应用数学和力学,第 27 卷 第 8 期
2006 年 8 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 8, Aug. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 08_0971_07

阶梯矩阵及其一般化在迭代法中的应用*

邵新慧, 沈海龙, 李长军

(东北大学 理学院 数学系, 沈阳 110004)

(顾元宪 推荐)

摘要: Lu Hao 首先给出了阶梯矩阵及其一般性的定义和性质• 这类矩阵为迭代法提供了新矩阵分裂的基础• 基于此新矩阵类的迭代方法的显著特征是它对于并行计算很容易被实现• 应用这一新的分解方法,给出了一般的加速松弛方法(GAOR),而关于 AOR 方法的一些性质可以被延伸到该新方法中,并针对 Hermite 正定矩阵进行了新方法收敛性的分析• 最后,给出了一些例子来表明新方法的优越性•

关 键 词: 阶梯矩阵; 迭代法; 平行计算; 一般加速松弛方法(GAOR)
中图分类号: O242.26 文献标识码: A

引 言

令 $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇矩阵,分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$,其中 $\boldsymbol{M}$ 是一个非奇矩阵• 求解线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的迭代解法为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{Nx}^{(k)} + \boldsymbol{b}), \tag{1}$$

将矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 称之为迭代矩阵• 众所周知,迭代法(1) 收敛的充要条件为 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}) < 1$,其中 $\rho(\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}) < 1$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}$ 的谱半径• 不同的分解将产生不同的迭代解法• 非常著名的迭代方法有 Jacobi 方法, Gauss_Seide 方法, SOR 方法和 AOR 方法[1~3]• Jacobi 方法非常适合平行计算,但它的收敛速度却不如 Gauss_Seide 方法、SOR 方法和 AOR 方法• 适当地选择松弛因子及加速因子,AOR 方法将提高 Jacobi 方法、Gauss_Seide 方法和 SOR 方法的收敛速度,但 AOR 方法、Gauss_Seide 方法和 SOR 方法却不适合平行计算,这是因为在每步迭代中都将求解一个三角系统• 最近有文章给出了一种新的矩阵分解方法,且将其应用到 SOR 方法中,受其启发,本文将此分解方法应用到 AOR 方法中•

本文的目的是应用新的分解方法来构造一种新的迭代格式,使其具有 Jacobi 方法和 AOR 方法的全部优点• 新的迭代方法是基于阶梯矩阵及其一般化给出的,它是由 Lu Hao 在文献[4]中提出的• 然后针对线性系统的系数矩阵是各种特殊矩阵,即 L_矩阵、不可约对角占优矩阵、相容有序矩阵及 Hermite 正定矩阵,给出新迭代方法的收敛定理• 最后又通过例题显示了

---

* 收稿日期: 2004_06_28; 修订日期: 2005_12_27
基金项目: 辽宁省自然科学基金资助项目 (20022021)
作者简介: 邵新慧,女,山东人,讲师,博士生(联系人. Tel: + 86_24_83684881; E_mail: xinhui1002@126.com)•

新方法的优越性•

1 预备知识

在本节将回顾一下阶梯矩阵及一般化和 AOR 方法的主要结果, 以便在本文的证明中应用• 首先设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 表示一个 $n \times n$ 矩阵, 元素 a_{ij} 也可以是 $n_i \times n_j$ 分块矩阵• 一般情况下 a_{ij} 都表示元素, 如果想强调矩阵的元素是分块矩阵, 就用 A_{ij} 代替 a_{ij} 来表示第 (i, j) 元素•

下面回顾在文献[4]中给出的阶梯矩阵及其一般化的相关结果•

定义 1.1 一个三角矩阵 $A = \mathrm{tridiag}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1})$ 被叫做阶梯矩阵, 如果如下条件之一被满足:

(Ⅰ) $a_{i,i-1} = 0,\ a_{i,i+1} = 0,\ i = 1, 3, \cdots, 2[(n-1)/2] + 1$;

(Ⅱ) $a_{i,i-1} = 0,\ a_{i,i+1} = 0,\ i = 2, 4, \cdots, 2[n/2]$•

为了简便, 阶梯矩阵被记作 $A = \mathrm{stair}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1})$•

引理 1.1 一个 $n \times n$ 阶梯矩阵 $A = \mathrm{stair}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1})$ 是非奇的当且仅当 $a_{ii}, i = 1, 2, \cdots, n$ 均是非奇的• 如果 A 是非奇的, 则

$$A^{-1} = D^{-1}(2D - A)D^{-1},$$

其中 $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$•

阶梯线性系统 $Ax = b$ 可以通过算法得以求解[4]•

另外, Lu Hao 在文献[4]中还一般化了阶梯矩阵的定义• 设

$$L_n^1 = \left\{ A: A \text{ 为 } n \times n \text{ 矩阵且 } A = \mathrm{stair}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1}) \right\},$$
$$L_n^k = \left\{ A: A \text{ 为 } n \times n \text{ 矩阵且 } A = \mathrm{stair}(A_{i,i-1}, A_{ii}, A_{i,i+1}), \right.$$
$$\left. \text{其中 } A_{ii} \text{ 表示一个 } n_i \times n_i \text{ 矩阵, } A_{ii} \in L_{n_i}^r \text{ 且 } r < k \right\},$$

定义 $L_n \equiv L_n^n$•

定理 1.1 设 $A = (a_{ij})_{n\times n} \in L_n$• 则 $A^* \in L_n$, 其中 A^* 表示矩阵 A 的共轭转置矩阵, 且

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \det(A_{ii})• \tag{2}$$

如果 A 是非奇的, 则 $A^{-1} \in L_n$, 且

$$A^{-1} = D^{-1}(2D - A)D^{-1} = \mathrm{stair}(B_{i,i-1}, B_{ii}, B_{i,i+1}), \tag{3}$$

其中块 B_{ij} 由如下式子给出:

$$B_{ij} = \begin{cases} -A_{ii}^{-1}A_{ij}A_{jj}^{-1}, & \text{当 } j = i-1, i+1, \\ A_{ii}^{-1}, & \text{当 } j = i• \end{cases} \tag{4}$$

下面考虑一个有 n 个未知元 n 个线性方程的系统, 其矩阵形式为: $Ax = b$, 其中矩阵 A 有非零对角元素• 将矩阵 A 进行如下分解:

$$A \equiv D - A_L - A_U, \tag{5}$$

其中 D 是对角矩阵, A_L 和 A_U 分别为严格下三角和严格上三角矩阵• 求解线性系统 $Ax = b$ 的 AOR 方法 ($M_{r,\omega}$_方法) 为:

$$x^{(k+1)} = L_{r,\omega}x^{(k)} + (I - rL)^{-1}\omega D^{-1}b, \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_{r,\omega} = (\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} + (\omega - r)\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U}],$$
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}},\quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{U}}\cdot \tag{7}$$

将实参数 r 和 ω 分别叫做加速因子和松弛因子[1]•

应当指出, 除非 $r = 0$, 否则 AOR 方法实质上是带有松弛因子 r 和外推因子 $s = \omega/r$ 的外推SOR 方法, 且易知

$$\boldsymbol{L}_{r,\omega} = s\boldsymbol{L}_{r,r} + (1 - s)\boldsymbol{I}\cdot \tag{8}$$

如果 v 和 λ 分别为 $\boldsymbol{L}_{r,r}(r \neq 0)$ 和 $\boldsymbol{L}_{r,\omega}$ 的特征值, 有如下关系式:

$$\lambda = sv + (1 - s)\cdot \tag{9}$$

2 一般加速松弛方法(GAOR)

在这节, 基于分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$ 将 AOR 方法推广, 其中 $\boldsymbol{M} \in L_n$•

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个有非奇对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的 $n \times n$ 矩阵• 分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{P} \in L_n$, 且 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的对角元为 0•

求解线性系统 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的一般 AOR 方法为:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{L}_{r,\omega}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{L})^{-1}\omega\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_{r,\omega} = (\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{L})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{I} + (\omega - r)\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U}],$$
$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{Q}\cdot \tag{11}$$

下面将研究, 在对系数阵 $\boldsymbol{A}$ 施加各种假设下, 参数 r 和 ω 在何种限制下才能保证新迭代法收敛•

3 收敛性分析

定理 3.1 如果 $\boldsymbol{A}$ 是不可约对角占优矩阵, 则对于所有的 $0 \leqslant r \leqslant 1$ 和 $0 < \omega \leqslant 1$, 新方法(10) 必收敛•

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 是不可约对角占优矩阵, 则它一定非奇, 且有非零对角元素[2, 3]• 由于 $\boldsymbol{P} \in L_n$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 的对角元素为 0, 则 $\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P} \in L_n$, $\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P} \in L_n$• 由定理 1.1 知, $(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1} \in L_n$, 且 $\det((\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{P})^{-1}) = 1$•

假设存在 $\boldsymbol{L}_{r,\omega}$ 的特征值 λ, 使得 $|\lambda| \geqslant 1$• 则有下式成立:

$$\det(\boldsymbol{L}_{r,\omega} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0,$$

或者

$$\det((\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{L})^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{I} + (\omega - r)\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U} - \lambda(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{L}))) = 0,$$

所以

$$\det((1-\omega)\boldsymbol{I} + (\omega - r)\boldsymbol{L} + \omega\boldsymbol{U} - \lambda(\boldsymbol{I} - r\boldsymbol{L})) = 0\cdot$$

通过简单的变换后有

$$\det(-(\lambda + \omega - 1)\boldsymbol{Q}) = 0,$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} - \frac{r(\lambda - 1) + \omega}{\lambda - 1 + \omega}\boldsymbol{L} - \frac{\omega}{\lambda - 1 + \omega}\boldsymbol{U},$$

但是 $|\lambda| \geqslant 1$, $0 < \omega \leqslant 1$, 所以 $\lambda + \omega - 1 \neq 0$• 于是有 $\det(\boldsymbol{Q}) = 0$•

余下的证明与文献[4]中的类似，为节省篇幅，此处删去更细致的证明•

定理 3.2　设 A 是 L_矩阵，且有非零对角 D•　分解 $A = D - P - Q$ 使得 $P \in L_n$，且 P 和 Q 的对角元为 0，则对于满足 $0 \leqslant r \leqslant \omega \leqslant 1(\omega \neq 0)$ 的所有的 r 和 ω，新方法收敛当且仅当 Jacobi 方法收敛•

证明　在定理的条件下，$D^{-1}P$ 是非负的，$(1-\omega)I + (\omega - r)L + \omega U \geqslant 0$ 且 $D^{-1}P \in L_n$，由定理 1.1 知 $(I - rD^{-1}P)^{-1} \in L_n$，且 $(I - rD^{-1}P)^{-1}$ 是一非负矩阵，那么 $L_{r,\omega} \geqslant 0$•　由文献[4]中证明可知定理结论必成立•

若设 $L_{\omega,\omega}$ 是文献[4]中 GSOR 方法的迭代矩阵，那么 $L_{\omega,\omega}$ 和 $L_{r,\omega}$（它是 GAOR 的迭代矩阵）有如同式(8)的关系式，且它们的特征值满足式(9)，因此有如下定理：

定理 3.3　若 A 是相容有序矩阵且有非零对角元素，$L_{0,1} = D^{-1}(P + Q)$，如果 μ 是 $L_{0,1}$ 的特征值，数 λ 满足

$$(\lambda - 1 + \omega)^2 = \omega\mu^2[r(\lambda - 1) + \omega], \tag{12}$$

那么 λ 是 $L_{r,\omega}$ 的特征值，反之亦然•

定理 3.4　若 A 是相容有序矩阵且有非零对角元素，且 $L_{0,1}$ 有实特征值 μ_i | $i = 1, \cdots, n$，设 $\mu_{\min} = \min_i |\mu_i|$，$\mu_{\max} = \max_i |\mu_i|$，则 GAOR 方法收敛当且仅当 Jacobi 方法收敛，且参数 ω 和 r 分别取自区间 I_ω 和 I_r，其定义如下：

对于 $\mu_{\min} \neq 0$：

$$I_\omega \equiv (-2/(1 - \mu_{\min}^2)^{1/2}, 0) \text{ 和 } I_r \equiv (\beta(\mu_{\min}^2), \alpha(\mu_{\max}^2)),$$

$$I_\omega \equiv (0, 2] \text{ 和 } I_r \equiv (\alpha(\mu_{\max}^2), \beta(\mu_{\max}^2))$$

或

$$I_\omega \equiv (2, 2/(1 - \mu_{\min}^2)^{1/2}) \text{ 和 } I_r \equiv (\alpha(\mu_{\max}^2), \beta(\mu_{\min}^2));$$

对于 $\mu_{\min} = 0$：

$$I_\omega \equiv (0, 2) \text{ 和 } I_r \equiv (\alpha(\mu_{\max}^2), \beta(\mu_{\max}^2)),$$

其中

$$\alpha(z) \equiv \frac{1}{\omega z}\left(\frac{1}{2}\omega^2 z - \frac{1}{2}\omega^2 + 2\omega - 2\right) \text{ 和 } \beta(z) \equiv \frac{1}{z}(\omega z - \omega + 2)•$$

定理证明与文献[4]中的类似，略•

下面针对 Hermite 正定矩阵，将给出迭代矩阵(11)谱半径的界•　此处将该问题在一个更一般的框架中来讨论，取 $P = E$，$Q = E^*$•　则迭代矩阵 $L_{r,\omega}$ 就变为

$$L_{r,\omega} = (D - rE)^{-1}[(1-\omega)D + (\omega - r)E + \omega E^*]• \tag{13}$$

在 1973，Varga 曾指出，如果 A 和 D 是正定矩阵，对于 $0 \leqslant r \leqslant 2$，$D - rE$ 必非奇•　另外在文献[5]中又给出了如下定理，它对本文的证明是非常有用的•

定理 3.5　设 $A = D - E - E^H$ 是一个 Hermite 正定矩阵，且 D 是 Hermite 正定矩阵•　则一般 Jacobi 迭代矩阵 $B = D^{-1}(E + E^H) = I - D^{-1}A$ 的特征值 μ_i，$i = 1, \cdots, n$ 是实数且小于 1，且如果 $\mu_m = \min_i \mu_i$，$\mu_M = \max_i \mu_i$，且 $\mu_m \leqslant 0 \leqslant \mu_M$ 则对于

$$\omega \in (0, 2) \text{ 和 } \omega + (2 - \omega)/\mu_m < r < \omega + (2 - \omega)/\mu_M, \tag{14}$$

有 $\det(D - rE) \neq 0$，且 AOR 方法(6)收敛•

由式(14)知 ω 和 r 的收敛域等价于下式：

1) $2/\mu_m < r \leqslant 2$ 和 $0 < \omega < (r\mu_m - 2)/(\mu_m - 1)$；　　(15a)

2) $2 < r < (2/\mu_M)$ 和 $0 < \omega < (r\mu_M - 2)/(\mu_M - 1)$• (15b)

令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^*$，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 均为 Hermite 正定矩阵，则 $\boldsymbol{E}$ 有如下关系式：

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{S}), \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是任一个反_Hermite 阵，将式(16)代入式(13)中有

$$\boldsymbol{L}_{r,\omega} = [(2-r)\boldsymbol{D} + r\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{S}]^{-1}[(2-r)\boldsymbol{D} - (2\omega - r)\boldsymbol{A} - r\boldsymbol{S}]•$$

若对于 C^n 中 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{L}_{r,\omega}\boldsymbol{v} = \xi\boldsymbol{v}$ 且 $r \in [0, 2]$，则

$$\xi = \frac{[(2-r)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}) - (2\omega - r)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v})] - r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{v})}{[(2-r)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}) + r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v})] - r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{v})}•$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 均为 Hermite 正定矩阵，$\boldsymbol{S}$ 是任一反_Hermite 矩阵，则

$$|\xi|^2 = \frac{[(2-r)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}) - (2\omega - r)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v})]^2 + r^2|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{v})|^2}{[(2-r)(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}) + r(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v})]^2 + r^2|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{v})|^2}•$$

定义非空集合

$$E_{r,\omega} = \left\{\boldsymbol{v} \in C^n : (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{D}\boldsymbol{v}) = 1, \boldsymbol{L}_{r,\omega}\boldsymbol{v} = \xi\boldsymbol{v} \text{ 且 } |\xi| = \rho(\boldsymbol{L}_{r,\omega})\right\},$$

这样就得到了关于谱半径 $\rho(\boldsymbol{L}_{r,\omega})$ 的下界•

定理 3.6 对于任意 $r \in [0, 2]$, $0 < \omega < (r\mu_m - 2)/(\mu_m - 1)$，有

$$\rho^2(\boldsymbol{L}_{r,\omega}) \leqslant \max\left\{g(\lambda_1, \omega, r, \beta), g(\lambda_2, \omega, r, \beta)\right\},$$

其中 $\lambda_1 = 1 - \mu_M$, $\lambda_2 = 1 - \mu_m$, $\beta \equiv \inf\left\{|(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}\boldsymbol{v})| : \boldsymbol{v} \in E_{r,\omega}\right\}$, $\boldsymbol{S} = 2\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}$，且

$$g(\mu, \omega, r, \beta) = \frac{[2 - r\mu + 2\omega(\mu - 1)] - r^2\beta^2}{[2 - r\mu]^2 - r^2\beta^2}•$$

4 例　　题

这节将通过例题显示本文中给出的 GAOR 方法不仅很容易应用到平行计算中，而且和 AOR 相比，可以应用到更广阔的矩阵类中•

例 1 令 $\boldsymbol{A} = \mathrm{tridiag}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1})$• 将 $\boldsymbol{A}$ 进行式(5)分解，则 $\boldsymbol{A}$ 关于$(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U})$是一个 2_相容有序矩阵• 若分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}$，其中

$$\boldsymbol{P} = -\ \mathrm{stair1}[a_{i,i-1}, 0, a_{i,i+1}], \quad \boldsymbol{Q} = -\ \mathrm{stair2}[a_{i,i-1}, 0, a_{i,i+1}],$$

则 $\boldsymbol{A}$ 关于$(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q})$也是一个 2_相容有序矩阵• 因此对于线性系统 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，AOR 方法及 GAOR 方法迭代格式分别为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D} - r\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} + (\omega - r)\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}} + \omega\boldsymbol{A}_{\mathrm{U}}]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\boldsymbol{b}, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{D} - r\boldsymbol{P})^{-1}[(1-\omega)\boldsymbol{D} + (\omega - r)\boldsymbol{P} + \omega\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}^{(k)} + \omega\boldsymbol{b}• \tag{18}$$

对于由定理 3.4 给出的 ω 和 r，上述两个迭代法有着相同的最优近似收敛率，但方法(18)更适用于平行计算•

例 2 考虑一个 $2m \times 2m$ 阶的如下形式的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{tridiag}(a_{i,i-1}, a_{ii}, a_{i,i+1}) + \boldsymbol{B}, \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 是 $2m \times 2m$ 矩阵，$b_{1,2m} = a_{1,2m}$, $b_{2m,1} = a_{2m,1}$, $\boldsymbol{B}$ 的其他元素均为零• 在文献[2]和[3]中已说明 $\boldsymbol{A}$ 关于$(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U})$不是一个 p_相容有序矩阵，因此在文献[1]中关于 AOR 方法的最优参数的决定不能应用到形如式(19)的矩阵上• 但是，若定义一个 $2m \times 2m$ 斑马阵 $\boldsymbol{P}$，

$$p_{ij} = \begin{cases} -\ a_{ij}, & j = i-1, i+1, i = 2, 4, \cdots 2m-2, \\ -\ a_{ij}, & j = 1, 2m-1, i = 2m, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

且分解 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$, 易知 $\boldsymbol{A}$ 关于$(\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q})$ 是一个2_相容有序矩阵,则在本文中给出的定理3.4 就可以应用了•

例 3　我们考虑 Poisson 方程

$$\begin{cases}\Delta u=1, & (x,y)\in\Omega=(0,1)\times(0,1),\\ u\mid_{\partial\Omega}=0,\end{cases} \tag{20}$$

此方程可通过采用统一步长的中心差分离散化• 这便得到如下的线性方程: $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个分块的三对角矩阵,其形式为:

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{tridiag}(\boldsymbol{A}_{i,i-1},\boldsymbol{A}_{ii},\boldsymbol{A}_{i,i+1}), \tag{21}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i,i-1}=\boldsymbol{A}_{i,i+1}=-\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}_{ii}=\operatorname{tridiag}(-1,4,-1)$• 系统未知量的个数为 $N=(h^{-1}-1)^2$• 线性系统 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可通过 AOR 方法及新方法求解• 其迭代的终止条件为:

$$\|\boldsymbol{r}_i\|_2/\|\boldsymbol{r}_0\|_2<10^{-5}, \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{Ax}^{(i)}$ 是第 i 的剩余向量, 且初始向量取为 $\boldsymbol{x}^{(0)}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$• 众所周知, $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 阵的谱半径为 $\rho(\boldsymbol{B})=\cos(h\pi)$• 根据定理 3.4, 对给定的将 h 产生最优参数 $r(h)$ 和 $\omega(h)$• 如下的表 1 给出了针对不同的参数及不同的步长 AOR 方法及新方法的迭代数• 为了便于书写, 在表中设 O 表示 AOR 方法的迭代数, N 表示新方法的迭代数•

正如我们所看到的, 针对相同的迭代参数, 新方法有着和 AOR 方法几乎相同的迭代数•

表 1　AOR 方法及新方法的迭代次数

h^{-1}	$r(8),\omega(8)$		$r(16),\omega(16)$		$r(32),\omega(32)$		$r(64),\omega(64)$		$r(128),\omega(128)$		$r(256),\omega(256)$	
	O	N	O	N	O	N	O	N	O	N	O	N
8	17	15	31	29	59	56	124	122	246	242	486	479
16	75	80	34	30	58	55	125	122	250	248	496	483
32	286	316	149	169	65	64	125	122	251	246	501	485
64	1 026	1 139	548	653	289	349	130	126	256	248	509	492
128	3 489	4 016	1 895	2 298	1 009	1 318	486	669	257	257	508	490
256	11 796	12 978	6 249	8 019	3 296	4 467	1 573	2 483	832	1 259	512	511

[参　考　文　献]

[1] Hadjidimos A. Accelerated overrelaxation method[J]. Math Comp, 1978, **32**(2): 149—157.

[2] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice_Hall, 1962, 25—132.

[3] Young D M. Iterative Solution for Large Systems[M]. New York: Academic Press, 1971, 102—145.

[4] LU Hao. Stair matrices and their generalizations with applications to iterative methods(Ⅰ)—A generalization of the successive overrelaxation method[J]. SIAM J Numer Anal, 1999, **37**(1): 1—17.

[5] Li C, Li B, Evans D J. A generalized successive overrelaxation method for least squares problems[J]. BIT, 1998, **38**(2): 347—356.

[6] Varga R S. Extensions of the Successive Overrelaxation Theory With Applications to Finite Element Approximations, in Topics in Numerical Analysis[M]. New York: Academic Press, 1973, 329—343.

[7] Wild P, Niethammer W. Over_ and under_relaxation for linear systems with weakly cyclic Jacobi matrices of index p[J]. Linear Algebra Appl, 1987, **91**(1): 29—52.

Stair Matrices and Their Generalizations With Applications to Iterative Methods

SHAO Xin_hui, SHEN Hai_long, LI Chang_jun
(Department of Mathematics, Northeastern University,
Shenyang 110004, P. R. China)

Abstract: Stair matrices and their generalizations are introduced. The definitions and some properties of the matrices were first given by Lu Hao. This class of matrices provided bases of matrix splittings for iterative methods. The remarkable feature of iterative methods based on the new class of matrices is that the methods were easily implemented for parallel computation. In particular, a generalization of the accelerated overrelaxation method (GAOR) was introduced. Some theories of the AOR method were extended to the generalized method to include a wide class of matrices. The convergence of the new method was derived for Hermitian positive definite matrices. Finally, some examples are given in order to show the superiority of the new method.

Key words: stair matrices; iterative method; parallel computation; generalization of the AOR method