

# 地下结构物在爆炸冲击波作用下的动力分析\*

任云燕<sup>1</sup>, 张莉<sup>2</sup>, 韩峰<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 机电工程学院, 北京 100081;

2. 北京理工大学 理学院, 北京 100081)

(叶志明推荐)

**摘要:** 提出了一种求解任意形地下结构物在爆炸冲击波作用下的动应力集中问题的半解析方法。爆炸冲击波以平面 SH 波的形式入射, 并用 Fourier 变换方法将其转换到频域, 不同形状地下结构物的导纳函数由复变函数和保角映射的方法求得。利用 Fourier 逆变换, 进一步合成得到时域中的地下结构的动力响应, 最后, 对正方形、三角形及马蹄形孔洞附近的动应力集中系数作了数值计算, 并给出了具体结果。

**关键词:** 动应力; 爆炸冲击波; FFT 变换; 地下结构物

**中图分类号:** O322 **文献标识码:** A

## 引 言

研究爆炸冲击波作用下的地下结构物的动力响应问题, 对保障人民生命财产安全及国民经济建设是至关重要的, 尤其在国防工业中, 对于摧毁敌方的军事目标和加强我方的防御工事, 具有更大的实用价值。对地下结构物的动力响应问题的研究, 在发表的诸多文献中, 大部分局限在频域中对地下结构物进行动力分析, 随着计算力学的发展, 有些学者<sup>[1]</sup>利用有限元方法和超越积分方程方法分析了时域中的动力响应。本文是研究在平面中, 爆炸冲击波对地下结构物的动力响应, 结构物可以是任意形状的平面图形, 利用复变函数和保角映射的方法, 在一个具有圆形孔洞的全空间内求解问题。通过 FFT 变换方法将爆炸冲击波转换至频域中研究, 再由 Fourier 逆变换得到时域过程中的结构物的动力响应, 最后以算例的形式给出了正方形、三角形及马蹄形孔洞上各点的应力时程分析曲线。

## 1 SH 波对地下结构物散射

### 1.1 散射位移场及散射应力

在各向同性介质中研究弹性波对孔洞的散射问题, 其最为简单的模型就是反平面剪切运动的 SH 波模型。SH 波在空间介质中传播, 其波动方程<sup>[2]</sup>可表示为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

对稳态问题, 它可以写成

\* 收稿日期: 2004\_12\_14; 修订日期: 2006\_06\_20

作者简介: 任云燕(1976—), 女, 山西人, 讲师, 博士(Tel: + 86\_10\_68913241; E\_mail: renyunyan@sina.263.net)。

$$\partial^2 w / \partial x^2 + \partial^2 w / \partial y^2 = -k^2 w, \quad (2)$$

其中,  $w$  为位移函数, 位移函数与时间的关系为  $e^{i\omega t}$  (以下分析略去时间谐和因子  $e^{i\omega t}$ ),  $k = \omega / c_s$ ,  $\omega$  为位移  $w(x, y, t)$  的圆频率,  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  为介质的剪切波速,  $\rho, \mu$  分别为介质的密度和剪切模量。

应力与应变的关系

$$\tau_{xz} = \mu(\partial w / \partial x), \quad \tau_{yz} = \mu(\partial w / \partial y). \quad (3)$$

引入复变量  $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ , 方程(2)可表示如下

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{4} k^2 w = 0. \quad (4)$$

进一步利用保角映射函数  $Z = \omega(\lambda), \lambda = Re^{i\theta}$ , 将  $Z$  平面上的非圆形结构映射为  $\lambda$  平面上的单位圆。在  $\lambda$  平面上, 方程(4)又可写成

$$\frac{1}{\omega'(\lambda)\overline{\omega'(\lambda)}} \frac{\partial^2 w}{\partial \lambda \partial \bar{\lambda}} + \frac{1}{4} k^2 w = 0, \quad (5)$$

而在  $\lambda$  平面上, 式(3)用极坐标表示为

$$\tau_{rz} = \frac{\mu}{|\omega'(\lambda)|} \left[ \frac{\partial w}{\partial \lambda} + \frac{\partial w}{\partial \bar{\lambda}} \right], \quad \tau_{\theta z} = \frac{i\mu}{|\omega'(\lambda)|} \left[ \frac{\partial w}{\partial \lambda} - \frac{\partial w}{\partial \bar{\lambda}} \right]. \quad (6)$$

SH 波在空间传播到结构边界时, 将产生散射。散射波可表示为

$$w^{(s)}(r, \theta, t) = W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(1)}(k|\omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{|\omega(\lambda)|} \right\}^n, \quad (7)$$

式中,  $\omega(\lambda)$  是映射函数,  $\lambda = Re^{i\theta}$ ,  $H_n^{(1)}(\cdot)$  为第一类 Hankel 函数,  $A_n$  为待定常数。

由式(6)和(7), 可得散射波所激发的应力表达式

$$\tau_{rz}^{(s)} = \frac{k\mu W_0}{2} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(k|\omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{|\omega(\lambda)|} \right\}^{n-1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R|\omega'(\lambda)|} - \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(k|\omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{|\omega(\lambda)|} \right\}^{n+1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R|\omega'(\lambda)|} \right], \quad (8)$$

$$\tau_{\theta z}^{(s)} = \frac{ik\mu W_0}{2} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(k|\omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{|\omega(\lambda)|} \right\}^{n-1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R|\omega'(\lambda)|} + \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(k|\omega(\lambda)|) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{|\omega(\lambda)|} \right\}^{n+1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R|\omega'(\lambda)|} \right], \quad (9)$$

其中,  $A_n$  为一组待定系数。

## 1.2 入射波及其产生的入射应力

平面 SH 波以速度  $c_s$ , 沿与  $x$  轴成  $\theta_0$  方向入射时, 控制方程可以写成如下形式

$$W^{(i)} = W \left[ t - \frac{x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0}{c_s} \right], \quad (10)$$

其中,  $\cos \theta_0 = n_x, \sin \theta_0 = n_y$  为平面 SH 波的传播方向, 速度  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  为波速。

而在稳态波入射时, 沿  $\theta_0$  方向入射的平面 SH 波可表示为

$$w^{(i)}(x, y, t) = w_0 e^{i[k(x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0) - \omega t]}, \quad (11)$$

其中,  $w_0$  为谐波的振幅,  $\omega = kc_s$  为谐波的圆频率。

用极坐标表示式(11), 则有

$$w^{(i)}(r, \theta, t) = w_0 e^{i[kr \cos(\theta - \theta_0) - \omega t]}. \quad (12)$$

将式(12)展开成 Fourier 级数的形式

$$w^{(i)}(r, \theta, t) = W_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n J_n(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^n e^{-in\theta_0}, \quad (13)$$

这里  $r = |Z| = | \omega(\lambda) |$ ,  $\lambda = Re^{i\theta}$ .

将式(13)代入式(6)中, 可得由入射波产生的入射应力为

$$\tau_{rz}^{(i)} = \frac{k\mu w_0}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n \left[ J_{n-1}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n-1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} - J_{n+1}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n+1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} \right] e^{-in\theta_0}, \quad (14)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = \frac{ik\mu w_0}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n \left[ J_{n-1}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n-1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} + J_{n+1}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n+1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} \right] e^{-in\theta_0}. \quad (15)$$

### 1.3 地下结构物散射问题的求解

求解非圆形地下结构的动应力集中问题, 我们只讨论孔边应力自由的这种工程实际中较为常见的情况. 此时, 即边值问题在孔洞的周边上给出的条件为  $\tau_z = 0$ , 则有

$$\tau_{rz}^{(i)} + \tau_{rz}^{(s)} = 0, \quad (16)$$

$\tau_{rz}^{(i)}$ 、 $\tau_{rz}^{(s)}$  分别由(14)式和(8)式给出, 将各式代入(16)式中, 经整理, 可得求解地下结构物对 SH 波散射问题的方程为

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_n \varepsilon_n = \varepsilon, \quad (17)$$

$\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon$  见文献[3]. 将方程(17)两边同乘以  $e^{-is\theta}$ , 并在  $[-\pi, \pi]$  区间内积分, 可得

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{ns} A_n = \varepsilon_s \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (18)$$

其中  $\varepsilon_{ns} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon_n e^{-is\theta} d\theta$ ,  $\varepsilon_s = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon e^{-is\theta} d\theta$ , 方程(18)即为决定系数  $A_n$  的矩阵方程.

### 1.4 动应力集中系数

由动应力集中系数定义, 则孔边上的动应力集中系数为

$$\tau_{\theta z}^* = \tau_{\theta z} / \tau_0, \quad (19)$$

其中,  $\tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^{(i)} + \tau_{\theta z}^{(s)}$ ,  $\tau_0 = \mu w_0$  为入射应力的最大幅值.

利用应力表达式(9)、式(15), 则可求得孔边的动应力集中系数

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^* = & \frac{i}{2} \left[ \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n-1}^{(1)}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n-1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} + \right. \\ & \left. \sum_{-\infty}^{\infty} A_n H_{n+1}^{(1)}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n+1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} \right] + \\ & \frac{i}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (i)^n \left[ J_{n-1}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n-1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} + \right. \\ & \left. J_{n+1}(k | \omega(\lambda) |) \left\{ \frac{\omega(\lambda)}{| \omega(\lambda) |} \right\}^{n+1} \frac{\lambda \omega'(\lambda)}{R | \omega'(\lambda) |} \right] e^{-in\theta_0}. \quad (20) \end{aligned}$$

## 2 结构物的简化模型

### 2.1 简化模型

在实际的防护工程中, 要防护大型爆炸的袭击, 必须采用深埋的地下结构. 冲击波可简化

为平面波,可忽略自由边界的影响,计算模型转化为无限介质中的一个孔洞。利用复变函数和保角映射求解这一问题时,总可找到某一映射函数  $Z = \omega(\lambda)$ ,  $\lambda = Re^{i\theta}$  将非圆形地下结构映射为圆形地下结构,这样我们在理论上处理起来就很方便。

## 2.2 保角映射

在处理非圆形孔洞所引起的动应力集中问题时,可将  $z$  平面上非圆边界  $L$  的外域(或内域)保角映射为  $\lambda$  平面上边界为  $S$  的一个单位圆的外域(或内域)。若  $L$  和  $S$  双方皆为无限,并且无穷远点对应,当  $|\lambda|$  充分大时,则将  $z$  平面上非圆边界  $L$  映射在  $\lambda$  平面上单位圆边界  $S$  的映射函数可表示如下

$$Z = \omega(\lambda) = m_0 \lambda + m_1 / \lambda + m_2 / \lambda^2 + \dots, \quad (21)$$

$m_0, m_1, m_2, \dots$  为常数。欲使映射是单叶的,在  $S$  域内  $\omega'(\lambda)$  不能为 0。多边形外域到单位圆外域的映射函数可用式(22)表示

$$Z = \omega(\lambda) = C \left[ \lambda + B_0 \ln \lambda - B_1 \lambda^{-1} - 0.5 B_2 \lambda^{-2} - \dots - (1/r) B_r \lambda^{-r} - \dots \right], \quad (22)$$

其中,  $C$  由多边形的大小来确定,  $B_0, B_1, B_2, \dots$  是实常数,可由式(23)来确定,即

$$A_k A_{k+1} = \int_{a_k}^{a_{k+1}} |\omega'(\lambda)| d\lambda \quad (23)$$

其中,  $A_k, A_{k+1}$  分别为多边形的顶点,  $a_k, a_{k+1}$  为相对应的单位圆上的点。为了保证映射的单值性,须使  $B_0 = 0$ , 则式(22)可写成

$$Z = \omega(\lambda) = C \left[ \lambda - B_1 \lambda^{-1} - 0.5 B_2 \lambda^{-2} - \dots - (1/r) B_r \lambda^{-r} - \dots \right]. \quad (24)$$

对于椭圆、等边多边形到单位圆的保角映射函数现已得到了经典的解<sup>[4]</sup>。文献[5]中详细讨论了单位圆到马蹄形的保角映射。

## 3 爆炸冲击波及地下结构的动应力的时域分析

### 3.1 爆炸冲击波的频域分析

采用修正的弗里德兰德经验方程<sup>[6]</sup>,如图1所示的地面空气冲击波  $P(t)$  作用时程可表示如为

$$P(t) = \Delta P_0 \exp \left[ -\frac{\alpha(t-t_a)}{t_0} \right] \left[ 1 - \frac{t-t_a}{t_0} \right] \quad (t_a \leq t \leq t_a + t_0), \quad (25)$$

其中,  $t_a$  为冲击波到达时间,  $t_0$  为冲击波作用时间。

在已知冲击波做非周期扰动的情况下求解地下结构的动态响应,我们主要采用 FFT 变换方法<sup>[7]</sup>

$$P(t_m) = \sum_{n=0}^{N-1} P_n(\omega_n) e^{i2\pi(nm/N)}, \quad P_n(\omega_n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} P(t_m) e^{-i2\pi(nm/N)}. \quad (26)$$

对任何一个时域的过程都可以得到一个频域的过程。

### 3.2 地下结构物的动应力的时域分析

由爆炸冲击波的频域分析可得到随频域变化的爆炸冲击波  $P_n(\omega_n)$ , 对每一个  $\omega_n$  我们可得到频域中的动应力集中系数  $\tau_{0z}^*(\omega_n)$ , 在任意一点的频域动应力可表示为

$$\tau_{0z}(\omega_n) = P_n(\omega_n) \tau_{0z}^*(\omega_n). \quad (27)$$

由 Fourier 逆变换可得时域的动应力

$$\tau_{0z}(t_m) = \sum_{n=0}^{N-1} \tau_{0z}(\omega_n) e^{i2\pi(nm/N)}. \quad (28)$$

## 4 算例与讨论

对于不同的孔洞形状、入射不同的波形都会有各不相同的时程反应。作为算例,给出了以  $\Delta P_0 = 0.49 \text{ MPa}$ ,  $t_0 = 1.17 \text{ s}$  的爆炸冲击波沿与  $x$  轴成  $\theta_0$  方向,以平面 SH 波的形式传播到正方形、三角形及马蹄形孔洞边界时,孔洞周边上各点动应力集中系数  $\tau_{\text{th}}$  与时间的函数关系曲线。假定地下结构物的边界为岩石介质,当爆炸冲击波入射时,在岩石介质中的传播速度为  $c_s = 1550.43 \text{ m/s}$ ,爆炸冲击波到达孔洞边界的时间  $t_a = 0$ ,入射角  $\theta_0 = -\pi/2$ 。

### 4.1 正方形孔洞附近的动应力集中问题

如图 2 所示的正方形孔洞,映射函数应取为

$$Z = \omega(\lambda) = R \left[ \lambda - \frac{1}{6\lambda^3} + \frac{1}{56\lambda^7} - \frac{1}{176\lambda^{11}} \right], \quad (29)$$

其中,  $R = 1.2a$ 。

图 3 给出了稳态的 SH 波入射时,正方形孔洞边界上  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  各点的动应力集中系数随入射波数  $kr$  的变化规律。图 4 给出了在爆炸冲击波作用下,边界上相应各点处的应力时程曲线。在  $\theta = 30^\circ$  处的动应力集中系数最大,最大动应力集中因子大约是入射压力的 1.6 倍,在  $\theta = 0^\circ$  处和  $\theta = 45^\circ$  处的动应力集中系数随时间的分布几乎相同。

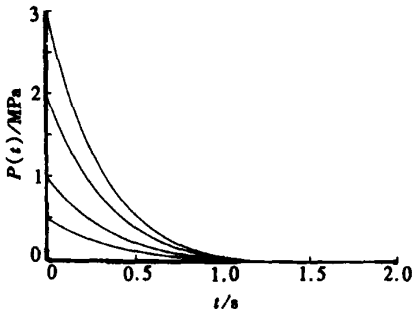


图 1 压力  $P(t)$  随时间的变化曲线

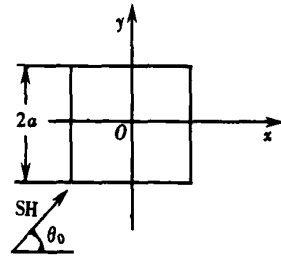


图 2 SH 波对正方形孔洞的散射

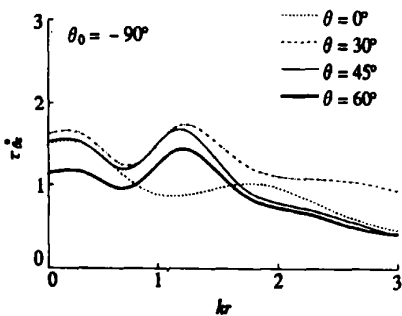


图 3  $\tau_{\text{th}}^*$  在正方形孔洞边界上不同点处随波数的分布

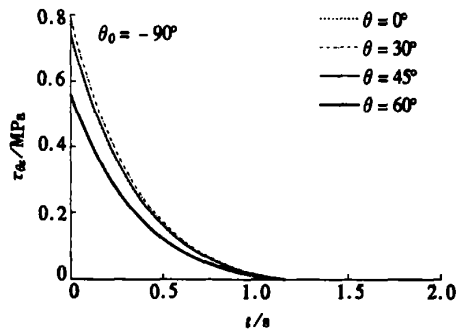


图 4  $\tau_{\text{th}}$  在正方形孔洞边界上不同点处的时程曲线

### 4.2 三角形孔洞附近的动应力集中问题

在计算三角形孔洞附近的动应力集中问题时,将图 5 的三角形孔洞外域映射到单位圆外域的映射函数可取如下的形式

$$Z = \omega(\lambda) = R \left[ \lambda + \frac{1}{3}\lambda^3 + \frac{1}{45}\lambda^5 \right], \quad (30)$$

其中,  $R = 1.77a^\circ$

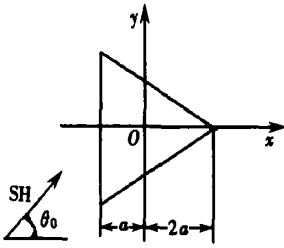


图5 SH波对三角形孔洞的散射

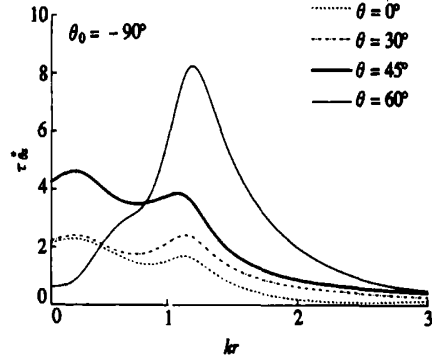


图6  $\tau_{th}^*$  在三角形孔洞边界上不同点处随波数的分布

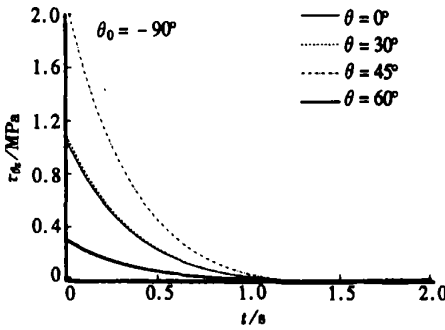


图7  $\tau_{th}$  在三角形孔洞边界上不同点处的时程曲线

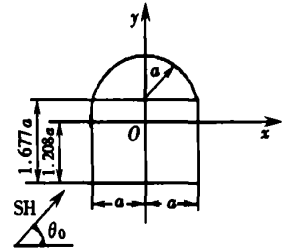


图8 SH波对马蹄形孔洞的散射

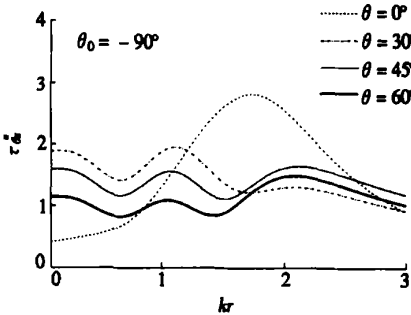


图9  $\tau_{th}^*$  在马蹄形孔洞边界上不同点处随波数的分布

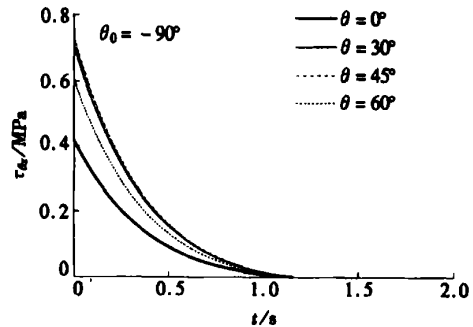


图10  $\tau_{th}$  在马蹄形孔洞边界上不同点处的时程曲线

图6给出了稳态的SH波入射时,三角形孔洞边界  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  上各点的动应力集中系数随入射波数  $kr$  的变化规律。图7给出了在爆炸冲击波作用下,孔洞边界上相应各点处的应力时程曲线。在  $\theta = 45^\circ$  处的动应力集中系数最大,最大动应力集中因子大约是入射压力的4倍,在  $\theta = 60^\circ$  处的动应力集中系数低于入射压力值。

### 4.3 马蹄形孔洞附近的动应力集中问题

在计算马蹄形孔洞附近的动应力集中问题时,将图8的马蹄形孔洞外域映射到单位圆外

域的映射函数可取如下的形式

$$Z = \omega(\lambda) = R \left[ \lambda - \frac{0.13134}{\lambda} - \frac{0.06094i}{\lambda^2} - \frac{0.10334}{\lambda^3} + \frac{0.0425i}{\lambda^4} \right], \quad (31)$$

其中,  $R = 1.2987a$ 。

图9给出了稳态的SH波入射时,正方形孔洞边界上  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  各点的动应力集中系数随入射  $kr$  波数的变化规律。图10给出了在爆炸冲击波作用下,马蹄形孔洞边界上  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  各点处的应力时程曲线。在  $\theta = 45^\circ$  处的动应力集中系数最大,最大动应力集中因子大约是入射压力的1.5倍,在  $\theta = 0^\circ$  处的动应力集中系数略低于入射压力值。

## 5 结束语

本文从求解弹性波散射和动应力集中问题的分析方法出发,从理论上求解了非圆形孔洞的动应力集中问题,进一步利用Fourier变换的方法得到了时间历程的非稳态波入射下的动应力集中因子。综合这两种方法,给出了在爆炸冲击波作用下,求解任意形地下结构物动力响应问题的一种半解析方法。利用这个方法,还可以对更为复杂的边值问题,例如有加强环的孔洞(即有衬砌的地下结构)等问题进行分析。

### [参 考 文 献]

- [1] LIU Shaw\_wen. Transient scattering of SH waves by surface-breaking and sub-surface cracks[J]. Internat J Solids and Structures, 1997, 34(30): 4019—4035.
- [2] LIU Dian\_kui, GAI Bing\_zeng, TAO Gui\_yuan. Application of the method of complex functions to dynamic stress concentration[J]. Wave Motion, 1982, 4(4): 293—304.
- [3] 韩峰. 复变函数方法在弹性波散射及动应力集中问题研究中的应用[D]. 博士学位论文. 哈尔滨: 哈尔滨建筑大学, 1991, 49—52.
- [4] Γ H 萨文. 孔附近的应力集中[M]. 卢鼎霍, 译. 北京: 科学出版社, 1958, 150—199.
- [5] 王桂芳. 隧道计算[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1992, 20—37.
- [6] 李翼祺, 马素贞. 爆炸力学[M]. 北京: 科学出版社, 1992, 258—275.
- [7] 胡律贤. 地震工程学[M]. 北京: 地震出版社, 2006, 129—147.

## Dynamic Load Analysis of Underground Structure Under the Effect of Blast Wave

REN Yun\_yan<sup>1</sup>, ZHANG Li<sup>2</sup>, HAN Feng<sup>1</sup>

(1. Mechanical and Engineering Institute, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China;

2. School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China)

**Abstract:** A semi-analytical method of solving the problem of dynamic stress concentration of arbitrary underground structure under the effect of blast waves was introduced. Using the Fourier Transform theory, the shock waves (in the forms of SH waves) can be converted into frequency bands. After employing complex functions and conformal mapping, the admittance functions of various underground structures were obtained. Then, the problem of the time domain dynamic stress response of underground structure can be easily solved through the Fourier inverse transform. At last, the results and curves of the dynamic stress for the square, triangle and horseshoe cavity are presented.

**Key words:** dynamic stress; blast wave; FFT transform; underground structure