

非线性弹性杆波动方程的摄动分析*

吕克璞, 郭 鹏, 张 磊, 易金桥, 段文山

(1. 西北师范大学 物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(戴世强推荐)

摘要: 针对计入横向惯性效应后的非线性弹性杆纵向波动方程进行了分析. 在小振幅、长波长的一般情况下, 根据远方场简单波理论, 采用约化摄动法, 得到了 NLS 方程, 并讨论了存在 NLS 孤子的条件.

关键词: 非线性弹性杆; 远方场; NLS 方程

中图分类号: O357.1 文献标识码: A

引言及预备知识

计入由横向惯性引起的几何弥散效应的非线性弹性杆纵波运动方程为^[1]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left[1 + na_n \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{n-1} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\nu^2 J_\rho}{s} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad (1)$$

其中, s 为杆的横截面积, J_ρ 为杆截面的极惯性矩, $c_0^2 = E/\rho$ 是线弹性波的波速平方, E 为弹性模量, ρ 是材料密度, ν 是泊松比, a_n, n 均为材料常数.

关于方程(1)的孤波问题, 已有较多的研究^[1~3]. 文献[1]和文献[2]曾研究了 $n = 2$ 的情况, 均得出了方程(1)的 KdV 孤立子; 文献[3]对于 $n = 3$ 的非线性材料, 用调制摄动方法, 得出方程(1)关于小参数 ε 的三级近似的非线性 Schrödinger 方程(简称 NLS 方程)

$$i \frac{\partial Z}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} + |Z|^2 Z = 0, \quad (2)$$

证明了方程(1)在 $n = 3$ 时存在 NLS 型包络孤波解. 本文在小振幅、长波长的一般情况下, 根据远方场简单波理论, 采用约化摄动法^[4~7], 将方程(1)变换为 NLS 方程

$$i \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} - \beta |\varphi^{(1)}|^2 \varphi^{(1)} = 0, \quad (3)$$

从而得出结论: 在 $n \geq 2$ 的非线性弹性杆中存在 NLS 包络孤子.

1 向量方程和色散关系分析

设 $u_1 = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_2 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $U = (u_1, u_2)^T$, 则方程(1)可写为

* 收稿日期: 2005_12_19; 修订日期: 2006_03_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10247008)

作者简介: 吕克璞(1945—), 男, 甘肃平凉人, 教授(联系人: Tel: + 86_93_1_7972792; E_mail: guopeng_gp@126.com).

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial t \partial x^2} = 0, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -c_0^2(1 + na_n u_2^{n-1}) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{v^2 J_\rho}{s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

设 \mathbf{U} 的远场定态解为: $\mathbf{U}^{(0)} = (u_{10}, u_{20})^T$, 考虑在这个定态上传播的小振幅 δU 的平面波的扰动(当非线性项与非定常项之比远小于 1 时, 非线性项可略去)

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} + \delta \mathbf{U} e^{i l(kx - \omega t)},$$

代入方程(4)的线性化方程, 可得

$$\mathbf{W}_l \delta \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

$\delta \mathbf{U}$ 有非零解的条件为

$$|\mathbf{W}_l| = 0, \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{W}_l = -i l \mathbf{A} + i l k \mathbf{A}_0 + i l^3 \omega k^2 \mathbf{B}, \quad |l| = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} | \mathbf{U}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -c_0^2(1 + na_n u_{20}^{n-1}) \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

假定

$$\begin{cases} |\mathbf{W}_l| = 0, & |l| = 1, \\ |\mathbf{W}_l| \neq 0, & |l| \neq 1, \end{cases} \quad (7)$$

当 $l = \pm 1$ 时, 对应于这个平面波的色散关系由方程

$$| | i \mathbf{A} \pm i k \mathbf{A}_0 \pm i \omega k^2 \mathbf{B} | = 0, \quad (8)$$

给出 ω_k 关系

$$\omega = c_0 k \sqrt{\frac{1 + na_n u_{20}^{n-1}}{1 + \sigma^2 k^2}}, \quad (9)$$

其中 $\sigma^2 = v^2 J_\rho / s$.

为了以下数学推导的需要, 求解 \mathbf{A} 的特征值 λ 及其梯度分别为

$$\lambda = \pm c_0 \sqrt{1 + na_n u_2^{n-1}}, \quad (10)$$

$$\therefore_u \lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial u_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial u_2} \right)^T = \left(0, \pm c_0 \frac{n(n-1) a_n u_2^{n-2}}{2 \sqrt{1 + na_n u_2^{n-1}}} \right)^T. \quad (11)$$

求解方程组

$$\mathbf{L}_0 \mathbf{W}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W}_1 \mathbf{R}_0 = \mathbf{0}, \quad (12)$$

得 $\mathbf{L}_0, \mathbf{R}_0$ 分别为

$$\begin{cases} \mathbf{L}_0 = \left[-\frac{\omega}{k}, c_0^2(1 + na_n u_{20}^{n-1}) \right], & \mathbf{R}_0 = \left[-\frac{\omega}{k}, 1 \right]^T, \\ \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R}_0 = \frac{\omega^2}{k^2} + c_0^2(1 + na_n u_{20}^{n-1}), \end{cases} \quad (13)$$

并对于 $\mathbf{W}_1 \mathbf{R}_0 = \mathbf{0}$, (14)

两边关于 k 求导得

$$i [\mathbf{A}_0 - \Omega + (2k\omega + k^2 \Omega) \mathbf{B}] \mathbf{R}_0 + \mathbf{W}_1 \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial k} = \mathbf{0}, \quad (15)$$

其中, $\Omega = d\omega/dk$ 为波的群速度, 再用 \mathbf{L}_0 左乘(15)式, 可有

$$L_0[A_0 - \Omega I + (2k\omega + k^2\Omega)B]R_0 = \mathbf{0} \quad (16)$$

2 摄动分析与 NLS 方程的建立

在 $U^{(0)}$ 附近将 U 作小参数 ε 的渐进展开

$$U = U^{(0)} + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \dots, \quad (17)$$

$$U^{(j)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_l^{(j)}(\xi, \tau) e^{il(kx - \omega t)}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

$$A = A_0 + \varepsilon(U^{(1)T} \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)} + \dots), \quad (19)$$

作变换 $\xi = \varepsilon(x - \Omega t), \quad \tau = \varepsilon^2 t$ (20)

将(17)式~(20)式代入方程(4), 分别得 $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3$ 级近似方程为:

$$W_l U_l^{(1)} = \mathbf{0}, \quad |l| = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

$$W_l U_l^{(2)} + (A_0 - \Omega I + k^2 l^2 \Omega B + 2kl^2 \omega B) \frac{\partial U_l^{(1)}}{\partial \xi} + \sum_{l'=-\infty}^{\infty} (U_{l-l'}^{(1)T} \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) \cdot i l' k U_{l'}^{(1)} = 0, \quad |l| = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

$$W_l U_l^{(3)} + (I - l^2 k^2 B) \frac{\partial U_l^{(1)}}{\partial \tau} - (2ikl \Omega B + il \omega B) \frac{\partial^2 U_l^{(1)}}{\partial \xi^2} + (A_0 - \Omega I + k^2 l^2 \Omega B + 2kl^2 \omega B) \frac{\partial U_l^{(2)}}{\partial \xi} + \sum_{l'=-\infty}^{\infty} (U_{l-l'}^{(1)T} \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) \left[\frac{\partial U_{l'}^{(1)}}{\partial \xi} + il' k U_{l'}^{(2)} \right] = 0, \quad |l| = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

对于(21)式, 当 $|l| \neq 1$ 时, 由于 $|W_l| \neq 0$ 方程(21)只有0解, 即

$$U_l^{(1)} = \mathbf{0} \quad (|l| \neq 1). \quad (24)$$

当 $|l| = 1$ 时, 因为 $|W_l| = 0$, 故(21)式必有非0解, 且与特征向量 R_0 成比例. 为此设

$$U_l^{(1)} = \varphi^{(1)}(\xi, \tau) R_0, \quad U_{-l}^{(1)} = \varphi^{(1)}(\xi, \tau) \overline{R_0}, \quad (25)$$

其中, $\varphi^{(1)}(\xi, \tau)$ 是随空间、时间缓慢变化的待定函数.

对于(22)式, 其中第3项对 l' 求和的表达式仅对于 $|l| = 2$ 和 $|l| = 0$ 才会出现, 而当 $|l| \neq 2$ 和 $|l| \neq 0$ 时求和均为0. 所以, 当 $l = 1$ 时,

$$\sum_{l'=-\infty}^{\infty} (U_{l-l'}^{(1)T} \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) \cdot i l' k U_{l'}^{(1)} = 0, \quad (26)$$

于是, 将(25)式、(26)式和(15)式代入(22)式可得

$$W_1 \left[U_1^{(2)} + i \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial R_0}{\partial k} \right] = 0, \quad (27)$$

因为 $|W_1| = 0$, 故(27)式必有非0解. 且与方程(12)的解向量 R_0 成比例. 设

$$U_1^{(2)} + i \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial R_0}{\partial k} = \varphi^{(2)}(\xi, \tau) R_0,$$

得
$$U_1^{(2)} = \varphi^{(2)}(\xi, \tau) R_0 - i \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial R_0}{\partial k}. \quad (28)$$

当 $l = 0$ 时, 考虑(25)式, 方程(22)变为

$$W_0 U_0^{(2)} = ik [R_0^T \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}] R_0 - (R_0^T \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) R_0 | \varphi^{(1)}|^2 = 0 \quad (29)$$

因为 $W_0 = \mathbf{0}$, 所以 $U_0^{(2)}$ 为任意, 可令

$$U_0^{(2)} = \mathbf{0} \quad (30)$$

当 $l = 2$ 时, 考虑(24)式、(25)式, 方程(22)变为

$$W_2 U_2^{(2)} + ik(\mathbf{R}_0^T \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) \mathbf{R}_0 (\varphi^{(1)})^2 = \mathbf{0} \quad (31)$$

若设

$$U_2^{(2)} = (\varphi^{(1)})^2 \mathbf{R}_2^{(2)}, \quad (32)$$

将(32)式代入(31)式得

$$W_2 \mathbf{R}_2^{(2)} = - ik(\mathbf{R}_0^T \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) \mathbf{R}_0, \quad (33)$$

因而

$$\mathbf{R}_2^{(2)} = - W_2^{-1} ik(\mathbf{R}_0^T \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) \mathbf{R}_0$$

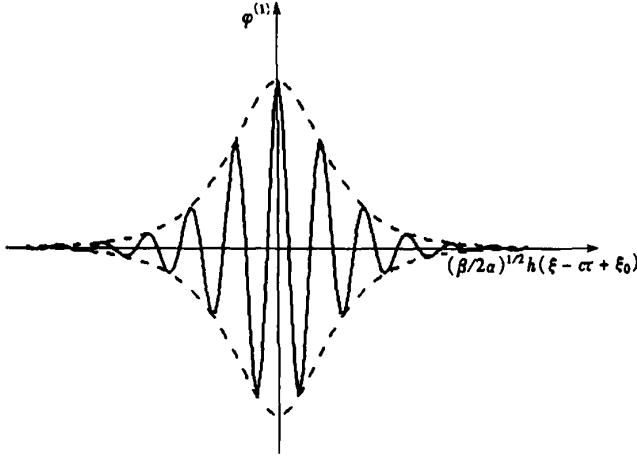


图1 包络孤立波解

由 $|W_2| \neq 0$, 其逆矩阵为

$$W_2^{-1} = \frac{-2i}{|W_2|} \begin{pmatrix} \omega & -kc_0^2 \\ -k & 4k^2\omega\sigma^2 + \omega \end{pmatrix}, \quad (34)$$

所以求得

$$\mathbf{R}_2^{(2)} = \frac{-2kb_n}{|W_2|} \begin{pmatrix} \omega \\ -k \end{pmatrix}, \quad (35)$$

其中

$$b_n = -c_0^2 n(n-1) a_n u_{20}^{n-2}. \quad (36)$$

对方程(23), 当 $l = 1$ 时, 对 l 求和中不为0的只有 $U_2^{(2)}$, 利用(25)式、(28)式和(32)式, 则方程(23)变为

$$\begin{aligned} W_1 U_1^{(3)} + (I - k^2 \mathbf{B}) \mathbf{R}_0 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau} - (2ik \mathbf{\Omega} \mathbf{B} + i \omega \mathbf{B}) \mathbf{R}_0 \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\ (A_0 - \mathbf{\Omega} I + k^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{B} + 2k \omega \mathbf{B}) \left[\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \xi} \mathbf{R}_0 - i \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial k} \right] + \\ (\mathbf{R}_0^T \cdot \cdot \cdot_u A | U^{(0)}) 2ik \mathbf{R}_2^{(2)} | \varphi^{(1)} |^2 \varphi^{(1)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (37)$$

用 L_0 左乘(37)式, 并考虑(12)式和(16)式可得 $\varphi^{(1)}(\xi, \tau)$ 满足的方程

$$i \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi^{(1)}}{\partial \xi^2} - \beta | \varphi^{(1)} |^2 \varphi^{(1)} = 0, \quad (38)$$

其中

$$\alpha = \frac{L_0(2k\Omega\mathbf{B} + \omega\mathbf{B})\mathbf{R}_0 + L_0(A_0 - \Omega + k^2\Omega\mathbf{B} + 2k\omega\mathbf{B})\frac{\partial\mathbf{R}_0}{\partial k}}{L_0(\mathbf{I} - k^2\mathbf{B})\mathbf{R}_0} =$$

$$\frac{\omega\sigma^2(k\sigma^2 - k^2\sigma^2 - 1)}{(1 + \sigma^2k^2)^2},$$

$$\beta = \frac{L_0(\mathbf{R}_0^T \cdot \dot{\cdot} \cdot_u \mathbf{A} | v^{(0)})2k\mathbf{R}_2^{(2)}}{L_0(\mathbf{I} - k^2\mathbf{B})\mathbf{R}_0} = - \frac{k^3 b_n^2}{6\sigma^2\omega^4(1 + \sigma^2k^2)}$$

3 讨 论

我们通过对 α, β 表达式的分析可以发现

1) 当 $n = 0, 1$ 时, $b_n = 0$, 从而 $\beta = 0$; 而当 $k = (\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - 4\sigma^2})/2\sigma^2$ 时, $\alpha = 0$. 此时弹性杆中不存在 NLS 孤子.

2) 当 $n \geq 2$, $k \neq (\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - 4\sigma^2})/2\sigma^2$ 时, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, 方程(38)有包络孤立波解^[8]

$$\varphi^{(1)} = h \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}} h (\xi - c\tau + \xi_0) \right] \exp \left[-i \left[\frac{c}{2\alpha} \xi - \left(\frac{c^2}{4\alpha} - \frac{\beta h^2}{2} \right) \tau - \delta_0 \right] \right], \quad (39)$$

其中, h 为一大于 0 的常数, 弹性杆中存在 NLS 包络孤子(如图 1 所示).

[参 考 文 献]

- [1] 庄蔚, 张善元. 非线性弹性杆中的应变孤波[J]. 力学学报, 1988, 20(1): 58—67.
- [2] 庄蔚, 杨桂通. 孤波在非线性杆中的传播[J]. 应用数学和力学, 1986, 7(7): 571—581.
- [3] DUAN Wen_shan, ZHAO Jing_bao. Solitary waves in a quadratic nonlinear elastic rod[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2000, 11(8): 1265—1267.
- [4] 谷内俊弥, 西原功修(日). 非线性波动[M]. 徐福元, 张家泰, 丁启明译. 北京: 原子能出版社, 1981, 99—119.
- [5] Taniuti T, Wei C C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1968, 24(4): 941—946.
- [6] 戴世强. 约化摄动法和非线性波远场分析[J]. 力学进展, 1982, 12(1): 2—23.
- [7] 吕克璞, 孙建安, 段文山, 等. 超 KdV 方程的减缩摄动解法[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(7): 753—757.
- [8] 倪皖荪, 魏荣爵. 水槽中的孤波[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1997, 104—112.

Perturbation Analysis for Wave Equation of A Nonlinear Elastic Rod

LÜ Ke_pu, GUO Peng, ZHANG Lei, YI Jin_qiao, DUAN Wen_shan

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University,
Lanzhou 730070, P. R. China)

Abstract: The longitudinal oscillation of a nonlinear elastic rod with lateral inertia were studied. Based on the far field and simple wave theory, a nonlinear Schrödinger (NLS) equation was established under the assumption of small amplitude and long wavelength. It is found that there are NLS envelope solitons in this system. Finally the soliton solution of the NLS equation is presented.

Key words: nonlinear elastic rod; far field; NLS equation