文章编号: 1000_0887(2006) 08_1001_08

两个模态耦合的 Ginzburg_Landau 方程的时空混沌同步化*

胡满峰, 徐振源

(江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122)

(刘曾荣推荐)

摘要: 根据数值计算的结果提出了模态耦合的条件, 两个方程在高频模态上是耦合的, 而在低频模态上是不耦合的• 利用了无穷维动力系统理论, 证明了两个高频模态耦合的 Ginzburg_Landau 方程在函数空间中存在吸引域, 因而存在连通的、有限维的紧的整体吸引子• 驱动方程存在时空混沌• 将方程组联系一个截断形式, 得到的修正方程组将保持原方程组的动力学行为• 高频模态耦合的两个方程在一定的条件下具有挤压性质, 证明了可达到完全的时空混沌同步化• 在数学上定性解释了无穷维动力系统的同步化现象• 研究方法不同于有限维动力系统中通常使用的 Liapunov 函数方法与近似线性方法•

关 键 词: 完全同步化; Ginzberg_Landau 方程; 吸引子; 时空混沌

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

同步化现象在通讯、电路、非线性光学和生物系统中具有基本的重要性• 同步化现象可由理论、数值和实验方法广泛地研究[1~3]• 我们确信同步的深入研究将极大地推动科学技术的发展• 最近无穷维动力系统的混沌同步和控制得到极大的注意[4~7]• 虽然有限维动力系统同步已经有很多理论结果[1~3], 但是无穷维动力系统的解仅由数值计算得到, 尚未见到完整的理论结果• 文献[5]研究了地理流体动力系统中的同步化, 其中耦合方法为如下方式: 耦合项可表示为

$$F_k^A = \mu_k^c[q_k^A - q_k^B] + [\mu_0 - \mu_k^c][q_k^* - q_k^A],$$

其中流(方程的解 q) 进行了谱分解, 下标 k 表示波数(模态), q_k 表示谱分量• 耦合系数 μ_k^c 随波数而变化, 该文耦合的是小尺度(高频分量), 大尺度(低频分量)是不耦合的• 耦合方法是

$$\mu_k^c = 0, \qquad \text{如果} \mid k_x \mid \leqslant k_{x_0}, \mid k_y \mid \leqslant k_{y_0},$$

$$\mu_k^c = \mu_0\left[1 - \left(\frac{k_0}{k}\right)^4\right], \qquad \text{否则},$$

* 收稿日期: 2004_08_17; 修订日期: 2006_02_24
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372054)
作者简介: 胡满峰(1976—), 男, 江苏仪征人, 讲师, 硕士;
徐振源(1946—), 男, 上海人, 教授, 硕士(联系人. Tel: +86_510_82764050; Fax: +86_510_85910227; E_mail: xu_zhenyuan@yahoo.com.cn)•

我们称这种耦合为高频模态耦合• 文献[8]通过数值方法研究了一对不同的 Ginzburg_Landau 方程的单向弱耦合的频率、相位和广义同步化• 从中可见, 无穷维动力系统的同步化问题是非常有趣和十分困难的问题• 本文研究了两个相同的 Ginzburg_Landau 方程在高频模态耦合时从不同初始条件出发时的混沌的同步化• 20 世纪 90 年代初 Foias 和 Temam[9] 等建立了整体吸引子和惯性流形理论, 成功地应用于一大类典型的无穷维动力系统, 例如 Navier_Stokes 方程、Ginzburg_Landau 方程等• 1996 年 Li 等人研究了以下摄动非线性 Schrödinger 方程[10]:

$$\mathrm{i}q_t = q_{xx} + 2[q\bar{q} - \omega^2]q + \mathrm{i}\varepsilon[\hat{D}q - \Gamma], \tag{1}$$

证明了非平凡的对称的一对同宿轨道的存在性, 这种同宿轨道对应于时空混沌的存在性• 我们研究如下的 Ginzburg_Landau 方程:

$$q_{1t} + (\mathrm{i} + \varepsilon\beta)q_{1xx} + (\varepsilon k + 2\mathrm{i})|q_1|^2 q_1 + (\varepsilon\alpha - 2\omega^2\mathrm{i})q_1 + \varepsilon\Gamma = 0, \tag{2}$$

其中 $-\varepsilon\beta = \lambda > 0$, $\varepsilon k > 0$, $\varepsilon\Gamma > 0$, $\Omega = [0, L]$• q_1 是 Ω 周期函数且

$$q_1(x, 0) = q_{10}(x), \qquad x \in \Omega• \tag{3}$$

根据文献[9]的理论可以证明式(2)、(3)存在连通的紧的有限维整体吸引子, 而根据文献[10]的理论也可证明同宿轨道的保持性, 即时空混沌的存在性•

本文我们将要研究两个相同的 Ginzburg_Landau 方程不同的初始条件, 在模态耦合条件下, 完全时空混沌同步化问题• 与式(2)耦合的方程为

$$q_{2t} + (\mathrm{i} + \varepsilon\beta)q_{2xx} + (\varepsilon k + 2\mathrm{i})|q_2|^2 q_2 + (\varepsilon\alpha - 2\omega^2\mathrm{i})q_2 + \varepsilon\Gamma = F(q_1, q_2), \tag{4}$$

其中 q_2 也是 Ω 周期函数, 且

$$q_2(x, 0) = q_{20}(x), \qquad x \in \Omega, \tag{5}$$

F 为模态耦合函数, 定义为 $F_k = \mu_k(q_k^1 - q_k^2)$, $k = 1, 2, \cdots$, 其中 q_k^1、q_k^2 为 q_1、q_2 在 W_k 张成的子空间上的投影• W_k 为 $A = -\Delta = -\partial^2/\partial x^2$ 的规范正交的本征函数• 设 μ_k 为单调有界的增函数

$$\mu_{k_0} \leqslant \mu_k \leqslant \mu_0, \qquad \text{当 } 1 \leqslant k_0 \leqslant k,$$

$$\mu_k = 0, \qquad \text{当 } k < k_0•$$

定义 1 Ginzburg_Landau 方程(2)~(5)为完全同步化, 如果

$$\lim_{t\to\infty} | q_1(x, t) - q_2(x, t) | = 0,$$

这里$|\cdot|$指的是所在函数空间的范数•

在有限维动力系统同步化的研究中主要采用 Liapunov 函数方法与线性近似方法, 这些方法难以应用到无穷维动力系统中去• 本文中, 我们利用了无穷维动力系统吸收集、吸引子与惯性流形的理论[9], 成功地研究了无穷维动力系统的同步化问题•

本文安排如下: 在第 1 节中给出了式(2)~(5)的数学描述, 并证明存在吸引域, 从而存在整体吸引子; 在第 2 节中对式(2)、(4)的非线性项进行了截断, 得到的修正方程将保持与原方程相同的长期动力学行为, 进而证明了挤压性质; 最后在第 3 节中, 在一定的条件下证明了在高频模态耦合条件下式(2)~(5)可以达到完全同步化•

1 吸收集和吸引子

为讨论式(2)~(5), 引人复的 Sobolev 空间• 用 $\vec{X}$、$\vec{Y}$ 记函数空间 X、Y 的复化空间, 例如 $\vec{L}^2(\Omega)$ 是 $L^2(\Omega)$ 的复化空间, 用$(\cdot, \cdot)$和$|\cdot|$分别表示 $L^2(\Omega)$ 和 $\vec{L}^2(\Omega)$ 的内积与范数• 令

$H = L^2(\Omega)$, $V = \vec{H}^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$, $\|\cdot\|$ 为 V 的范数. 此时 $Au = -\Delta u$, 记 $\{W_j\}$、λ_j 为 A 在 H 中的本征向量和本征值, 即

$$AW_j = \lambda_j W_j, \qquad j \geqslant 1;\ 0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_j < \cdots;\ \lambda_j \to \infty (j \to \infty). \tag{6}$$

对某个正整数 N, P_N 为 H 到 $\mathrm{span}\{W_1, W_2, \cdots, W_N\}$ 的投影算子, 令 $Q_N = I - P_N$. 另外式(2) ~ (5) 等价于以下泛函发展方程:

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)Aq_1 + (\varepsilon k + 2\mathrm{i})|q_1|q_1 + (\varepsilon\alpha - 2\omega^2\mathrm{i})q_1 + \varepsilon\Gamma = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)Aq_2 + (\varepsilon k + 2\mathrm{i})|q_2|q_2 + (\varepsilon\alpha - 2\omega^2\mathrm{i})q_2 + \varepsilon\Gamma = F(q_1, q_2), \tag{8}$$

$$q_j(0) = q_{j0}, \qquad j = 1, 2.$$

其解的存在性和唯一性足以表明存在半群 $S_j(t): q_{j0} \to q_j(t)$.

下面我们证明方程(7)、(8)在 H 中存在吸收集. 首先, 方程(7)的吸收集的存在性已在文献[9]中证明. 对于 $r = -(\varepsilon\alpha - \varepsilon\Gamma/2)$, $r > 0$ 的情况, 我们有

$$|q_1(t)|^2 \leqslant |q_{10}|^2 \mathrm{e}^{-2rt} + \frac{1}{2r}\left[\frac{4r^2}{\varepsilon k} + \varepsilon\Gamma\right]|\Omega|(1 - \mathrm{e}^{-2rt}), \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup|q_1(t)|^2 \leqslant \rho_{10}^2, \quad \rho_{10}^2 = \frac{1}{2r}\left[\frac{4r^2}{\varepsilon k} + \varepsilon\Gamma\right]|\Omega|. \tag{10}$$

因此, 在 H 中球 $B_0 = B_H(0, \rho_{10}')$ (中心在原点, 半径 $\rho_{10}' > \rho_{10}$) 对半群 $S_1(t)$ 是不变的, B_0 为半群 $S_1(t)$ 在 H 中的吸收集. 如果 B 是 H 中的有界集, 包含在 H 中中心在原点半径为 R 的球 $B(0, R)$ 中, 那么当

$$t \geqslant t_0 = t_0(B, B_0), \ t_0 = \frac{1}{2r}\lg\frac{R^2}{(\rho_{10}')^2 - (\rho_{10})^2}$$

时有 $S_1(t)B \subset B_0$. 在 t 和 $t + r\,(r > 0)$ 之间积分, 如果 $q_{10} \in B$, $t \geqslant t_0$ 时得

$$\int_t^{t+r}\left\{2\lambda\|q_1\|^2 + \varepsilon k|q_1|^4_{L^4} + 2r|q_1|^2\right\}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\rho_{10}'^2 + \frac{4r^2 r}{\varepsilon k}|\Omega| + \varepsilon\Gamma|\Omega|r. \tag{11}$$

我们再考虑方程(8), 类似于方程(7)可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|q_2|^2 + \lambda\|q_2\|^2 + \varepsilon k|q_2|^4_{L^4} + \varepsilon\alpha|q_2|^2 + \varepsilon\Gamma\int_\Omega \mathrm{Re}\,q_2\mathrm{d}x =$$

$$\int_\Omega F(q_1, q_2)q_2\mathrm{d}x.$$

只考虑 $r + h > 0$, $h = (\mu_0 - 2\mu_{k0})/2$ 情况,

$$\frac{\varepsilon k s^4}{2} - 2(r + h)s^2 \geqslant -\frac{2}{\varepsilon k}(r + h)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|q_2|^2 + 2\lambda\|q_2\|^2 + \varepsilon k|q_2|^4_{L^4} + 2(r + h)|q_2|^2 \leqslant$$

$$\frac{4(r + h)^2}{\varepsilon k}|\Omega| + \varepsilon\Gamma|\Omega| + \mu_0\rho_{10}'^2, \tag{12}$$

再由 Gronwall 引理得

$$|q_2(t)|^2 \leqslant |q_{20}|^2\mathrm{e}^{(-2r-2h)t} +$$

$$\frac{4(r + h)^2|\Omega| + (\varepsilon\Gamma|\Omega| + \mu_0\rho_{10}'^2)\varepsilon k}{2(r + h)\varepsilon k}(1 - \mathrm{e}^{(-2r-2h)t}),$$

$$\limsup_{t\to\infty}|q_2(t)|^2 \leqslant \rho_{20}^2,\quad \rho_{20}^2 = \frac{4(r+h)^2|\Omega| + (\varepsilon\Gamma|\Omega| + \mu_0\rho_{10}^2)\varepsilon k}{2(r+h)\varepsilon k}. \tag{13}$$

因此在 H 中球 $B_0' = B_H(0, \rho_{20}')$ (中心在原点, 半径 $\rho_{20}' > \rho_{20}$) 对半群 $S_2(t)$ 是不变的, B_0' 为半群 $S_2(t)$ 在 H 中的吸收集. 如果 B 是 H 中的有界集, 包含在 H 中中心在原点半径为 R 的球 $B(0, R)$ 中, 那么当

$$t \geqslant t_0 = t_0(B, B_0'),\ t_0 = \frac{1}{2r}\lg\frac{R^2}{(\rho_{20}')^2 - (\rho_{20})^2}$$

时有 $S_2(t)B \subset B_0'$. 在 t 和 $t+r\ (r>0)$ 之间积分, 如果 $q_{20}\in B$, $t \geqslant t_0$ 时得

$$\int_t^{t+r}\left\{2\lambda\|q_2\|^2 + \varepsilon k|q_2|_{L^4}^4 + 2r|q_2|^2\right\}\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\rho_{20}^2 + \frac{4(r+h)^2 r}{\varepsilon k}|\Omega| + \varepsilon\Gamma|\Omega| r + \mu_0\rho_{10}^2 r. \tag{14}$$

我们再证明在 V 中方程(2) ~ (5) 具有吸收集. 方程(7) 在 V 中吸收集的存在性已在文献[9]中证明. 我们可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_1\|^2 + \lambda|\Delta q_1|^2 + \varepsilon\alpha\|q_1\|^2 - \varepsilon\Gamma\int_\Omega \mathrm{Re}\Delta q_1\mathrm{d}x =$$

$$\mathrm{Re}(\varepsilon k + 2\mathrm{i})\int|q_1|^2 q_1\Delta q_1 \leqslant$$

$$3[(\varepsilon k)^2 + 4]|q_1|_{L^4}^4|\Delta q_1|_{L^4}^4 + \frac{|\Omega|(\varepsilon k)^2}{2\lambda} + \frac{\lambda}{2}|\Delta q_1|^2,$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|q_1\|^2 \leqslant 2(-\varepsilon\alpha + C_3'|q_1|_{L^4}^4)\|q_1\|^2 + \frac{|\Omega|}{\lambda}(\varepsilon\lambda)^2.$$

应用一致 Gronwall 引理于

$$y = \|q_1\|^2,\ g = 2(-\varepsilon\alpha + C_3'|q_1|_{L^4}^4),\ h = \frac{|\Omega|}{\lambda}(\varepsilon\Gamma)^2,$$

$$\int_t^{t+r} g(s)\mathrm{d}s \leqslant a_1,\ \int_t^{t+r} h(s)\mathrm{d}s \leqslant a_2,\ \int_t^{t+r} y(s)\mathrm{d}s \leqslant a_3,$$

得到

$$\|q_1(t)\|^2 \leqslant \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)\mathrm{e}^{a_1}\qquad (t \geqslant t_0 + r), \tag{15}$$

其中 $r>0$ 任意选择, $q_{10}\in B$. 如果 B 是 V 中的有界集, 从而也是 H 中的有界集, 则有 $S(t)B \subset B_0(t \geqslant t_0(B, B_0))$; $S(t)B \subset B_1(t_0 \geqslant t_0 + r)$, 其中 B_1 是中心在原点半径为 ρ_1 的 V 中的球,

$$\rho_1^2 = \rho_{10}^2 + \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right)\mathrm{e}^{a_1}, \tag{16}$$

于是 B_1 是 $S_1(t)$ 在 V 中的吸收集. 类似地, 在方程(8) 两边乘上 $-\Delta q_2$ 并在 Ω 上积分, 再应用一致 Gronwall 引理同样得

$$\|q_2(t)\|^2 \leqslant \left(\frac{a_3'}{r} + a_2'\right)\mathrm{e}^{a_1'}\qquad (t \geqslant t_0 + r), \tag{17}$$

其中 a_j', $j = 1, 2, 3$ 类似于式(15) 中 a_j, $j = 1, 2, 3$ 那样定义. 因此也存在 V 中的球 $B_2 = B_V(0, \rho_2)$ 是 $S_2(t)$ 在 V 中的吸收集. 由于 V 到 H 的单射是紧的, 我们得到以下定理:

定理 1 考虑具有周期边界条件的模态耦合的两个 Ginzburg_Laudau 方程(2) ~ (5), 当 $\lambda = -\varepsilon\beta > 0$, $\varepsilon k > 0$, 这个动力系统具有吸引子 I, 它在 $\vec{L}^2(\Omega)\times\vec{L}^2(\Omega)$ 中是紧、连通和极大

的•

2 修正方程与挤压性质

为了避免当 $|q_1|$、$|q_2|$ 很大时非线性项引起的困难, 我们对原方程(7)、(8) 的非线性项进行截断, 这样处理后的方程称为修正方程• 修正方程将保持原方程(2) ~ (5) 的长期动力学行为• 选择 $\rho > 0$ 使得吸收集 B_1、B_2(因此吸引子 I) 包含在中心为原点半径为 $\rho/2$ 的 $D(A^\alpha)$ 球中• 选择 C^∞ 函数 θ 如下:

$$\theta(s) = 1,\quad 0 \leqslant s \leqslant 1;\quad \theta(s) = 0,\quad s \geqslant 2;\quad \sup_{s \geqslant 0} |\theta'(s)| \leqslant 2 \cdot$$

令

$$\theta_\rho(s) = \theta(s/\rho),\quad B(u, u) = (\varepsilon k + 2\mathrm{i})|u|^2 u,$$

$$B_\theta(u, u) = \theta_\rho(|A^\alpha u|)(\varepsilon k + 2\mathrm{i})|u|^2 u,$$

方程(7)、(8) 可修正为

$$\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)Aq_1 + (\varepsilon k + 2\mathrm{i})B_\theta(q_1, q_1) + (\varepsilon\alpha - 2\omega^2\mathrm{i})q_1 + \varepsilon\Gamma = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)Aq_2 + (\varepsilon k + 2\mathrm{i})B_\theta(q_2, q_2) + (\varepsilon\alpha - 2\omega^2\mathrm{i})q_2 + \varepsilon\Gamma = F(q_1, q_2) \cdot \tag{19}$$

对于 $1/8 \leqslant \alpha \leqslant 3/8$, 容易证明以下引理:

引理 1 B_θ 是从 $D(A^\alpha)$ 到 $D(A^{\alpha - 1/2})$ 的整体有界算子•

$$\sup_{u \in D(A^\alpha)} |A^{\alpha - 1/2} B_\theta(u, u)| \leqslant M_1 \cdot \tag{20}$$

引理 2 B_θ 是从 $D(A^\alpha)$ 到 $D(A^{\alpha - 1/2})$ 的整体 Lipschitz 映照

$$|\theta_\rho(|A^\alpha u_1|)A^{\alpha - 1/2}B(u_1, u_1) - \theta_\rho(|A^\alpha u_2|)A^{\alpha - 1/2}B(u_2, u_2)| \leqslant M_2|A^\alpha(u_1 - u_2)| \cdot \tag{21}$$

我们现证明方程(18)、(19) 的挤压性质• 从方程(18)、(19) 得

$$\frac{\mathrm{d}P_N q_1}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)AP_N q_1 + P_N(\varepsilon k + 2\mathrm{i})B_\theta(q_1, q_1) + (\varepsilon k - 2\omega^2\mathrm{i})P_N q_1 + \varepsilon\Gamma = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}P_N q_2}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)AP_N q_2 + P_N(\varepsilon k + 2\mathrm{i})B_\theta(q_2, q_2) + (\varepsilon k - 2\omega^2\mathrm{i})P_N q_2 + \varepsilon\Gamma = P_N F(q_1, q_2),$$

令 $N \geqslant k_0 - 1$, $P = P_N(q_1 - q_2)$, $R = \theta_N(q_1 - q_2)$, $q = q_1 - q_2$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)AP + P_N(\varepsilon k + 2\mathrm{i})(B_\theta(q_1, q_1) - B_\theta(q_2, q_2)) + (\varepsilon k - 2\omega^2\mathrm{i})P = -P_N F(q_1, q_2) \cdot \tag{22}$$

式(22) 两边乘以 $A^{2\alpha}P$ 且在 Ω 上积分再取实部, 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A^\alpha P|^2}{\mathrm{d}t} + \lambda|A^{\alpha + 1/2}P|^2 \geqslant -[(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2[|A^\alpha P| + |A^\alpha R|]|A^{\alpha + 1/2}P| - (\varepsilon\alpha + \mu_N)|A^\alpha P|^2 \cdot \tag{23}$$

同理有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} + (-\mathrm{i} + \lambda)AR + Q_N(\varepsilon k + 2\mathrm{i})(B_\theta(q_1, q_1) - B_\theta(q_2, q_2)) + (\varepsilon k - 2\omega^2\mathrm{i})R =$$

$$-Q_NF(q_1,q_2),$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A^{\alpha}R|^2}{\mathrm{d}t}+\lambda|A^{\alpha+1/2}R|^2\leqslant$$
$$-[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2[|A^{\alpha}P|+|A^{\alpha}R|]|A^{\alpha+1/2}P|-(\varepsilon\alpha+\mu_{N+1})|A^{\alpha}P|^2\cdot \tag{24}$$

设 $V\times V$ 中锥为 $\Sigma=\left\{v\in D(A^{\alpha}),\ |A^{\alpha}Q_Nv|\leqslant\mu|A^{\alpha}P_Nv|,\ \mu>0\right\}\cdot$ 如果 $A^{\alpha}q\in\partial\Sigma$, 即 $|A^{\alpha}R|=\mu|A^{\alpha}P|$ 时, 函数 $f(z)=-\lambda z^2+[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2(|A^{\alpha}P|+|A^{\alpha}Q|)z$ 是二次函数$\cdot$ 当 $z>(1/2\lambda)[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2(|A^{\alpha}P|+\mu|A^{\alpha}P|)$ 时 $f(z)$ 是单调减的$\cdot$ 当 λ_{N+1} 充分大时

$$|A^{\alpha+1/2}R|\geqslant\lambda_{N+1}^{1/2}|A^{\alpha}R|=\lambda_{N+1}^{1/2}\mu|A^{\alpha}P|\geqslant\frac{1}{2\lambda}[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2(1+\mu)|A^{\alpha}P|,$$

(24) 可成为

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A^{\alpha}R|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant-\lambda\lambda_{N+1}|A^{\alpha}R|^2+[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2\left[1+\frac{1}{\mu}\right]|A^{\alpha}R|^2\lambda_{N+1}^{1/2}-$$
$$(\varepsilon\alpha+\mu_{N+1})|A^{\alpha}R|^2\cdot$$

考虑

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(|A^{\alpha}R|^2-\mu^2|A^{\alpha}P|^2)}{\mathrm{d}t}\leqslant$$
$$|A^{\alpha}R|^2\left\{-\lambda\lambda_{N+1}+[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2\left[1+\frac{1}{\mu}\right]\lambda_{N+1}^{1/2}-(\varepsilon\alpha+\mu_{N+1})+\right.$$
$$\left.\lambda\lambda_N+[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2[1+\mu]\lambda_N^{1/2}+\varepsilon\alpha+\mu_N\right\}\cdot$$

当

$$\lambda\lambda_{N+1}+\mu_{N+1}>[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2\left[1+\frac{1}{\mu}\right]\lambda_{N+1}^{1/2}+\lambda\lambda_N+$$
$$[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2[1+\mu]\lambda_N^{1/2}+\mu_N \tag{25}$$

时有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(|A^{\alpha}R|^2-\mu^2|A^{\alpha}P|^2)}{\mathrm{d}t}\leqslant 0,$$

则如果 $A^{\alpha}q(t_1)\in\Sigma$, $A^{\alpha}q=A^{\alpha}(q_1-q_2)$ 当 $t>t_1$ 时不离开锥$\cdot$ 如果 $A^{\alpha}q$ 不属于 Σ, 即 $|A^{\alpha}R|\geqslant\mu|A^{\alpha}P|$ 时有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A^{\alpha}R|^2}{\mathrm{d}t}\leqslant-|A^{\alpha}R|^2\left\{\lambda\lambda_{N+1}-[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2\left[1+\frac{1}{\mu}\right]\lambda_{N+1}^{1/2}+\varepsilon\alpha+\mu_{N+1}\right\}\cdot$$

令

$$\xi=\lambda\lambda_{N+1}-[(\varepsilon k)^2+4]^{1/2}M_2\left[1+\frac{1}{\mu}\right]\lambda_{N+1}^{1/2}+\varepsilon\alpha+\mu_{N+1}>0, \tag{26}$$

得到

$$|A^{\alpha}R|^2\leqslant|A^{\alpha}R(0)|^2e^{-2\xi t}, \tag{27}$$

于是当 $t\to\infty$ 时 $|A^{\alpha}R|\to 0\cdot$ 因此我们得到以下定理(挤压性质):

定理 2 对于满足周期边界条件的方程(7)、(8), 当式(25)、(26) 成立时, 那么

1) 如果 $A^{\alpha}q_1(0)\in A^{\alpha}q_2(0)+\Sigma$, 则 $A^{\alpha}q_1(t)\in A^{\alpha}q_2(t)+\Sigma$, $\forall t\geqslant 0$;

2) 如果 $A^{\alpha}q_1(0)$ 不属于 $A^{\alpha}q_2(0)+\Sigma$, 那么或者 $A^{\alpha}q_1(t_0)\in A^{\alpha}q_2(t_0)+\Sigma$ 对某 $t_0>0$, 因此 $A^{\alpha}q_1(t)\in A^{\alpha}q_2(t)+\Sigma$, $\forall t\geqslant t_0$; 或者 $A^{\alpha}q_1(t)$ 不属于 $A^{\alpha}q_2(t)+\Sigma$, 则 $A^{\alpha}Q_Nq_1(t)-A^{\alpha}Q_Nq_2(t)$

指数衰减到0•

3 模态耦合同步化

当$A^{\alpha}q$处于锥外时, 即$|A^{\alpha}R| \geqslant \mu |A^{\alpha}P|$, 当$t \to \infty$时$|A^{\alpha}R| \to 0$, 从而$|A^{\alpha}P| \to 0$, 即$|A^{\alpha}(q_1 - q_2)| \to 0$• 当$A^{\alpha}q$处于锥内时, 即$|A^{\alpha}R| \leqslant \mu |A^{\alpha}P|$时, 我们要修正式(20)和(21)•

引理3 在锥 Σ内, B_{θ}是从$D(A^{\alpha})$到$D(A^{\alpha-1/2})$的整体有界算子•

$$\sup_{u \in D(A^{\alpha})} |A^{\alpha-1/2}B_{\theta}(u,u)| \leqslant M_1 \leqslant M_1•$$

引理4 在锥 Σ内, B_{θ}是从$D(A^{\alpha})$到$D(A^{\alpha-1/2})$的整体 Lipschitz 映照

$$|\theta_{\rho}(|A^{\alpha}u_1|)A^{\alpha-1/2}B(u_1,u_1) - \theta_{\rho}(|A^{\alpha}u_2|)A^{\alpha-1/2}B(u_2,u_2)| \leqslant M_2 |A^{\alpha}(u_1 - u_2)|,$$

其中$M_2 \leqslant M_2$• 则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A^{\alpha}P|^2}{\mathrm{d}t} + \lambda |A^{\alpha+1/2}P|^2 \leqslant [(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2[|A^{\alpha}P| + |A^{\alpha}R|]|A^{\alpha+1/2}P| - (\varepsilon\alpha + \mu_{k0})|A^{\alpha}P|^2•$$

函数$f(z) = -\lambda z^2 + [(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2(|A^{\alpha}P| + |A^{\alpha}Q|)z$是二次函数• 当$z < (1/2\lambda)[(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2(|A^{\alpha}P| + \mu |A^{\alpha}P|)$时$f(z)$是单调增的, 当$\lambda_N$适当选择时,

$$|A^{\alpha+1/2}P| \leqslant \lambda_N^{1/2}|A^{\alpha}P| \leqslant \frac{1}{2\lambda}[(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2(1+\mu)|A^{\alpha}P|, \tag{28}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|A^{\alpha}P|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant -\left\{\lambda\lambda_N - [(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2[1+\mu]\lambda_N^{1/2} + \varepsilon\alpha + \mu_{k0}\right\}|A^{\alpha}P|^2•$$

令

$$\eta = \lambda\lambda_N - [(\varepsilon k)^2 + 4]^{1/2}M_2[1+\mu]\lambda_N^{1/2} + \varepsilon\alpha + \mu_{k0} > 0, \tag{29}$$

得到

$$|A^{\alpha}P(t)|^2 \leqslant |A^{\alpha}P(0)|^2 \mathrm{e}^{-2\eta t},$$

于是$t \to \infty$时, $|A^{\alpha}P(t)| \to 0$, 也有$|A^{\alpha}R(t)| \to 0$, 从而$|A^{\alpha}(q_1 - q_2)| \to 0$• 最后得:

定理3 在式(28)、(29)、(25)、(26)条件下两个模态耦合的 Ginzburg_Landau 方程(2)~(5)可达到时空混沌完全同步化•

[参 考 文 献]

[1] Pecora L M, Corrol T L. Synchronization in chaotic in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, **64**(8): 821—824.

[2] Abarbane H D, Rulkov N F, Sushchik M M. Generalized synchronization of chaos: the auxiliary system approach[J]. Phys Rev E, 1996, **53**(5): 4528—4533.

[3] Maistrenko Y, Kapitaniak T. Different type of chaos synchronization in two coupled piecewise linear maps[J]. Phys Rev E, 1999, **54**(4): 3285—3289.

[4] Codreanu S. Synchronization of spatiotemporal nonlinear dynamical systems by an active control[J]. Chaos Solitons Fractals, 2003, **15**(3): 507—510.

[5] Duane G S, Tribbia J J. Synchronized chaos in geophysic dynamics[J]. Phys Rev Lett, 2001, **86**(19): 4298—4301.

[6] Wei G W. Synchronization of single_side locally averaged adaptive coupling and its application to

shock capturing[J]. Phys Rev Lett, 2001, **86**(16): 3542—3545.

[7] Wu S G, He K F, Huang Z G. Controlling spatio_temporal chaos via small external forces[J]. Phys Lett A, 1999, **260**(5): 345—351.

[8] Junge L, Parlitz U. Phase synchronization of coupled Ginzburg_Landau equations[J]. Phys Rev E, 2000, **62**(1): 438—441.

[9] Temam R. Infinite Dimensional System in Mechanics and Physics Applied Mathematics Series [M]. New York: Springer_Verlag, 1988.

[10] Li Y, Mclaughlin D W Q, Shatan J, et al. Persistent homodinic orbits for perturbed nonlinear Schrodinger equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1996, **49**(1): 1175—1255.

Spatio_Temporal Chaotic Synchronization for Modes Coupled Two Ginzburg_Landau Equations

HU Man_feng, XU Zhen_yuan

(School of Science, Southern Yangtze University, Wuxi, Jiangsu 214122, P. R. China)

Abstract: On the basis of numerical computation, the conditions of the modes coupling were proposed. The high_frequency modes are coupled, but the low frequency modes are uncoupled. It was proved that the existence of an absorbing set and a global finite dimensional attractor which is compact, connected in the function space for the high_frequency modes coupled two Ginzburg_Landau equations(MGLE). The trajectory of driver equation may be spatio_temporal chaotic. One associats with MGLE, a truncated form of the equations. The prepared equations will persist in long time dynamical behavior of MGLE. MGLE possess the squeezing properties under some conditions. It was proved that the complete spatio_temporal chaotic synchronization for MGLE can occur. Synchronization phenomenon of infinite dimensional dynamical system (IFDDS) was illustrated on the mathematical theory qualitatively. The method is different from Liapunov function methods and approximate linear methods.

Key words: complete synchronization; Ginzburg_Landau equations; attractor; spatio_temporal chaos