文章编号: 1000_0887(2006) 09_1065_06

在两个完备紧致度量空间上满足隐含关系映射的不动点定理*

A•阿利欧谢[1], B•费瑟[2]

(1. 纳比•本•摩赫地大学 数学系, 布阿吉 04000, 阿尔及利亚;
2. 莱斯特大学 数学系, 英国 LE1 7RH, 莱斯特)

(协平推荐)

摘要: 首先给出了隐含关系函数, 证明了满足隐含关系函数的两个映射的公共不动点定理, 进一步证明了两个紧致度量空间上满足隐含关系函数的不动点定理•

关 键 词: 完备度量空间; 紧致度量空间; 不动点; 隐含关系

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

1 预备知识

下面的 2 个定理在文献[1]中已作出证明•

定理 1 令 (X, d) 和 (Y, ρ) 为完备度量空间, T 为一个 X 到 Y 的映射, S 为一个 Y 到 X 的映射• 若对所有 X 中的 x、Y 中的 y, 满足下列不等式

$$\rho(Tx, TSy) \leqslant f(d(x, Sy), \rho(y, Tx), \rho(y, TSy)),$$
$$d(Sy, STx) \leqslant g(\rho(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)),$$

其中 $f, g \in F$• 那么, ST 在 X 中有唯一不动点 u, TS 在 Y 中有唯一不动点 v• 从而, $Tu = v$ 和 $Sv = u$•

定理 2 令 (X, d) 和 (Y, ρ) 为紧致度量空间, T 为一个 X 到 Y 的连续映射, 若 S 为一个 Y 到 X 的连续映射, 若对所有 X 中的 x、Y 中的 y, 且 $x \neq Sy$, 满足不等式

$$\rho(Tx, TSy) < f(d(x, Sy), \rho(y, Tx), \rho(y, TSy)),$$

其中 $f \in F^*$• 又对所有 X 中的 x、Y 中的 y, 且 $y \neq Tx$, 并满足不等式

$$d(Sy, STx) < g(\rho(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)),$$

其中 $g \in F^*$• 则 ST 在 X 中有唯一不动点 u, TS 在 Y 中有唯一不动点 v• 从而 $Tu = v$ 和 $Sv = u$•

---

* 收稿日期: 2005_08_04; 修订日期: 2006_05_30
作者简介: 阿•阿利欧谢(1972—), 教授, 博士(E_mail: abdmath@hotmail.com)•
原稿为英文, 海治 译, 张禄坤 校.

2 完备度量空间上的不动点

隐含关系

记$\mathbb{R}_+$为非负实数集, F 为所有实函数$f: R_+^4 \to \mathbb{R}$ 的集合, 使得

(i) 在每一个坐标变量中, f 为上半连续•

(ii) 若对所有 $u, v \geqslant 0$, 任一$f(u, v, 0, u) \leqslant 0$或$f(u, v, u, 0) \leqslant 0$成立, 则存在一个实常数$0 \leqslant c < 1$, 使得 $u < cv$•

例 1 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 - c\max\{t_2, t_3, t_4\}$, $0 \leqslant c < 1$•

(i) 是显然的, 因为f 连续•

(ii) 假设 $u, v \geqslant 0$, 则$f(u, v, 0, u) = u - c\max\{v, u\} \leqslant 0$• 若 $v \leqslant u$, 则 $u \leqslant cu < u$ 相矛盾• 因此, $u \leqslant cv$• 同样地, 若$f(u, v, u, 0) \leqslant 0$, 则 $u \leqslant cv$, (ii) 得证•

例 2 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^2 - c_1\max\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - c_2\max\{t_1t_3, t_2t_4\} - c_3t_3t_4$•

其中 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_+$且 $c_1 + c_2 < 1$•

(i) 是显然的, 因为f 连续•

(ii) 假设 $u, v \geqslant 0$, 则$f(u, v, 0, u) = u^2 - c_1\max\{v^2, u^2\} - c_2uv \leqslant 0$• 若 $v \leqslant u$, 则 $u^2 \leqslant (c_1 + c_2)u^2 < u^2$ 相矛盾• 因此 $u \leqslant av$, 其中 $a = \sqrt{c_1 + c_2} < 1$•

同样地, 若 $f(u, v, u, 0) \leqslant 0$, 则 $u \leqslant bv$, 其中 $b = c_1/(1 - c_2) < 1$• 我们取 $c = \max\{a, b\} < 1$, 则(ii) 得证•

例 3 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^3 - \alpha t_1^2t_2 - \beta t_1t_3t_4 - \gamma t_2t_3^2 - \delta t_3t_4^2$,

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}_+$且 $\alpha + \gamma < 1$•

(i) 是显然的, 因为f 连续的•

(ii) 假设 $u, v \geqslant 0$, 则$f(u, v, 0, u) = u^3 - \alpha u^2v = u^2(u - \alpha v) \leqslant 0$• 那么 $u \leqslant \alpha v$• 同样地, 若$f(u, v, u, 0) \leqslant 0$, 则 $u \leqslant (\alpha + \gamma)v$• 我们取 $c = \max\{\alpha, \gamma\} < 1$, 则(ii) 得证•

例 4 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^3 - c\dfrac{t_1^2t_2^2 + t_3^2t_4^2}{t_2 + t_3 + t_4 + 1}$,

其中 $0 < c < 1$•

(i) 是显然的, 因为f 连续•

(ii) 假设 $u, v \geqslant 0$, 则

$$f(u, v, 0, u) = u^3 - c\frac{u^2v^2}{v + u + 1} \leqslant 0•$$

那么

$$u \leqslant c\frac{v^2}{v + u + 1} < cv•$$

类似地, 若$f(u, v, u, 0) \leqslant 0$, 则 $u \leqslant cv$, (ii) 得证•

例 5 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1 + pt_2)t_1 - p\max\{t_1t_2, t_3t_4\} - c\max\{t_2, t_3, t_4\}$,

其中 $0 < c < 1$ 和 $p \geqslant 0$•

(ⅰ) 是显然的, 因为 f 连续•

(ⅱ) 假设 $u, v \geqslant 0$, 则

$$f(u, v, 0, u) = (1+pv)u - puv - c\max\{v, u\} \leqslant 0•$$

若 $v \leqslant u$, 则 $u \leqslant cu < u$ 相矛盾• 因此 $u \leqslant cv$•

类似地, 若 $f(u, v, u, 0) \leqslant 0$, 则 $u \leqslant cv$, (ⅱ) 得证•

例 6 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 - c\max\{t_2, t_3, t_4, b\sqrt{t_3 t_4}\}$,

其中 $b \geqslant 0$ 和 $0 < c < 1$•

(ⅰ) 是显然的, 因为 f 连续•

(ⅱ) 的证明同例 1•

例 7 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 - (\alpha t_2^p + \beta t_3^p + \gamma t_4^p)^{1/p}$,

其中 $p > 0$ 和 $0 < \alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma < 1$•

(ⅰ) 是显然的, 因为 f 连续•

(ⅱ) 假设 $u, v \geqslant 0$, 则 $f(u, v, 0, u) = u - (\alpha v^p + \gamma u^p)^{1/p} \leqslant 0$ 和 $u \leqslant av$, 其中 $a = (\alpha/(1-\gamma))^{1/p} < 1$•

类似地, 若 $f(u, v, u, 0) \leqslant 0$, 则 $u \leqslant bv$, 其中 $b = (\alpha/(1-\beta))^{1/p} < 1$•

我们取 $c = \max\{a, b\} < 1$, 则(ⅱ)得证•

现在, 使用隐含关系来证明完备度量空间中的不动点定理•

定理 3 令 (X, d) 和 (Y, ρ) 为完备度量空间, 又令 S、T 为 Y 到 X 的映射, 对所有 X 中的 x、Y 中的 y, 下列不等式满足

$$f(\rho(Tx, TSy), d(x, Sy), \rho(y, Tx), \rho(y, TSy)) \leqslant 0, \tag{1}$$

$$g(d(Sy, STx), \rho(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)) \leqslant 0, \tag{2}$$

其中 $f, g \in F$• 则 ST 在 X 中有唯一不动点 u, TS 在 Y 中有唯一不动点 v, 从而, $Tu = v$ 和 $Sv = u$•

证明 令 x_0 为 X 中的任意点• 在 X 和 Y 中引入数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$

$$y_n = Tx_{n+1},\quad x_n = Sy_n,\qquad n = 1, 2, \cdots•$$

应用不等式(1), 得到

$$f(\rho(Tx_{n-1}, TSy_n), d(x_{n-1}, Sy_n), \rho(y_n, Tx_{n-1}), \rho(y_n, TSy_n)) =$$
$$f(\rho(y_n, y_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n), 0, \rho(y_n, y_{n+1})) \leqslant 0,$$

又根据(ⅱ), 得到

$$\rho(y_n, y_{n+1}) \leqslant cd(x_{n-1}, x_n), \tag{3}$$

其中 $c = \max\{a, b\}$, 而 a, b 是实常数, f 和 g 分别满足(ⅱ)•

应用不等式(2), 有

$$g(d(Sy_n, STx_n), \rho(y_n, Tx_n), d(x_n, Sy_n), d(x_n, STx_n)) =$$
$$g(d(x_n, x_{n+1}), \rho(y_n, y_{n+1}), 0, d(x_n, x_{n+1})) \leqslant 0,$$

又由(ⅱ), 有

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant c\rho(y_n, y_{n+1}) \cdot \tag{4}$$

根据不等式(3)和(4),我们可以得到

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant c^2 d(x_{n-1}, x_n),$$

由此引入不等式

$$d(x_n, x_{n+1}) \leqslant c^{2n} d(x_0, x_1), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{5}$$

同样地

$$\rho(y_n, y_{n+1}) \leqslant c^{2n-2} d(x_0, x_1), \qquad n = 1, 2, \cdots \tag{6}$$

因为 $0 < c < 1$, 由不等式(5) 和不等式(6) 可知, $\{x_n\}$ 是 X 中的一个 Cauchy 数列, 并在 X 中有极限 u, $\{y_n\}$ 是 Y 中的一个 Cauchy 数列, 并在 Y 中有极限 v•

若 $Tu \neq v$, 由不等式(1), 得到

$$f(\rho(Tu, TSy_{n-1}), d(u, Sy_{n-1}), \rho(y_{n-1}, Tu), \rho(y_{n-1}, TSy_{n-1})) =$$
$$f(\rho(Tu, y_n), d(u, x_{n-1}), \rho(y_{n-1}, Tu), \rho(y_{n-1}, y_n)) \leqslant 0 \cdot$$

当 n 趋向无穷大, 并由(i), 得到

$$\rho(Tu, v) \leqslant f(0, \rho(v, Tu), 0) \cdot$$

由(ii)知道 $\rho(Tu, v) = 0$, 因此 $Tu = v$•

同样地, $Sv = u$, 因此 $STu = Sv = u$ 和 $TSv = Tu = v$•

为证明其唯一性, 假设 TS 在 Y 中存在另一个不动点 v'• 通过不等式(1), 可得

$$f(\rho(Tu, TSv'), d(u, Sv'), \rho(v', v), 0) = f(\rho(v, v'), d(Sv, Sv'), \rho(v', v), 0) \leqslant 0,$$

又由(ii), 可得

$$\rho(v, v') \leqslant cd(Sv, Sv') \cdot \tag{7}$$

若 $Sv \neq Sv'$, 则由不等式(2), 可得

$$g(d(Sv, Sv'), \rho(v, v'), d(Sv, Sv'), 0) \leqslant 0,$$

又从(ii), 可得

$$d(Sv, Sv') \leqslant c\rho(v, v') \cdot \tag{8}$$

由(7)和(8), 可知 $v = v'$, 从而 v 唯一的•

同样可以证明 u 是唯一的, 从而定理证毕•

3 紧致度量空间上的不动点

隐含关系

记 F^* 为所有实函数 $f: R_+^4 \to \mathrm{R}$ 的集合, 且对每一个坐标变量为上半连续, 则

(iii) 若对所有 $u, v \geqslant 0$, 任一 $f(u, v, 0, u) < 0$ 或 $f(u, v, u, 0) < 0$ 成立, 则 $u < v$•

例 8 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 - c\max\{t_2, t_3, t_4\}$, $0 < c \leqslant 1$•

例 9 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^2 - c_1\max\{t_2^2, t_3^2, t_4^2\} - c_2\max\{t_1t_3, t_2t_4\} - c_3t_3t_4$,

其中 $c_1, c_2, c_3 \in \mathrm{R}_+$ 且 $c_1 + c_2 \leqslant 1$•

例 10 $f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^3 - \alpha t_1^2 t_2 - \beta t_1 t_3 t_4 - \gamma t_2 t_3^2 - \delta t_3 t_4^2$,

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{R}_+$ 且 $\alpha + \gamma \leqslant 1$•

例 11　$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1^3 - c\dfrac{t_3^2t_4^2 + t_5^2t_6^2}{t_2 + t_3 + t_4 + 1}$,

其中 $0 < c \leqslant 1$.

例 12　$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = (1 + pt_2)t_1 - p\max\{t_1t_2, t_3t_4\} - c\max\{t_2, t_3, t_4\}$,

其中 $p \geqslant 0$ 和 $0 < c \leqslant 1$.

例 13　$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 - c\max\{t_2, t_3, t_4, b\sqrt{t_3t_4}\}$,

其中 $b \geqslant 0$ 和 $0 < c \leqslant 1$.

例 14　$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = t_1 - (\alpha t_2^p + \beta t_3^p + \gamma t_4^p)^{1/p}$,

其中 $p > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}_+$ 和 $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$.

验证以上函数可知, 它们都在 F^* 中.

现在通过隐含关系, 证明紧致度量空间中的不动点定理.

定理 4　令 (X, d) 和 (Y, ρ) 为紧致度量空间, 令 T 为一贯 X 到 Y 的连续映射, 又令 S 为一个 Y 到 X 的连续映射. 则对所有 X 中的 x、Y 中的 y 和 $x \neq Sy$, 下列不等式成立

$$f(\rho(Tx, TSy), d(x, Sy), \rho(y, Tx), \rho(y, TSy)) < 0, \tag{9}$$

其中 $f \in F^*$, 且对所有 X 中的 x、Y 中的 y 和 $y \neq Tx$ 下列不等式成立

$$g(d(Sy, STx), \rho(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)) < 0, \tag{10}$$

其中 $g \in F^*$, 则 ST 在 X 中有唯一不动点 u, 同时 TS 在 Y 中有唯一不动点 v. 从而, $Tu = v$ 和 $Sv = u$.

证明　在 X 上由 $\varphi(x) = d(x, STx)$ 定义连续函数 $\varphi: X \to \mathbf{R}_+$. 因为为 X 是紧致的, 所以在 X 中存在一点 u, 使得

$$\varphi(u) = d(u, STu) = \min\{d(x, STx): x \in X\}.$$

假设 $Tu \neq TSTu$, 则 $u \neq STu$. 由不等式(10), 得到

$$g(d(STu, STSTu), \rho(Tu, TSTu), 0, d(STu, STSTu)) < 0,$$

又由(iii), 可得

$$d(STu, STSTu) < \rho(Tu, TSTu). \tag{11}$$

利用不等式(9), 得到

$$f(\rho(Tu, TSTu), d(u, STu), 0, \rho(Tu, TSTu)) < 0,$$

又由(iii), 可得

$$\rho(Tu, TSTu) < d(u, STu). \tag{12}$$

由不等式(11) 和(12), 可推出

$$\varphi(STu) = d(STu, STSTu) < \rho(Tu, TSTu) < d(u, STu) = \varphi(u),$$

该式相矛盾, 因此 $TSTu = Tu$.

取 $Tu = w$ 和 $Sw = z$, 得到

$$ST(STu) = S(TSTu) = STu = Sw = z$$

和

$$w = Tu = TS(Tu) = T(STu) = Tz,$$

证明了 z 和 w 的存在性•

为证明其唯一性, 假设 ST 有另一个不动点 z', 不等式(10), 得到

$$g(d(STz, STz'), \rho(Tz, Tz'), d(z', z), 0) = g(d(z, z'), \rho(Tz, Tz'), d(z, z'), 0) < 0,$$

又由(iii), 可得

$$d(z, z') < \rho(Tz, Tz')• \tag{13}$$

由不等式(9), 得到

$$f(\rho(Tz, TSTz'), d(z, z'), \rho(Tz', Tz), 0) = f(\rho(Tz, Tz'), d(z, z'), \rho(Tz', Tz), 0) < 0,$$

又由(iii), 可得

$$\rho(Tz, Tz') < d(z, z'), \tag{14}$$

不等式(13)和不等式(14)导致矛盾, 因此 $z = z'$, z 是唯一的•

同样地, 可证明 w 有唯一性, 从而定理证毕•

备注

若有

$$f(\rho(Tx, TSy), d(x, Sy), \rho(y, Tx), \rho(y, TSy)) = \rho(Tx, TSy), c\max\{d(x, Sy), \rho(y, Tx), \rho(y, TSy)\}$$

和

$$g(d(Sy, STx), \rho(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)) = d(Sy, STx) - c\max\{\rho(y, Tx), d(x, Sy), d(x, STx)\},$$

其中 $0 \leqslant c < 1$, 则可得到文献[2]中的结论•

致谢 作者感谢 Telci 博士和他的论文[1]•

[参 考 文 献]

[1] M• 特尔西. 完备和紧度量空间中的不动点[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(5): 499—503.

[2] Fisher B. Fixed point on two metric spaces[J]. Glasnik Mat, 1981, **16**(36): 333—337.

Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying an Implicit Relation on Two Complete and Compact Metric Spaces

Abdlkrim Aliouche[1], Brian Fisher[2]

(1. Department of Mathematics, University of Lari Ben M' Hidi, Oum EI Bouaghi 04000, Algria;

2. Department of Mathematics, University of Leicester, Leicester, LE1 7RH, U.K.)

Abstract: First, the implicit relations were given. A common fixed point theorem was proved for two mappings satisfying implicit relation functions. A further fixed point theorem was proved for mappings satisfying implicit relation functions on two compact metric spaces.

Key words: complete metric space; compact metric space; fixed points; implicit relation