文章编号: 1000_0887(2006) 09_1117_05

解线性方程组的预条件 Gauss_Seidel 型迭代法*

程光辉, 黄廷祝, 成孝予

(电子科技大学 应用数学学院, 成都 610054)

(顾元宪 推荐)

摘要: 给出了解线性方程组的预条件 Gauss_Seidel 型方法, 提出了选取合适的预条件因子• 并讨论了对 Z_矩阵应用这种方法的收敛性, 给出了收敛最快时的系数取值• 最后给出数值例子, 说明选取合适的预条件因子应用 Gauss_Seidel 方法求解线性方程组是有效的•

关 键 词: Gauss_Seidel 方法; 预条件迭代法; Z_矩阵
中图分类号: O241.6 文献标识码: A

引 言

求解线性方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$ 是非奇矩阵, $\boldsymbol{b} \in R^{n\times 1}$, $\boldsymbol{x} \in R^{n\times 1}$• 若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M} - \boldsymbol{N}$, 其中 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N} \in R^{n\times n}$ 并且 $\boldsymbol{M}$ 是非奇的, 则分裂迭代方法可以表示为

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

在假设 $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的条件下, 不失一般性我们可以设

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵, $-\boldsymbol{L}$ 和 $-\boldsymbol{U}$ 分别是严格下三角矩阵和严格上三角矩阵• 当 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{U}$ 时, 得到的是 Gauss_Seidel 方法• 现在已有一些对 Gauss_Seidel 方法的修改的预条件法[1], 提高了迭代法的收敛速度•

给出了在某种假设条件下, 应用本文给出的预条件方法解(1), 比用直接方法解收敛速度要快, 同时也给出了方法的最优参数的取值范围• 因此, 考虑线性预条件方程组

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} + \beta\boldsymbol{S})\boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{I} + \beta\boldsymbol{S})\boldsymbol{b}, \tag{5}$$

* 收稿日期: 2005_12_07; 修订日期: 2006_03_27
基金项目: 教育部“新世纪人才支持计划”基金资助项目(2004); 四川省应用基础研究基金资助项目(05JY029_068_2)
作者简介: 程光辉(1979—), 男, 长春人, 博士(E_mail: cgh612@126.com);
黄廷祝(联系人. Tel: +86_28_83202637; E_mail: tzhuang@uestc.edu.cn)•

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \beta \in R. \tag{6}$$

由下式给出Gauss_Seidel 法

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}^{(k)} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_{G\_S} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}. \tag{8}$$

现在,我们考虑线性方程组(4),其中

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} + \beta\boldsymbol{S})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{I} + \beta\boldsymbol{S} - \boldsymbol{L} - \beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{U} = \boldsymbol{D} - \boldsymbol{L} - \boldsymbol{U}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n), \quad d_i = 1, \; i = 1, \cdots, n-1; \; d_n = 1 + \beta a_{1n}a_{n1}.$$

下面,给出几个我们需要的定义和结果.

定义 1[2] 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个L_矩阵,如果 $a_{ii} > 0$, $i = 1, \cdots, n$, 并且 $a_{ij} \leqslant 0$, 对所有的 $i, j = 1, \cdots, n$ 且 $i \neq j$.

定义 2[3] 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是不可约的,如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的图是强连通的.

引理 1[3] 若 $\boldsymbol{A} \geqslant \boldsymbol{0}$ 是不可约的 $n \times n$ 矩阵. 则

1) $\boldsymbol{A}$ 有一个正的实特征值等于它的谱半径; 2) $\rho(\boldsymbol{A})$ 对应的特征向量 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$; 3) $\rho(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的单特征值.

引理 2[4] 若 $\boldsymbol{A}$ 是非负矩阵. 则

1) 如果 $\alpha\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 对某一个非负向量 $\boldsymbol{x}$ 且 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 成立,则 $\alpha \leqslant \rho(\boldsymbol{A})$; 2) 如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \beta\boldsymbol{x}$ 对某一个正向量 $\boldsymbol{x}$ 成立,则 $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \beta$. 进一步,如果 $\boldsymbol{A}$ 是不可约并且若有 $\boldsymbol{0} \neq \alpha\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \beta\boldsymbol{x}$, $\alpha\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \beta\boldsymbol{x}$ 对某一非负向量 $\boldsymbol{x}$ 成立,则

$$\alpha < \rho(\boldsymbol{A}) < \beta$$

且 $\boldsymbol{x}$ 是一正向量.

1 预条件 Gauss_Seidel 方法

在这部分中,给出比用 Gauss_Seidel 方法求解线性方程组(1)收敛速度快的预条件 Gauss_Seidel方法,同时也给出了方法的最优参数的取值范围. 因此,如果我们对(4)用 Gauss_Seidel 方法,即得到预条件 Gauss_Seidel 迭代法,迭代矩阵为

$$\boldsymbol{B}_{G\_S\beta} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} + \beta\boldsymbol{S} - \beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}. \tag{10}$$

分别考虑由(8)和(9)定义的经典 Gauss_Seidel 迭代矩阵和预条件 Gauss_Seidel 迭代矩阵. 易知 $\boldsymbol{B}_{G\_S}$ 和 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}$ 的第一列元素均为0. 因此,我们可以把矩阵 $\boldsymbol{B}_{G\_S}$ 和 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}$ 分解为

$$\boldsymbol{B}_{G\_S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_0 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{G\_S\beta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\beta 0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\beta 1} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_{\beta 1}$ 均为 $n-1$ 阶方阵.

现在,给出以下结果.

定理 1 若 $\boldsymbol{A}$ 是Z_矩阵满足 $a_{ni} \neq 0$ 和 $0 \leqslant a_{n1}a_{1n} < 1$, $-1 \leqslant \beta \leqslant \min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$, $i = 2, \cdots, n-1$ (若 $a_{n1}a_{1i} = 0$, 记 $1/(a_{n1}a_{1i}) = +\infty$). 则

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L} + \beta\boldsymbol{S} - \beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U} \geqslant \boldsymbol{0}.$$

证明　易知

$$\boldsymbol{L}-\beta\boldsymbol{S}+\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}=$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & 0 & 0 \\ (\beta+1)a_{n1} & \beta a_{n1}a_{12}+a_{n2} & \cdots & \beta a_{n1}a_{1,n-1}+a_{n,n-1} & \beta a_{n1}a_{1n} \end{pmatrix},$$

由于 $-1\leqslant\beta\leqslant\min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$，因此得到

$$\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}\geqslant\boldsymbol{0}.$$

定理 2　若 $\boldsymbol{A}$ 是不可约Z_矩阵满足 $a_{ni}\neq0$ 和 $0\leqslant a_{n1}a_{1n}<1$. 则 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_{\beta1}$ 也是不可约矩阵(其中 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_{\beta1}$ 由(11)定义).

证明　由文献[5]易证 $\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_{\beta1}$ 也是不可约矩阵.

定理 3　设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$ 是不可约Z_矩阵并且满足 $a_{ni}\neq0$ 和 $0\leqslant a_{n1}a_{1n}<1$, $\boldsymbol{B}_{G\_S}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}$ 分别是经典的Gauss_Seidel 方法的迭代矩阵和修改的Gauss_Seidel 方法的迭代矩阵.　那么

1) 若 $0<\lambda<1$, $-1\leqslant\beta<0$ 或 $\lambda>1$, $0<\beta\leqslant\min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$，则

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta})<\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S}).$$

2) 若 $\lambda=1$, $-1\leqslant\beta\leqslant\min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$ 或 $\beta=0$，则

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta})=\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S}).$$

3) 若 $0<\lambda<1$, $0<\beta\leqslant\min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$ 或 $\lambda>1$, $-1\leqslant\beta<0$，则

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta})>\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S}).$$

证明　首先,存在一个正的向量 ω 使得

$$\boldsymbol{B}_{G\_S}\omega=\lambda\omega,\tag{12}$$

其中 $\lambda=\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S})$, $\omega=(\omega_1,\dots,\omega_n)^{\mathrm T}$.　现考虑

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega-\boldsymbol{B}_{G\_S}\omega&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}\boldsymbol{U}\omega-\lambda\omega=\\&(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}[\boldsymbol{U}\omega-\lambda(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})\omega]=\\&(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}(-\lambda\beta\boldsymbol{S}+\lambda\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})\omega=\\&\lambda\beta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}-\boldsymbol{S})\omega=\\&\lambda\beta(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}+\beta\boldsymbol{S}-\beta\boldsymbol{S}\boldsymbol{U})^{-1}\left(0,0,\dots,0,-\sum_{i=1}^{n}a_{n1}a_{1i}\omega_i\right)^{\mathrm T}=\\&(\lambda\beta a_{n1}/(1+\beta a_{n1}a_{1n}))(0,0,\dots,0,(\lambda-1)\omega_1)^{\mathrm T}=\\&(\lambda(\lambda-1)\beta a_{n1}/(1+\beta a_{n1}a_{1n}))(0,0,\dots,0,\omega_1)^{\mathrm T}.\end{aligned}\tag{13}$$

(a) 如果 $0<\lambda<1$, $-1\leqslant\beta<0$, 则 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega-\boldsymbol{B}_{G\_S}\omega\leqslant0$.　因此

$$\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega\leqslant\boldsymbol{B}_{G\_S}\omega.\tag{14}$$

由 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\beta0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\beta1}\end{pmatrix}$, 我们得到 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta})<\lambda$.

如果 $\beta=0$, 则 $\boldsymbol{B}_{G\_S}=\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}$, 因此 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta})=\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S})$.

如果 $0<\beta\leqslant\min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$，则

$$\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega-\boldsymbol{B}_{G\_S}\omega\geqslant\boldsymbol{0}\ 且\ \boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega-\boldsymbol{B}_{G\_S}\omega\neq\boldsymbol{0}.$$

因此 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega \geqslant \lambda\omega$, 即 $\boldsymbol{B}_{\beta 1}\alpha > \lambda\alpha$, 其中 $\omega = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \alpha\end{pmatrix}$. 所以, 由引理 2 得

$$\rho(\boldsymbol{B}_{\beta 1}) > \lambda.$$

即 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) > \lambda$.

(b) 如果 $\lambda > 1$, $-1 \leqslant \beta < 0$, 则 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega \geqslant \boldsymbol{0}$. 因此

$$\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega \geqslant \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega. \tag{15}$$

由 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\beta 0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{\beta 1}\end{pmatrix}$, 我们得到 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) > \lambda$.

如果 $\beta = 0$, 则 $\boldsymbol{B}_{G\_S} = \boldsymbol{B}_{G\_S\beta}$, 因此 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) = \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S})$.

如果 $0 < \beta \leqslant \min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$, 则

$$\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega \leqslant \boldsymbol{0} \text{ 且 } \boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega \neq \boldsymbol{0}.$$

因此 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega \leqslant \lambda\omega$, 即 $\boldsymbol{B}_{\beta 1}\alpha < \lambda\alpha$, 其中 $\omega = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \alpha\end{pmatrix}$. 所以, 由引理 2 得

$$\rho(\boldsymbol{B}_{\beta 1}) < \lambda$$

即 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) < \lambda$.

(c) 如果 $\lambda = 1$, 则 $\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega = 0$, 引理 2 得 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) = \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S})$.

定理 4　在定理 3 的条件下

(a) 若 $0 < \lambda < 1$, $-1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \leqslant \min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$, 则

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_1}) < \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_2}).$$

(b) 若 $\lambda > 1$, $-1 \leqslant \beta_1 < \beta_2 \leqslant \min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$, 则

$$\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_1}) > \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_2}).$$

证明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_1}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S\beta_2}\omega &= (\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_1}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega) - (\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_2}\omega - \boldsymbol{B}_{G\_S}\omega) = \\ &\left(\frac{\lambda(\lambda-1)\beta_1 a_{n1}}{1+\beta_1 a_{n1}a_{1n}} - \frac{\lambda(\lambda-1)\beta_2 a_{n1}}{1+\beta_2 a_{n1}a_{1n}}\right)(0, 0, \cdots, 0, \omega_1)^{\mathrm{T}} = \\ &\frac{\lambda(\lambda-1)a_{n1}(\beta_1-\beta_2)}{(1+\beta_2 a_{n1}a_{1n})(1+\beta_1 a_{n1}a_{1n})}(0, 0, \cdots, 0, \omega_1)^{\mathrm{T}}.\end{aligned} \tag{16}$$

(a) 易知, (16) 式右端小于 0, 引理 2 知, $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_1}) < \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_2})$.

(b) 易知, (16) 式右端大于 0, 引理 2 知, $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_1}) > \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta_2})$.

注: 1) 如果 $a_{n1}a_{1n} \geqslant 1$, 当 $-1/(a_{n1}a_{1n}) < \beta \leqslant \min(-a_{ni}/(a_{n1}a_{1i}))$ 时, 上面结论仍然成立.

2) 若有某个 $a_{ni} = 0$, $i = 2, \cdots, n-1$, 当 $-1/(a_{n1}a_{1n}) < \beta \leqslant 0$ 或 $-1 \leqslant \beta \leqslant 0$ 时, 上面结论仍然成立.

2　数值算例

这里给出一个数值算例, 验证第 1 部分的结论.

例　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1\\ -0.1 & 1 & 0 & 0\\ -0.2 & 0 & 1 & 0\\ -0.4 & -0.2 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 是一个不可约严格对角占优的 Z_矩阵, 因此是非奇 M_矩阵. 显然 $\rho(\boldsymbol{B}_{G\_S}) = 0.1220$.

如果 $\beta = -1$, 则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.28 & -0.12 & 0.96 \end{bmatrix}, \quad \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) = 0.085\,4 \cdot$$

如果 $\beta = -0.5$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & -0.24 & -0.06 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) = 0.104\,1 \cdot$$

如果 $\beta = 1$, 则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 & 0 \\ -0.8 & -0.12 & 0.12 & 1.040 \end{bmatrix}, \quad \rho(\boldsymbol{B}_{G\_S\beta}) = 0.155\,8 \cdot$$

感谢　衷心感谢北京应用物理与计算数学研究所合作项目基金(04WS01)对本文的资助•

[参　考　文　献]

[1] LI Wen. Preconditioned AOR iterative methods for linear systems[J]. Internat J Computer Math, 2002, **79**(1): 89—101.

[2] Young D M. Iterative Solution of Large Linear Systems[M]. New York: Academic Press, 1971.

[3] Varga R S. Matrix Iterative Analysis[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice_Hall, 1981.

[4] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M], London: Academic Press, 1979.

[5] Hans Schneider. Which depend on graph structure[J]. Linear Algebra Appl, 1984, **58**: 407—424.

[6] Evans D J, Martins M M, Trigo M E. The AOR iterative method for new preconditioned linear systems [J]. J Comput Appl Math, 2001, **132**: 461—466.

Preconditioned Gauss_Seidel Type Iterative Methods for Solving Linear Systems

CHENG Guang_hui, HUANG Ting_zhu, CHENG Xiao_yu

(School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, P.R.China)

Abstract: The preconditioned Gauss_Seidel type iterative method for solving linear systems, with the proper choice of the preconditioner, was presented. Convergence of the preconditioned method applied to Z_matrices was discussed. Also the optimal parmeter was presented. Numerical results show that the proper choice of the preconditioner can lead to effective the preconditioned Gauss_Seidel type iterative methods for solving linear systems.

Key words: Gauss_Seidel method; preconditioned iterative method; Z_matrix