}$$

最后, 使用式(9)的一个等价表达式

$$\frac{p^{(2)}(n)}{p^{(2)}(n-1)}=\frac{F(d)}{1-a(1-F(d))}\left(a+\frac{b}{n}\right),\qquad n\geqslant 1,$$

式(14)可被表示为

$$f_{S_R|N_C(d)=n}(y)=(1-a(1-F(d)))f_{S_R|N_C(d)=n-1}(y)+$$

$$a(1-F(d))\int_0^y f_{S_R|N_C(d)=n}(y-u)f_{Y(d)}(u)\mathrm{d}u+\frac{ap(0,n)f(y+d)}{p^{(2)}(n)}=$$
$$(1-a(1-F(d)))f_{S_R|N_C(d)=n-1}(y)+$$
$$a\int_0^y f_{S_R|N_C(d)=n}(y-u)f(u+d)\mathrm{d}u+a\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}f(y+d),$$

故式(2)成立•

(b) 利用引理1以及 $Z_i(d)$, $i\geqslant 1$ 为连续随机变量, 有

$$P\left\{S_C=0\mid N_C(d)=n\right\}=P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)+dN_R(d)=0\mid N_C(d)=n\right\}=$$
$$P\left\{n=0,N_R(d)=0\mid N_C(d)=n\right\}=\frac{p_0}{p^{(2)}(n)}I\left\{n=0\right\}=0,\qquad n\geqslant 1•$$

进一步的,

$$P\left\{S_C\leqslant z\mid N_C(d)=n\right\}=P\left\{\sum_{i=1}^{N_C(d)}Z_i(d)+dN_R(d)\leqslant z\mid N_C(d)=n\right\}=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z-dk\right\}\frac{p(k,n)}{p^{(2)}(n)}=$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z-dk\right\}\frac{p(k,n)}{p^{(2)}(n)}+P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}•\tag{15}$$

由以上的等式可以得到当 $z\neq md$, $m=0,1,2,\cdots$时$f_{S_C|N_C(d)=n}(z)$ 存在, 且有

$$P\left\{S_C=z\mid N_C(d)=n\right\}=0,\qquad z=md,\ m=0,1,2,\cdots•$$

利用式(7), 整理(15)得到

$$P\left\{S_C\leqslant z\mid N_C(d)=n\right\}=\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z-dk\right\}\times$$
$$\frac{F(d)(a+b/n)p(k,n-1)+a(1-F(d))p(k-1,n)}{p^{(2)}(n)}+$$
$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}=$$
$$\frac{F(d)(a+b/n)p^{(2)}(n-1)}{p^{(2)}(n)}\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z-dk\right\}\frac{p(k,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}+$$
$$a(1-F(d))\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z-dk\right\}\frac{p(k-1,n)}{p^{(2)}(n)}+$$
$$P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}•\tag{16}$$

由

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z-dk\right\}\frac{p(k,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}Z_i(d)+Z_n(d)\leqslant z-dk\right\}\frac{p(k,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}-$$
$$\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}=$$
$$\int_0^{z-dk}f_{Z(d)}(s)\left(\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}Z_i(d)\leqslant z-dk-s\right\}\frac{p(k,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}\right)\mathrm{d}s-$$

$$\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}=$$

$$\int_0^z f_{Z(d)}(s)\left(\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\sum_{i=1}^{n-1}Z_i(d)\leqslant z-dk-s\right\}\frac{p(k,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}\right)\mathrm{d}s-$$

$$\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}=$$

$$\int_0^z P\left\{S_{\mathrm{C}}\leqslant z-s\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1\right\}f_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s-$$

$$\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\},$$

将上式代入式(16)中对应的项,并利用式(9),可得

$$P\left\{S_{\mathrm{C}}\leqslant z\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n\right\}=$$

$$(1-a(1-F(d)))\int_0^z P\left\{S_{\mathrm{C}}\leqslant z-s\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1\right\}f_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s-$$

$$(1-a(1-F(d)))\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}+$$

$$a(1-F(d))P\left\{S_{\mathrm{C}}\leqslant z-d\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n\right\}+P\left\{\sum_{i=1}^{n}Z_i(d)\leqslant z\right\}\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}=$$

$$(1-a(1-F(d)))\left\{\int_0^z P\left\{S_{\mathrm{C}}=0\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1\right\}f_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s+\right.$$

$$\left.\int_0^z\int_0^y f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1}(y-s)f_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}y\right\}+$$

$$a(1-F(d))P\left\{S_{\mathrm{C}}\leqslant z-d\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n\right\}+$$

$$\int_0^z f^{*(n)}_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s\left(\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}-(1-a(1-F(d)))\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}\right)\cdot \qquad (17)$$

将式(17)对 $z\neq md,\ m\in \mathrm{Z}=\{0,1,2,\dots\}$ 求导,再利用等式

$$\frac{p(0,n)}{p^{(2)}(n)}-(1-a(1-F(d)))\frac{p(0,n-1)}{p^{(2)}(n-1)}=0,$$

得到

$$f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n}(z)=$$

$$(1-a(1-F(d)))(P\left\{S_{\mathrm{C}}=0\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1\right\}f_{Z(d)}(z))+$$

$$(1-a(1-F(d)))\left(\int_0^z f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1}(z-s)f_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s\right)+$$

$$a(1-F(d))f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n}(z-d)\cdot$$

前面已证明了 $P\left\{S_{\mathrm{C}}=0\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1\right\}=0,\ n\geqslant 2$, 所以上面的等式可简化为

$$f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n}(z)=a(1-F(d))f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n}(z-d)+$$

$$(1-a(1-F(d)))\int_0^z f_{S_{\mathrm{C}}\mid N_{\mathrm{C}}(d)=n-1}(z-s)f_{Z(d)}(s)\mathrm{d}s,$$

式(3)成立•

定理2的证明

(a) 利用引理1,

$$P(S_{\mathrm{C}}\leqslant z\mid N_{\mathrm{R}}(d)=j)=P\left(\sum_{i=1}^{N_{\mathrm{C}}(d)}Z_i(d)+dN_{\mathrm{R}}(d)\leqslant z\mid N_{\mathrm{R}}(d)=j\right)=$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{N_C(d)} Z_i(d) \leqslant z - dj \mid N_R(d) = j\right).$$

因此对于 $z > jd$, 有

$$f_{S_C \mid N_R(d)=j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{Z(d)}^{*(n)}(z - jd)\frac{p(j,n)}{p^{(1)}(j)}. \tag{18}$$

根据引理 2,

$$N_C(d) \mid N_R(d) = j \sim R_1(aF(d), (b + aj)F(d)),$$

再利用文献[6]的结果, 可得

$$f_{S_C \mid N_R(d)=j}(z) = \int_0^{z-jd}\left(aF(d) + \frac{(b+aj)F(d)s}{z-jd}\right)\times$$

$$f_{Z(d)}(s) f_{S_C(d)\mid N_R(d)=j}(z-s)\mathrm{d}s + \frac{p(j,1)}{p^{(1)}(j)} f_{Z(d)}(z-jd) =$$

$$\int_0^{(z-jd)\wedge d}\left(a + \frac{(b+aj)s}{z-jd}\right) f(s) f_{S_C(d)\mid N_R(d)=j}(z-s)\mathrm{d}s +$$

$$\frac{p(j,1)}{F(d)p^{(1)}(j)} f(z-jd) I\left\{z < (j+1)d\right\},$$

式(4)成立.

由于 $P\left\{Z(d) = 0\right\} = 0$, 所以有

$$P(S_C = dj \mid N_R(d) = j) = P\left(\sum_{i=1}^{N_C(d)} Z_i(d) = 0 \mid N_R(d) = j\right) =$$

$$P(N_C(d) = 0 \mid N_R(d) = j) = \frac{p(j,0)}{p^{(1)}(j)}.$$

(b) 利用等式(18)以及引理 2 中的 $p(j,n)$ 的递推关系, 对 $z > jd$ 有

$$f_{S_C \mid N_R(d)=j}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{Z(d)}^{*(n)}(z-jd)\frac{p(j,n)}{p^{(1)}(j)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(1-F(d))\left(a + \frac{b}{j}\right)p(j-1,n) +\right.$$

$$\left. aF(d)p(j,n-1)\right\}\frac{f_{Z(d)}^{*(n)}(z-jd)}{p^{(1)}(j)} =$$

$$(1-F(d))\left(a + \frac{b}{j}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(j-1,n)f_{Z(d)}^{*(n)}(z-jd)}{p^{(1)}(j)} +$$

$$aF(d)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(j,n)f_{Z(d)}^{*(n+1)}(z-jd)}{p^{(1)}(j)} =$$

$$(1-F(d))\left(a + \frac{b}{j}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(j-1,n)f_{Z(d)}^{*(n)}(z-jd)}{p^{(1)}(j)} +$$

$$aF(d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p(j,n)f_{Z(d)}^{*(n+1)}(z-jd)}{p^{(1)}(j)} + \frac{aF(d)p(j,0)f_{Z(d)}(z-jd)}{p^{(1)}(j)} =$$

$$(1-F(d))\left(a + \frac{b}{j}\right)\frac{p^{(1)}(j-1)}{p^{(1)}j} f_{S_C \mid N_R(d)=j-1}(z-d) +$$

$$aF(d)\int_0^{z-jd} f_{S_C(d)\mid N_R(d)=j}(z-u) f_{Z(d)}(u)\mathrm{d}u +$$

$$ap_j(1-F(d))^j f(z-jd) I\left\{z \leqslant (j+1)d\right\} / p^{(1)}(j). \tag{19}$$

式(8)即为

$$\frac{p^{(1)}(j)}{p^{(1)}(j-1)}=\frac{1-F(d)}{1-aF(d)}\left(a+\frac{b}{j}\right),$$

所以式(19)可简化为

$$f_{S_C|N_R(d)=j}(z)=(1-aF(d))f_{S_C|N_R(d)=j-1}(z-d)+ a\int_0^{(z-jd)\wedge d} f_{S_C(d)|N_R(d)=j}(z-u)f(u)\mathrm{d}u+ ap_j(1-F(d))f^{j*}(z-jd)I_{\langle z\leqslant(j+1)d\rangle}/p^{(1)}(j),$$

整理可得式(5)•

[参 考 文 献]

[1] Sundt B. On multivariate panjer recursions[J]. Astin Bulletin, 1999, **29**(1): 29—45.

[2] YANG Jing_ping, CHENG Shi_hong, WANG Xiao_qian. Bivariate recursive equations on excess_of_loss reinsurance[J/OL]. Acta Mathematica Sinica, English Series. http://www.ActaMath.com/DOI: 10.10071510114_005_0722_2, 2006_04_02.

[3] Sundt B, Jewell W S. Further results of recursive evaluation of compound risk models[J]. Astin Bulletin, 1981, **12**(1): 27—39.

[4] Lemaire J. Bonus_Malus Systems in Automobile Insurance[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995.

[5] Hesselager O. Recursions for certain bivariate counting distributions and their compound distributions[J]. Astin Bulletin, 1996, **26**(1): 35—52.

[6] Panjer H H. Recursive evaluation of a family of compound distributions[J]. Astin Bulletin, 1981, **12**(1): 22—26.

Conditional Recursive Equations on Excess_of_Loss Reinsurance

YANG Jing_ping, WANG Xiao_qian, CHENG Shi_hong

(1. LMAM, School of Mathematical Sciences, Peking University, Bejing 100871, P.R.China;

2. School of Mathematical and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, P.R.China)

Abstract: The marginal recursive equations on excess_of_loss reinsurance treaty were investigated, under the assumption that the number of claims belongs to the family consisting of Poisson, binomial and negative binomial, and that the severity distribution had bounded continuous density function. On condition of the numbers of claims associated with the the reinsurer and the cedent, some recursive equations are obtained for the marginal distributions of the total payments of the reinsurer and the cedent.

Key words: Panjer recursion; Poisson distribution; binomial distribution; negative binomial distribution; excess_of_loss reinsurance