应用数学和力学,第 25 卷 第 6 期(2004 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004)06_0572_09

Banach 空间中的多值拟变分包含*

张石生[1,2]

(1. 宜宾学院 数学系,四川 宜宾 644007;
2. 四川大学 数学系, 成都 610064)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 引入和研究了 Banach 空间中的多值拟变分包含问题· 借助预解算子技巧,建立了某些解的存在性定理及解的迭代逼近· 文中所给出的结果改进和推广了许多人的最新结果·

关 键 词: 多值拟变分包含; 变分不等式; 算法; 预解算子; m_增生映象; 增生映象
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

近年来,在[1~4]中 Noor 引入和研究了 Hilbert 空间 H 中的下面一类变分包含问题:

设 $C(H)$ 是 H 中一切非空的紧子集的族· 设 $T, V: H \to C(H)$ 是二多值映象, $g: H \to H$ 是一单值映象· 设 $A(\cdot, \cdot): H \times H \to H$ 关于第一变量是一极大单调映象· 对给定的非线性映象 $N(\cdot, \cdot): H \times H \to H$, 考虑如下的问题: 求 $u \in H$, $w \in T(u)$, $y \in V(u)$ 使得

$$\theta \in N(w, y) + A(g(u), u)\cdot \tag{1}$$

上述问题称为多值拟变分包含· 利用预解算子技巧,某些解的存在性定理及解的迭代逼近在[1~4]中被建立·

受 Noor 上述工作的启发,本文的目的是在 Banach 空间的框架下并在不具紧性的条件下,引入和研究一类更为一般的多值拟变分包含· 借助预解算子方程技巧,在本文中建立了 Banach 空间中多值变分包含与预解算子方程的等价性,并对该类多值变分包含得出某些新的解的存在性定理和迭代逼近定理· 本文结果推广、改进和统一了 Noor 的[1~4],Chang, Kim 和 Cho 的[5~7]中相应的结果·

1 预 备 知 识

本文中处处假设 E 是一实 Banach 空间, E^* 是 E 的拓扑对偶空间, $CB(E)$ 是 E 的一切非空有界闭子集的族, $D(\cdot, \cdot)$ 是 $CB(E)$ 上的由下式定义的 Hausdorff 度量:

$$D(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y)\right\}, \qquad A, B \in CB(E)\cdot$$

又 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 表 E 与 E^* 间的对偶对, $D(T)$ 和 $R(T)$ 表 T 的定义域和值域, 而 $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式

* 收稿日期: 2002_07_04; 修订日期: 2003_12_30
作者简介: 张石生(1934—),男,云南人,教授,博士生导师(Tel: +86_28_85415930;
E_mail: sszhang_1@yahoo.com.cn)·

定义的正规对偶映象:

$$J(x)=\left\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|\cdot\|f\|,\ \|f\|=\|x\|\right\},\qquad x\in E.$$

定义 1.1　设 $A: D(A)\subset E\to 2^E$ 是一集值映象.

1) 映象 A 称为增生的, 如果对任意的 $x,y\in D(A)$, $u\in Ax$, $v\in Ay$, 存在 $j(x-y)\in J(x-y)$ 使得

$$\langle u-v, j(x-y)\rangle\geqslant 0.$$

2) 映象 A 称为 m_增生的, 如果 A 是增生的而且 $(I+\rho A)(D(A))=E$, 对每一 $\rho>0$ (等价于对某一 $\rho>0$), 其中 I 是一恒等映象. (等价于如果 A 是增生的而且 $(I+A)(D(A))=E$.)

注 1.1　如果 $E=E^*=H$ 是一 Hilbert 空间, 则增生映象的概念与单调映象的概念重合[8], 于是得知下面的结论成立:

命题 1.1 (Barbu[8, p.74])　设 $E=H$ 是一 Hilbert 空间, 则 $A: D(A)\subset H\to 2^H$ 是一 m_增生映象, 当而且仅当 $A: D(A)\subset H\to 2^H$ 是一极大单调映象.

问题 1.1　设 E 是一实 Banach 空间, $T, V, Z: E\to CB(E)$ 是 3 个集值映象, $g: E\to E$ 是一单值的满映象. 设 $A: E\times E\to 2^E$ 是一集值映象其关于第一变量是 m_增生的. 对给定的非线性映象 $N(\cdot,\cdot): E\times E\to E$, 现考虑问题: 求 $u\in E$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$, $z\in Z(u)$ 使得

$$\theta\in N(w,y)+A(g(u),z). \tag{2}$$

问题(2)称为 Banach 空间中的多值拟变分包含.

下面我们给出问题(2)的某些特殊情形:

1) 如果 $A(g(u),v)=A(g(u))$, $\forall v\in E$, 则问题(2)等价于求 $u\in E$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$ 使得

$$\theta\in N(w,y)+A(g(u)). \tag{3}$$

这一问题在 Chang 等的[5~7]中讨论过.

2) 如果 $E=H$ 是一 Hilbert 空间, $A: H\times H\to H$ 关于第一变量是一极大单调映象, 且 $Z=I$ (I 是恒等映象). 于是由命题 1.1, A 关于第一变量是 m_增生的. 故问题(2)等价于求 $u\in H$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$ 使得

$$\theta\in N(w,y)+A(g(u),u). \tag{4}$$

这一问题称为多值拟变分包含, 最先在 Noor 的[1~4]中引入并用预解算子技巧加以研究.

3) 如果 $E=H$ 是一 Hilbert 空间, $A(\cdot,u)=\partial\varphi(\cdot,u): H\times H\to H$ (其中 $\partial\varphi(\cdot,u)$ 为关于第一变量是真、凸、下半连续泛函 $\varphi(\cdot,u): H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 的次微分), 则问题(4)等价于求 $u\in H$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$ 使得

$$\langle N(w,y), g(v)-g(u)\rangle+\varphi(g(v),u)-\varphi(g(u),u)\geqslant 0,\qquad \forall v\in H. \tag{5}$$

这一问题称为集值的混合拟变分不等式(见, Noor[1,2]).

4) 如果 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 Hilbert 空间 H 中的具闭凸值集 $K(u)$ 的指示函数, 即:

$$\varphi(u,u)=I_{K(u)}(u)=\begin{cases}0, & \text{如果 } u\in K(u),\\ +\infty, & \text{否则,}\end{cases}$$

则问题(4)等价于求 $u\in H$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$, $g(u)\in K(u)$ 使得

$$\langle N(w,y), g(v)-g(u)\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in K(u). \tag{6}$$

这一问题在Noor 的[1, 2]中考虑过, 采用的方法是投影及隐Wiener_Hopf方程技巧•

5) 如果$K^*(u)=\{x\in H, \langle x, v\rangle \geqslant 0, \forall v\in K(u)\}$是$H$ 中具凸值锥$K(u)$的极锥, 则问题(6) 等价于求$u\in H, w\in T(u), y\in V(u)$使得

$$g(u)\in K(u), N(w,y)\in K^*(u), \langle N(w,y), g(u)\rangle = 0\text{•} \tag{7}$$

这一问题称为多值隐补问题(见, Noor[1, 2])•

综合上面的讨论表明: 适当选择映象T、V、Z、A、g、N 及空间E, 由(2)可以得到许多已知的及一些新型的变分不等式、变分包含及相应的最优化问题•

现在我们考察与多值拟变分包含(2)相关的预解算子方程• 为此我们先给出某些概念和符号•

定义 1.2[8] 设$A: D(A)\subset E\to 2^E$是一m_增生映象• 对任给的$\rho>0$, 映象$J_A: E\to D(A)$:

$$J_A(u) = (I+\rho A)^{-1}(u), \qquad u\in E$$

称为A 的预解算子•

注 1.2 Barbu[8, p.72]指出: 如果A 是增生映象, 则对每一$\rho>0$, 算子$(I+\rho A)^{-1}$在值域$R(I+\rho A)$上是适定的、单值的非扩张映象, 即

$$\|J_A(x)-J_A(y)\|\leqslant\|x-y\|, \qquad \forall x, y\in R(I+\rho A)\text{•}$$

由注 1.2 有下面的结果•

命题 1.2 设$A(\cdot,\cdot): E\times E\to 2^E$关于第一变量是一$m$_增生映象• 对给定的常数$\rho>0$, 记

$$J_{A(\cdot,z)} = (I+\rho A(\cdot,z))^{-1}, \qquad z\in E\text{•}$$

则对任意给定的$z\in E$, 预解算子$J_{A(\cdot,z)}$是适定的单值的非扩张映象, 即

$$\|J_{A(\cdot,z)}(x)-J_{A(\cdot,z)}(y)\|\leqslant\|x-y\|, \qquad \forall x, y\in E\text{•}$$

定义 1.3 设$T, V: E\to 2^E$是两个集值映象, $N(\cdot,\cdot): E\times E\to E$是一非线性映象•

1) 映象$x\mapsto N(x,y)$称为关于映象T 是β_Lipschitz连续的, 如果对任意的$x_1, x_2\in E$, $w_1\in Tx_1$, $w_2\in Tx_2$ 有

$$\|N(w_1,y)-N(w_2,y)\|\leqslant\beta\|x_1-x_2\|, \qquad y\in E,$$

其中$\beta>0$是一常数•

2) 映象$y\mapsto N(x,y)$称为关于映象V是γ_Lipschitz连续的, 如果对任意的$u_1, u_2\in E$, $v_1\in V(u_1)$, $v_2\in V(u_2)$,

$$\|N(x,v_1)-N(x,v_2)\|\leqslant\gamma\|u_1-u_2\|, \qquad x\in E,$$

其中$\gamma>0$是一常数•

定义 1.4 设$T: E\to CB(E)$是一集值映象, $D(\cdot,\cdot)$是$CB(E)$上的Hausdorff度量• T 称为ξ_Lipschitz 连续的, 如果对任意的$x, y\in E$

$$D(Tx, Ty)\leqslant\xi\|x-y\|,$$

其中$\xi>0$是一常数•

与Barach 空间中的多值拟变分包含(2)相关的, 我们来考虑下面的问题:

求$u, x\in E, w\in T(u), y\in V(u), z\in Z(u)$使得

$$N(w,y)+\rho^{-1}F_{A(\cdot,z)}(x) = 0, \tag{8}$$

其中 $\rho>0$ 是一常数, $F_{A(\cdot,z)}=(I-J_{A(\cdot,z)})$, 其中 I 是恒等映象, $J_{A(\cdot,z)}$ 是 $A(\cdot,z)$ 的预解算子• (8) 型的方程称为 Banach 空间中的隐预解算子方程• 当 $E=H$ 是一Hilbert 空间且 $Z=I$ 时, 则问题(8) 在 Noor 的[1~4,9] 中被引入和研究•

下面的两个引理在证明本文主要结果时起到重要的作用•

引理 1.1[10]　设 E 是一实 Banach 空间, $J: E\to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任意的 $x,y\in E$

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y,j(x+y)\rangle,\qquad \forall j(x+y)\in J(x+y)•$$

引理 1.2　下面的结论等价:

(ⅰ) (u,w,y,z), 其中 $u\in E$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$, $z\in Z(u)$, 是多值拟变分包含(2) 的解;

(ⅱ) (u,w,y,z), 其中 $u\in E$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$, $z\in Z(u)$, 是下面方程的解:

$$g(u)=J_{A(\cdot,z)}(g(u)-\rho N(w,y));\tag{9}$$

(ⅲ) (x,u,w,y,z), 其中 $x,u\in E$, $w\in T(u)$, $y\in V(u)$, $z\in Z(u)$, 是预解算子方程(8) 的解, 其中

$$\begin{cases}x=g(u)-\rho N(w,y),\\ g(u)=J_{A(\cdot,z)}(x)•\end{cases}\tag{10}$$

为了求解多值拟变分包含(2), 借助引理 1.2 及(3) 我们提出下面的算法•

算法(Ⅰ)　对任给的 $x_0,u_0\in E$, $w_0\in T(u_0)$, $y_0\in V(u_0)$, $z_0\in Z(u_0)$, 由(10) 令

$$x_1=g(u_0)-\rho N(w_0,y_0)•$$

因 g 是满射的, 故存在 $u_1\in E$, 使得

$$g(u_1)=J_{A(\cdot,z_0)}(x_1)•$$

因 $w_0\in T(u_0)$, $y_0\in V(u_0)$, $z_0\in Z(u_0)$, 由 Nadler 定理[11], 存在 $w_1\in Tu_1$, $y_1\in V(u_1)$, $z_1\in Z(u_1)$ 使得

$$\|w_0-w_1\|\leqslant(1+1)D(T(u_0),T(u_1)),$$
$$\|y_0-y_1\|\leqslant(1+1)D(V(u_0),V(u_1)),$$
$$\|z_0-z_1\|\leqslant(1+1)D(Z(u_0),Z(u_1)),$$

其中 D 是 $CB(E)$ 上的 Hausdorff 度量• 令

$$x_2=g(u_1)-\rho N(w_1,y_1)•$$

又由 g 的满射性, 存在 $u_2\in E$, 使得

$$g(u_2)=J_{A(\cdot,z_1)}(x_2)•$$

又由 Nadler 定理, 存在 $w_2\in T(u_2)$, $y_2\in V(u_2)$, $z_2\in Z(u_2)$ 使得

$$\|w_1-w_2\|\leqslant\left(1+\frac{1}{2}\right)D(T(u_1),T(u_2)),$$
$$\|y_1-y_2\|\leqslant\left(1+\frac{1}{2}\right)D(V(u_1),V(u_2)),$$
$$\|z_1-z_2\|\leqslant\left(1+\frac{1}{2}\right)D(Z(u_1),Z(u_2))•$$

继续这一方法可得到序列 $\{x_n\}$, $\{u_n\}$, $\{w_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 使得

$$(ⅰ)\ w_n\in T(u_n):\ \|w_n-w_{n+1}\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)D(T(u_n),T(u_{n+1}));\tag{11a}$$

(ii) $y_n \in V(u_n)$: $\|y_n - y_{n+1}\| \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right) D(V(u_n), V(u_{n+1}))$; (11b)

(iii) $z_n \in Z(u_n)$: $\|z_n - z_{n+1}\| \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right) D(Z(u_n), Z(u_{n+1}))$; (11c)

(iv) $x_{n+1} = g(u_n) - \rho N(w_n, y_n)$; (11d)

(v) $g(u_{n+1}) = J_{A(\cdot, z_n)}(x_{n+1})$; (11e)

对所有的 $n \geqslant 0$.

如果 $E = H$ 是一Hilbert 空间, $A(\cdot, z) = \partial \varphi(\cdot, z)$, 其中 $\varphi(\cdot, z)$ 是 H 的闭凸子集 K 的指示函数, 则 $J_{A(\cdot, z)} = P_K(z)$ (H 到 K 的投影). 则算法(Ⅰ)就归结为下面的算法:

算法(Ⅱ) 对任意给定的 $x_0, u_0 \in E, w_0 \in T(u_0), y_0 \in V(u_0), z_0 \in Z(u_0)$, 计算序列 $\{x_n\}, \{u_n\}, \{w_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 使得

(i) $w_n \in T(u_n)$: $\|w_n - w_{n+1}\| \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right) D(T(u_n), T(u_{n+1}))$; (12a)

(ii) $y_n \in V(u_n)$: $\|y_n - y_{n+1}\| \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right) D(V(u_n), V(u_{n+1}))$; (12b)

(iii) $z_n \in Z(u_n)$: $\|z_n - z_{n+1}\| \leqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right) D(Z(u_n), Z(u_{n+1}))$; (12c)

(iv) $x_{n+1} = g(u_n) - \rho N(w_n, y_n)$; (12d)

(v) $g(u_{n+1}) = P_K(x_{n+1})$; (12e)

对一切 $n \geqslant 0$.

2 主要结果

定理 2.1 设 E 是一实Banach 空间, $T, V, Z: E \to CB(E)$ 是3个集值映象, $N(\cdot, \cdot): E \times E \to E$ 是一单值的连续映象, $g: E \to E$ 是一单值的满映象, $A(\cdot, \cdot): E \to 2^E$ 关于第一变量是一 m_增生映象且满足下列条件:

(i) g 是 δ_Lipschitz 连续的且是 k_强增生的, 其中 $0 < k < 1$;

(ii) $T, V, Z: E \to CB(E)$ 分别是 μ, ξ, η_Lipschitz 连续的;

(iii) 映象 $x \mapsto N(x, y)$ 对任意给定的 $y \in E$, 关于映象 T 是 β_Lipschitz 连续的;

(iv) 对任意给定的 $x \in E$, 映象 $y \mapsto N(x, y)$ 关于映象 V 是 γ_Lipschitz 连续的;

其中所有的 $\delta, \mu, \xi, \beta, \eta, \gamma$ 都是正常数.

如果下列的条件满足:

(a) $\|J_{A(\cdot, x)}(z) - J_{A(\cdot, y)}(z)\| \leqslant \sigma \|x - y\|, \qquad \forall x, y, z \in E, \sigma > 0$;

(b) $\begin{cases} 0 < \rho < \sqrt{\dfrac{3+2k-4\delta^2-2\sigma^2\eta^2}{8(\gamma^2+\beta^2)}}, \\ 0 < \dfrac{4\delta^2+2\sigma^2\eta^2+8\rho^2(\gamma^2+\beta^2)-3}{2} < k < 1; \end{cases}$

则存在 $x, u \in E, w \in T(u), y \in V(u), z \in Z(u)$ 满足预解算子方程(8), 从而 (u, w, y, z) 是多值变分包含(2) 的解, 而且由算法(Ⅰ) 所定义的序列 $\{x_n\}, \{u_n\}, \{w_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 分别强收敛于 x, u, w, y, z.

证 由条件(i), g 是 δ_Lipschitz 的, 故由引理1.1, 对任意的 $j(u_{n+1} - u_n) \in J(u_{n+1} - u_n)$ 有

$\|u_{n+1} - u_n\|^2 =$

$$\|g(u_{n+1})-g(u_n)-g(u_{n+1})+g(u_n)-u_{n+1}+u_n\|^2\leqslant$$
$$\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2-2\langle g(u_{n+1})-g(u_n)+u_{n+1}-u_n,j(u_{n+1}-u_n)\rangle\leqslant$$
$$\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2-2(1+k)\|u_{n+1}-u_n\|^2.$$

化简即得

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2\leqslant\frac{1}{3+2k}\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2. \tag{13}$$

由(11)中的(iv)和(v)有

$$\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2=\|J_{A(\cdot,z_n)}(g(u_n)-\rho N(w_n,y_n))-$$
$$J_{A(\cdot,z_{n-1})}(g(u_{n-1})-\rho N(w_{n-1},y_{n-1}))\|^2.$$

因为下面的不等式总成立:

$$\|x+y\|^2\leqslant 2(\|x\|^2+\|y\|^2),\qquad\forall x,y\in E,$$

故由(11)的(iv)、(v)及条件(a)和条件(i)~(iv)有

$$\frac{1}{2}\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2\leqslant\|J_{A(\cdot,z_n)}(g(u_n)-\rho N(w_n,y_n))-$$
$$J_{A(\cdot,z_n)}(g(u_{n-1})-\rho N(w_{n-1},y_{n-1}))\|^2+$$
$$\|J_{A(\cdot,z_n)}(g(u_{n-1})-\rho N(w_{n-1},y_{n-1}))-$$
$$J_{A(\cdot,z_{n-1})}(g(u_{n-1})-\rho N(w_{n-1},y_{n-1}))\|^2\leqslant$$
$$\|g(u_n)-g(u_{n-1})-\rho(N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_{n-1}))\|^2+$$
$$\sigma^2\|z_n-z_{n-1}\|^2\leqslant$$
$$2\delta^2\|u_n-u_{n-1}\|^2+2\rho^2\|N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_{n-1})\|^2+$$
$$\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2D^2(Z(u_{n-1}),Z(u_n)). \tag{14}$$

现在我们考察(14)式右端第2项. 由条件(iii)和(iv)有

$$2\rho^2\|N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_{n-1})\|^2\leqslant$$
$$2\rho^2\|N(w_n,y_n)-N(w_n,y_{n-1})+N(w_n,y_{n-1})-N(w_{n-1},y_{n-1})\|^2\leqslant$$
$$4\rho^2\Big\{\|N(w_n,y_n)-N(w_n,y_{n-1})\|^2+$$
$$\|N(w_n,y_{n-1})-N(w_{n-1},y_{n-1})\|^2\Big\}\leqslant$$
$$4\rho^2\Big\{\gamma^2\|u_n-u_{n-1}\|^2+\beta^2\|u_n-u_{n-1}\|^2\Big\}=$$
$$4\rho^2\Big\{\gamma^2+\beta^2\Big\}\|u_n-u_{n-1}\|^2. \tag{15}$$

下面考察(14)的右端的第3项, 由条件(ii)有

$$\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2D^2(Z(u_{n-1}),Z(u_n))\leqslant\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\eta^2\|u_{n-1}-u_n\|^2. \tag{16}$$

代(15)和(16)于(14)中有

$$\frac{1}{2}\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2\leqslant$$
$$\left\{2\delta^2+4\rho^2(\gamma^2+\beta^2)+\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\eta^2\right\}\|u_n-u_{n-1}\|^2.$$

即

$$\|g(u_{n+1})-g(u_n)\|^2\leqslant$$

$$\left\{4\delta^2+8\rho^2(\gamma^2+\beta^2)+2\sigma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\eta^2\right\}\|u_n-u_{n-1}\|^2. \tag{17}$$

把(17)代入(13)即得

$$\|u_{n+1}-u_n\|^2\leqslant \frac{4\delta^2+8\rho^2(\gamma^2+\beta^2)+2\sigma^2(1+1/n)^2\eta^2}{3+2k}\|u_n-u_{n-1}\|^2. \tag{18}$$

令

$$\alpha_n=\sqrt{\frac{4\delta^2+8\rho^2(\gamma^2+\beta^2)+2\sigma^2(1+1/n)^2\eta^2}{3+2k}},$$

$$\alpha=\sqrt{\frac{4\delta^2+8\rho^2(\gamma^2+\beta^2)+2\sigma^2\eta^2}{3+2k}},$$

于是有

$$\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant \alpha_n\|u_n-u_{n-1}\|. \tag{19}$$

显然, $\alpha_n\to\alpha(n\to\infty)$. 易知由条件(b)可推出 $0<\alpha<1$, 故当 n 充分大时就有 $0<\alpha_n<1$. 于是由(19)知 $\{u_n\}$ 是一Cauchy列. 设 $u_n\to u$. 由条件(ii), $T,V,Z:E\to CB(E)$ 分别是 μ, ξ, η_Lipschitz 连续的, 故由(11)式中的(i)、(ii)、(iii)知 $\{w_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 也是 Cauchy 列. 设 $w_n\to w(n\to\infty)$, $y_n\to y(n\to\infty)$, $z_n\to z(n\to\infty)$. 再由(11)中的(iv)、(v)知

$$g(u_{n+1})=J_{A(\cdot,z_n)}[g(u_n)-\rho N(w_n,y_n)]. \tag{20}$$

由 g、J、N 的连续性和条件(a), 让 $n\to\infty$ 即得

$$g(u)=J_{A(\cdot,z)}[g(u)-\rho N(w,y)].$$

最后我们证明 $w\in Tu$, $y\in Vu$, $z\in Zu$. 事实上, 因 $w_n\in Tu_n$, 故有

$$\begin{aligned}d(w,Tu)&\leqslant\|w-w_n\|+d(w_n,Tu)\leqslant\\&\|w-w_n\|+d(w_n,Tu_n)+D(Tu_n,Tu)\leqslant\\&\|w-w_n\|+0+\mu\|u_n-u\|\to 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

故 $d(w,Tu)=0$, 从而 $w\in Tu$(因 $Tu\in CB(E)$).

类似可证 $y\in Vu$, $z\in Zu$. 上面的证明表明 (u,w,y,z) 是(9)的一解. 由引理 1.2 知 (u,w,y,z) 是多值拟变分包含(2)的解且由算法(I)所定义的迭代序列 $\{u_n\}$, $\{w_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 分别强收敛于 u,w,y,z. 定理证毕.

注 2.1 定理 2.1 把 Noor 的[1~4,9,12], Uko 的[13]及 Zeng 的[14]中的相应的结果由 Hilbert 空间推广到 Banach 空间, 并把 Noor 的[1~4,9,12]中的主要结果删去了紧性条件. 定理 2.1 也改进和推广了 Chang, Kim 和 Cho 的[5~7]中的相应的结果. 另外本文所采用的方法也与[1~4,9,12]中所用的方法迥异.

下面的结果由定理 2.1 直接可得.

定理 2.2 设 H 是一实 Hilbert 空间. 设满足下面的条件:

(i) $g:H\to H$ 是 δ_Lipschitz 连续的和满射的 k_强单调映象, 其中 $k\in(0,1)$ 是一常数;

(ii) 对任意固定的 $z\in H$, $A(\cdot,z)=\partial\varphi(\cdot,z):H\to 2^H$ 关于第一变量是极大单调的, 其中 $\varphi(\cdot,\cdot):H\times H\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 关于第一变量是真凸下半连续泛函;

(iii) $T,V,Z:H\to CB(H)$ 分别是 μ, ξ, η_Lipschitz 连续的;

(iv) $N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$ 是一连续映象而且映象 $x\mapsto N(x,y)$ 关于映象 T 是 β_Lipschitz 连续的;

(v) 映象 $y\mapsto N(x,y)$ 关于映象 V 是 γ_Lipschitz 连续的, 其中 δ、μ、ξ、β、γ 均为正常数.

如果下列条件满足

(a) $\|J_{A(\cdot,x)}(z)-J_{A(\cdot,y)}(z)\| \leqslant \sigma\|x-y\|, \qquad \forall x,y,z\in H,\ \sigma>0;$

(b) $$\begin{cases} 0<\rho<\sqrt{\dfrac{3+2k-4\delta^2-2\sigma^2\eta^2}{8(\gamma^2+\beta^2)}}, \\ 0<\dfrac{4\delta^2+2\sigma^2\eta^2+8\rho^2(\gamma^2+\beta^2)-3}{2}<k<1; \end{cases}$$

则存在 $x,u\in H, w\in T(u), y\in V(u), z\in Z(u)$ 满足方程(8), 而且由算法(Ⅱ)所定义的迭代序列 $\{x_n\},\{u_n\},\{w_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 分别强收敛于 $x,u,w,y,z\in E$•

注 2.2　定理 2.2 也改进和推广了 Noor 的[1~4, 9]中的相应的结果•

[参　考　文　献]

[1] Noor M A. Set_valued quasi variational inequalities[J]. K J Comput Appl Math, 2000, **7**: 101—113.

[2] Noor M A. Three_step approximation schemes for multivalued quasi variational inclusions[J]. Nonlinear Funct Anal Appl, 2001, **6**(3): 383—394.

[3] Noor M A. Two_step approximation schemes for multivalued quasi variational inclusions[J]. Nonlinear Funct Anal Appl, 2002, **7**(1): 1—14.

[4] Noor M A. Multivalued quasi variational inclusions and implicit resolvent equations[J]. Nonlinear Anal TMA, 2002, **48**(2): 159—174.

[5] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et al. Generalized set_valued variational inclusions in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2000, **246**: 409—422.

[6] Chang S S. Set_valued variational inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2000, **248**: 438—454.

[7] Chang S S, Kim J K, Kim K H. On the existence and iterative approximation problems of solutions for set_valued variational inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2002, **268**: 89—108.

[8] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces[M]. Leyden: Noordhaff, 1979.

[9] Noor M A. Generalized set_valued variational inclusions and resolvent equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, **228**: 206—220.

[10] Chang S S. Some problems and results in the study of nonlinear analysis[J]. Nonlinear Anal TMA, 1997, **30**: 4197—4208.

[11] Nadler S B. Multi_valued contraction mappings[J]. Pacific J Math, 1969, **30**: 475—488.

[12] Noor M A. Some algorithms for general monotone mixed variational inequalities[J]. Math Computer Modelling, 1999, **29**(7): 1—7.

[13] Uko L U. Strongly nonlinear generalized equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, **220**: 65—76.

[14] Zeng L U. Iterative algorithm for finding approximate solutions to completely generalized strongly nonlinear quasi_variational inequality[J]. J Math Anal Appl, 1996, **201**: 180—191.

Multi_Valued Quasi Variational Inclusions in Banach Spaces

ZHANG Shi_sheng[1, 2]
(1. Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, P. R. China)

Abstract: The purpose is to introduce and study a class of more general multivalued quasi variational inclusions in Banach spaces. By using the resolvent operator technique some existence theorem of solutions and iterative approximation for solving this kind of multivalued quasi variational inclusions are established. The results generalize, improve and unify a number of Noor's and others' recent results.

Key words: multivalued quasi variational inclusion; variational inequality; algorithm; resolvent equation; m_accretive mapping; accretive mapping