文章编号: 1000_0887(2006) 10_1150_09
c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

偶次中立型泛函微分方程解的振荡性*

T• 卡丹

(尼代大学 艺术和科学学院 数学系,尼代 51200,土耳其)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究偶次中立型泛函微分方程,给出了该微分方程解的振荡性的充分条件• 得到了一些新的结果并给出了一些示例•

关 键 词: 中立型微分方程; 振荡; 分布偏差变量
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

本文研究如下形式具有分布偏差变量的 n 阶混合型中立泛函微分方程解的振荡性

$$[x(t)+\lambda ax(t+\alpha h)+\mu bx(t+\beta g)]^{(n)}=p\int_c^d x(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+q\int_c^d x(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi,\tag{1}$$

其中 $\lambda=\pm1$, $\mu=\pm1$, $\alpha=\pm1$, $\beta=\pm1$, h、g、a 和 b 为非负实常数, p 和 q 为正实数, 除非特别申明外, $[c,d]$ 为正数区间•

在对弹性杆上附有振动块的研究中(见文献[1])会遇到方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)+\lambda x[t-\tau]+\mu x[t+\sigma])+qx[t-\alpha]+px[t+\beta]=0,$$

Grace 和 Lalli[2]、Grace 和 Lalli[3]分别对方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x(t)+\lambda x[t-\tau])=q(t)x[t-\sigma]+p(t)x[t+\beta]$$

进行过研究• 此后, Grace 将该方程展开为奇次 n 阶方程[4] 和偶次 n 阶方程[5]• 近几年, Candan 和 Dahiya[6]、Dahiya 和 Candan[7]得到一些具有分布时滞的结果• 在某种意义上也是作者撰写本文的动机• 有关情况可参考文献[1]和文献[8]•

对所有大的 t, 若方程(1)有一个非平凡解始终不为零, 则称该解是振荡的, 否则称它为非振荡的•

本文将给出仅与方程(1)的系数和变量相关时, 其振荡的充分条件•

1 定理与示例

下面的引理来自文献[9], 将用于本文的证明•

* 收稿日期: 2005-10-21; 修订日期: 2006-02-20
作者简介: T• 卡丹(E_mail: tcandan@nigde.edu.tr).
本文原文为英文, 由海治 译,张禄坤 校.

引理 1　设 a 和 h 为正常数并令

$$a^{1/n}(h/n)e > 1,$$

那么,

(i) 当 n 为偶数时, 不等式

$$x^{(n)}(t) - ax(t-h) \geqslant 0$$

始终没有正的有界解•

(ii) 当 n 为偶数时, 不等式

$$x^{(n)}(t) - ax(t+h) \geqslant 0$$

始终没有正的无界解• 即对所有大的 t, 上面后一个不等式没有 x 解, 其中 $x^{(i)}(t) > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$•

定理 1　设 $1+a \geqslant b > 0$, $c > h$, $\lambda = \beta = 1$ 和 $\mu = \alpha = -1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+a}\right)^{1/n}\left(\frac{c}{n}\right)e > 1 \tag{2}$$

和

$$\left(\frac{p(d-c)}{1+a}\right)^{1/n}\left(\frac{c-h}{n}\right)e > 1, \tag{3}$$

则方程(1) 是振荡的•

证明　设 $x(t)$ 为方程(1) 的非振荡解• 我们假定 $x(t)$ 始终为正, 即, 存在一个 $t_0 \geqslant 0$, 使得 $x(t) > 0$, 其中 $t \geqslant t_0$• 若 $x(t)$ 是始终为负的解, 可以通过同样的变量证明之• 令 $z(t) = x(t) + ax(t-h) - bx(t+g)$, 根据方程(1), 对某些 $t_1 \geqslant t_0$, $t \geqslant t_1$, 可得

$$z^{(n)}(t) = p\int_c^d x(t-\xi)\,d\xi + q\int_c^d x(t+\xi)\,d\xi \tag{4}$$

意味着方程(4) 的 $z^{(n)}(t) > 0$• 那么, $z^{(i)}(t)(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 在 $[t_1, \infty)$ 上的符号不变• 下面分两种可能讨论: (a) 对 $t \geqslant t_1$, $z(t) < 0$; (b) 对 $t \geqslant t_1$, $z(t) > 0$•

(a) $z(t) < 0$, $t \geqslant t_1$

令 $v(t) = -z(t)$, 根据方程(4) 得

$$v^{(n)}(t) + p\int_c^d x(t-\xi)\,d\xi + q\int_c^d x(t+\xi)\,d\xi = 0• \tag{5}$$

另一方面, $0 < v(t) = -z(t) = -x(t) - ax(t-h) + bx(t+g) \leqslant bx(t+g)$, $t \geqslant t_1$• 因而, 存在一个 $T \geqslant t_1$, 使得

$$x(t) \geqslant \frac{v(t-g)}{b}, \qquad t \geqslant T• \tag{6}$$

根据方程(5), 有

$$v^{(n)}(t) + p\int_c^d x(t-\xi)\,d\xi \leqslant v^{(n)}(t) + p\int_c^d x(t-\xi)\,d\xi + q\int_c^d x(t+\xi)\,d\xi = 0• \tag{7}$$

由式(6), 式(7) 将成为

$$v^{(n)}(t) + \frac{p}{b}\int_c^d v(t-g-\xi)\,d\xi \leqslant 0, \qquad t \geqslant T_1 \geqslant T•$$

因为 $z^{(i)}(t)(i = 0, 1, \dots, n)$ 在 $[t_1, \infty)$ 上符号不变, $v^{(i)}(t)$ 在 $[t_1, \infty)$ 上符号不变, 从而 v' 或始终为正或始终为负• 若 v' 始终为正, 有

$$v^{(n)}(t) + \frac{p(d-c)}{b}v(t-(g+d)) \leqslant 0, \qquad 当\ t \geqslant T_1•$$

若 v' 始终为负，有

$$v^{(n)}(t)+\frac{p(d-c)}{b}v(t-(g+c))\leqslant 0,\qquad 当\ t\geqslant T_1.$$

从而，根据 Foster 和 Grimmer 的文献[10]，

$$v^{(n)}(t)+\frac{p(d-c)}{b}v(t-(g+d))=0,\qquad 当\ t\geqslant T_1 \tag{8}$$

和

$$v^{(n)}(t)+\frac{p(d-c)}{b}v(t-(g+c))=0,\qquad 当\ t\geqslant T_1 \tag{9}$$

有正解. 又由文献[11]中定理2，方程(8)和(9)是振荡的，与题设矛盾.

(b) $z(t)>0,\ t\geqslant t_1$

令 $w(t)=z(t)+az(t-h)-bz(t+g)$. 若 $w(t)<0$，根据(a)的证明过程，可得到和(a)同样的结论. 现对于 $t\geqslant t_1$，设 $w(t)>0$，可以得到

$$w^{(n)}(t)=p\int_c^d z(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+q\int_c^d z(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

又因为函数 $w(t)$ 满足方程(1)，可得

$$[w(t)+aw(t-h)-bw(t+g)]^{(n)}=p\int_c^d w(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+q\int_c^d w(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{10}$$

我们再分两种情况证明：(ⅰ) $z'(t)$ 始终为正；(ⅱ) $z'(t)$ 始终为负.

(ⅰ) $z'(t)>0,\ t\geqslant t_1$

这时，对 $t\geqslant t_2\geqslant t_1$，有 $w^{(n)}(t)>0$ 和 $w^{(n+1)}(t)>0$. 这样，利用方程(10)中 $w^{(n)}(t)$ 始终递增的特性，我们得到

$$(1+a)w^{(n)}(t)\geqslant p\int_c^d w(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+q\int_c^d w(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi\geqslant q\int_c^d w(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

因为，对 $t\geqslant t_2, w'(t)>0$，有

$$w^{(n)}(t)\geqslant\frac{q(d-c)}{1+a}w(t+c). \tag{11}$$

根据引理1(ⅱ)和公式(2)，说明方程(11)没有正解. 与题设条件矛盾.

(ⅱ) $z'(t)<0,\ t\geqslant t_1$

根据方程(4)和 Kiguradze 引理，$(-1)^i z^{(i)}(t)>0,\ t\geqslant t_1,\ i=0,1,\cdots,n$. 现在我们要证明，对 $t\geqslant t_2^*\geqslant t_1, w'(t)<0$. 反证，假设对 $t\geqslant t_2^*, w'(t)>0$. 那么，有 $0<w'(t)=z'(t)+az'(t-h)-bz'(t+g)$. 因为 $z'(t)$ 在 $[t_2^*,\infty)$ 上递增，这与 $0<w'(t)\leqslant(1+a-b)z'(t+g)\leqslant 0$ 相矛盾. 从而，对于 $t\geqslant t_2^*$，$w'(t)<0$，且

$$(-1)^i w^{(i)}(t)>0,\qquad 当\ t\geqslant t_2^*,\ i=0,1,\cdots,n+1. \tag{12}$$

在式(10)中，利用 $w^{(n)}(t)$ 在 $[t_2^*,\infty)$ 上递减的特性，得到

$$(1+a)w^{(n)}(t-h)\geqslant p\int_c^d w(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+q\int_c^d w(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi\geqslant q\int_c^d w(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

因为 w 始终递减，我们得到

$$w^{(n)}(t)\geqslant\frac{p(d-c)}{1+a}w(t-(c-h)). \tag{13}$$

这样，通过引理1(ⅰ)和条件式(3)，方程(13)没有满足式(12)的解，与题设条件矛盾，证明结束.

例1 考虑下面中立型微分方程

$$\left[x(t)+\frac{15e^{\pi/3}}{2}x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{17e^{-2\pi}}{2}x(t+2\pi)\right]''=$$
$$\frac{30e^{\pi}}{e^{-\pi}+e^{-2\pi}}\int_{\pi}^{2\pi}x(t-\xi)\,d\xi+30e^{-\pi}\int_{\pi}^{2\pi}x(t+\xi)\,d\xi,$$

可知 $n=2$, $a=(15e^{\pi/2})/2$, $b=(17e^{-2\pi})/2$, $c=\pi$, $d=2\pi$, $p=30e^{\pi}/(e^{-\pi}+e^{-2\pi})$, $q=30e^{-\pi}$, $h=\pi/2$, $g=2\pi$·

可以看出, 定理 1 的条件满足, 易证 $x(t)=e^{t}\cos t$ 为该问题的一个解·

定理 2 设 $1+a\geqslant b>0$, $c>h$, $g>h$, $\lambda=\alpha=\beta=1$ 和 $\mu=-1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+a}\right)^{1/n}\left(\frac{c-h}{n}\right)e>1 \tag{14}$$

和

$$\left(\frac{p(d-c)}{1+a}\right)^{1/n}\left(\frac{c}{n}\right)e>1, \tag{15}$$

则方程(1)是振荡的·

证明 设 $x(t)$ 为方程(1) 的一个非振荡解· 在不失一般性的情况下, 我们假设对 $t\geqslant t_0\geqslant 0$, $x(t)>0$· 令 $z(t)=x(t)+ax(t+h)-bx(t+g)$· 正如定理 1 的证明, 对 $t\geqslant t_1\geqslant t_0$ 和 $i=0,1,\cdots,n$, 函数 $z^{(i)}(t)$ 符号不变· 因而, 对 $z(t)$ 存在两种情况: (a) 对 $t\geqslant t_1$, $z(t)<0$; (b) 对 $t\geqslant t_1$, $z(t)>0$· 由于情况(a)的证明方法与证明定理 1(a) 时类似, 这里省略·

(b) $z(t)>0$, $t\geqslant t_1$

令 $w(t)=z(t)+az(t+h)-bz(t+g)$· 若 $w(t)<0$, 使用定理 1(a) 的证明过程, 可以得到相同的结论· 现设对 $t\geqslant t_1$, $w(t)>0$, 可以得出

$$w^{(n)}(t)=p\int_c^d z(t-\xi)\,d\xi+q\int_c^d z(t+\xi)\,d\xi· \tag{16}$$

又由于, $w(t)$ 满足方程(1), 得到

$$[w(t)+aw(t+h)-bw(t+g)]^{(n)}=p\int_c^d w(t-\xi)\,d\xi+q\int_c^d w(t+\xi)\,d\xi· \tag{17}$$

我们再考虑两种情况: (ⅰ) $z'(t)$ 始终为正; (ⅱ) $z'(t)$ 始终为负·

(ⅰ) $z'(t)>0$, $t\geqslant t_1$

这时对某些 $t_2\geqslant t_1$, $t\geqslant t_2$, 有 $w^{(n)}(t)>0$ 和 $w^{(n+1)}(t)>0$· 因而, 利用式(17) 中 $w^{(n)}(t)$ 始终递增的特性, 得到

$$(1+a)w^{(n)}(t+h)\geqslant q\int_c^d w(t+\xi)\,d\xi·$$

因为对 $t\geqslant t_2$, $w'(t)>0$, 则

$$w^{(n)}(t)\geqslant\frac{q(d-c)}{1+a}w(t-(c-h))· \tag{18}$$

根据引理 1(ⅱ) 和条件(14), 表示方程(18) 没有正解, 从而产生矛盾·

(ⅱ) $z'(t)<0$· $t\geqslant t_1$

根据 Kiguradze 引理, $(-1)^{i}z^{(i)}(t)>0$, $t\geqslant t_1$, $i=0,1,\cdots,n$· 这里证明对 $t\geqslant t_1$, $w'(t)<0$· 设 $w'(t)>0$, 其中 $t\geqslant t_1$· 因为 $z'(t)$ 递增, $0<w'(t)=z'(t)+az'(t+h)-bz'(t+g)\leqslant(1+a-b)z'(t+g)\leqslant 0$· 这是一个矛盾· 故对 $t\geqslant t_1$, $w'(t)<0$, 因此 $w(t)$ 满足

$$(-1)^{i}w^{(i)}(t)>0,\qquad 当\ t\geqslant t_1,\ i=0,1,\cdots,n· \tag{19}$$

从式(16)可看出 $w^{(n)}(t)$ 是始终递减的• 因此, 在式(17)中, 应用 $w^{(n)}(t)$ 的特性, 得到

$$(1+a)w^{(n)}(t)\geqslant p\int_c^d w(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\text{•}$$

因为 w 始终为递减, 可得

$$w^{(n)}(t)\geqslant\frac{p(d-c)}{1+a}w(t-c)\text{•}\tag{20}$$

这样, 根据引理 1(ⅰ)和条件(15), 方程(20)没有满足式(19)的解• 这将导致矛盾, 证明结束•

例 2 考虑下面的中立型微分方程

$$[x(t)+2x(t+\pi)-x(t+2\pi)]^{(4)}=$$
$$\frac{1}{2}\int_{5\pi/2}^{\pi/2}x(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2}\int_{5\pi/2}^{7\pi/2}x(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

于是 $n=4,\ a=2,\ b=1,\ c=5\pi/2,\ d=7\pi/2,\ p=q=1/2,\ h=\pi,\ g=2\pi$•

很容易验证定理 2 的条件满足, 易证 $x(t)=\sin t+\cos t$ 为该问题的解•

定理 3 设 $a>b>0,\ g<h<c,\ \lambda=1,\ \alpha=\mu=\beta=-1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+a}\right)^{1/n}\left(\frac{c}{n}\right)e>1,\quad\left(\frac{q(d-c)}{1+a}\right)^{1/n}\left(\frac{c-h}{n}\right)e>1,$$

则方程(1)是振荡的•

因为该定理的证明与定理 2 的证明类似, 省略•

定理 4 设 $a>1+b,\ c>h,\ c>g,\ \lambda=\alpha=-1,\ \beta=\mu=1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-g}{n}\right)e>1,$$

则方程(1)是振荡的•

证明 该定理的证明过程与定理 2 中情况(ⅱ)(对 $t\geqslant t_1,\ z'(t)<0$)前的证明类似• 注意到, 对 $t\geqslant t_1,\ z(t)>0$ 和 $w(t)>0$• 根据 Kiguradze 引理, $(-1)^i z^{(i)}(t)>0,\ t\geqslant t_1,\ i=0,1,\dots,n$• 因为 $z(t)$ 递减的, 对 $t\geqslant t_2\geqslant t_1$, $w(t)=z(t)-az(t-h)+bz(t+g)\leqslant(1-a+b)z(t-h)<0$, 它与 $w(t)>0$ 矛盾• 因此, 对 $t\geqslant t_1,\ z'(t)<0$ 是不可能的• 定理得证•

定理 5 设 $c>h,\ c>g,\ \lambda=\mu=\beta=1,\ \alpha=-1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-g}{n}\right)e>1\tag{21}$$

和

$$\left(\frac{p(d-c)}{1+a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-h}{n}\right)e>1,\tag{22}$$

则方程(1)是振荡的•

证明 令 $x(t)$ 为方程(1)的一个始终为正的解, 即, 存在一个 $t_0\geqslant 0$, 对 $t\geqslant t_0,\ x(t)>0$• 令 $z(t)=x(t)+ax(t-h)+bx(t+g)$• 明显地, 对 $t_1\geqslant t_0,\ t\geqslant t_1,\ z(t)>0$• 这样, 根据方程(1), 对某些 $t_2\geqslant t_1,\ t\geqslant t_2$, 有

$$z^{(n)}(t)=p\int_c^d x(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi+q\int_c^d x(t+\xi)\,\mathrm{d}\xi>0\text{•}$$

因此, $z^{(i)}(t)\ (i=0,1,\dots,n)$ 在区间$[t_2,\infty)$上符号不变• 令

$$w(t)=z(t)+az(t-h)+bz(t+g),\tag{23}$$

那么, 可以给出

$$w^{(n)}(t) = p\int_c^d z(t-\xi)\mathrm{d}\xi + q\int_c^d z(t+\xi)\mathrm{d}\xi \tag{24}$$

和

$$[w(t) + aw(t-h) + bw(t+g)]^{(n)} = p\int_c^d w(t-\xi)\mathrm{d}\xi + q\int_c^d w(t+\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{25}$$

我们考虑两种可能情况: 对 $t \geqslant t_2, z'(t) > 0$ 和 $z'(t) < 0$.

设对 $t \geqslant t_2, z'(t) > 0$. 根据式(23)和式(24), 对 $t \geqslant t_3 \geqslant t_2$, 得到 $w'(t) > 0$ 和 $w^{(n+1)}(t) > 0$. 另一方面, 因为 $z(t)$ 始终为正, 根据式(24), $w^{(n)}(t)$ 始终为正, 因而

$$w^{(i)}(t) > 0, \qquad \text{当 } t \geqslant t_3,\ i = 0, 1, \cdots, n+1. \tag{26}$$

作为式(25)和式(26)的一个结果, 得到

$$w^{(n)}(t) \geqslant \frac{q(d-c)}{1+a+b} w(t+(c-g)), \qquad \text{当 } t \geqslant t_3. \tag{27}$$

这样, 根据引理1(ⅱ)和条件(21), 方程(27)没有满足式(26)的解. 这是一个矛盾.

对 $t \geqslant t_2, z'(t) < 0$. 那么, 对 $t \geqslant t_3 \geqslant t_2, w'(t) < 0, w^{(n)}(t) > 0$ 和 $w^{(n+1)}(t) < 0$. 方程(25)中, 应用 $w^{(n)}(t)$ 在区间 $[t_3, \infty)$ 上递减的性质, 得到:

$$w^{(n)}(t) \geqslant \frac{p(d-c)}{1+a+b} w(t-(c-h)), \qquad \text{当 } t \geqslant t_3. \tag{28}$$

这与引理1(ⅰ)和条件(22)相矛盾, 定理得证.

例3 考虑下面中立型微分方程

$$\left[x(t) + \frac{1}{3}x(t-\pi) + \frac{2}{3}x(t+\pi)\right]^{(4)} =$$
$$\frac{1}{3}\int_{5\pi/2}^{9\pi/2} x(t-\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{6}\int_{5\pi/2}^{9\pi/2} x(t+\xi)\mathrm{d}\xi,$$

于是 $n = 4, a = 1/3, b = 2/3, c = 5\pi/2, d = 9\pi/2, p = 1/3, q = 1/6, g = h = \pi$.

很容易验证定理5的条件得到满足, 易证 $x(t) = t\cos t$ 为该问题的一个解.

定理6 设 $c > K = \max\{h, g\}, \lambda = \mu = \beta = \alpha = 1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-K}{n}\right)e > 1, \quad \left(\frac{p(d-c)}{1+a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c}{n}\right)e > 1,$$

则方程(1)是振荡的.

定理7 设 $c > K = \max\{h, g\}, \lambda = \mu = 1, \alpha = \beta = -1$, 且

$$\left(\frac{q(d-c)}{1+a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c}{n}\right)e > 1, \quad \left(\frac{p(d-c)}{1+a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-K}{n}\right)e > 1,$$

则方程(1)是振荡的.

因为定理6和定理7的证明与定理5的证明类似, 证略.

定理8 设 $a > 1, c > g, c > h, p$、q 为负的, 又 $\lambda = \mu = \alpha = -1, \beta = 1$, 且

$$\left(\frac{-q(d-c)}{a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-g}{n}\right)e > 1 \tag{29}$$

和

$$\left(\frac{-p(d-c)}{a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-h}{n}\right)e > 1, \tag{30}$$

则方程(1)是振荡的.

证明 设 $x(t)$ 为方程(1)的一个非振荡解. 我们假设 $x(t)$ 始终为正, 即, 存在一个 $t_0 \geqslant 0$, 对 $t \geqslant t_0, x(t) > 0$. 令

$$z(t) = x(t) - ax(t-h) - bx(t+g)\cdot \tag{31}$$

根据方程(1), 对某些 $t_1 \geqslant t_0$, $t \geqslant t_1$, 有

$$z^{(n)}(t) = p\int_c^d x(t-\xi)\mathrm{d}\xi + q\int_c^d x(t+\xi)\mathrm{d}\xi, \tag{32}$$

意味着 $z^{(n)}(t) < 0$• 因此, 根据Kiguradze引理, $z^{(i)}(t) > 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 在区间$[t_1, \infty)$ 上符号不变• 我们分两种情况讨论: (a) 对 $t \geqslant t_1$, $z(t) > 0$; (b) 对 $t \geqslant t_1$, $z(t) < 0$•

(a) $z(t) > 0$, $t \geqslant t_1$

根据式(31) 得到

$$x(t) \geqslant z(t)\cdot \tag{33}$$

由式(32) 和式(33), 有

$$z^{(n)}(t) - p\int_c^d z(t-\xi)\mathrm{d}\xi \leqslant 0, \qquad t \geqslant t_2 \geqslant t_1\cdot$$

因为 $z^{(i)}(t)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ 在$[t_1, \infty)$ 上符号不变, $z'(t)$ 或始终为正或始终为负• 若 z' 始终为正, 则

$$z^{(n)}(t) - p(d-c)z(t-d) \leqslant 0\cdot \tag{34}$$

若 z' 始终为负, 则

$$z^{(n)}(t) - p(d-c)z(t-c) \leqslant 0\cdot \tag{35}$$

当式(34) 和式(35) 满足时, 根据 Foster 和 Grimmer 的文献[10], 方程

$$z^{(n)}(t) - p(d-c)z(t-d) = 0 \tag{36}$$

和

$$z^{(n)}(t) - p(d-c)z(t-c) = 0 \tag{37}$$

有一个正解• 但是, 根据文献[11] 中定理 2, 式(36) 和式(37) 是振荡的, 这是一个矛盾•

(b) $z(t) < 0$, $t \geqslant t_1$

令 $0 < v(t) = -z(t) = -x(t) + ax(t-h) + bx(t+g)$• 那么, 有

$$v^{(n)}(t) = -p\int_c^d x(t-\xi)\mathrm{d}\xi - q\int_c^d x(t+\xi)\mathrm{d}\xi\cdot$$

再令 $w(t) = -v(t) + av(t-h) + bv(t+g)$, 可得到

$$w^{(n)}(t) = -p\int_c^d v(t-\xi)\mathrm{d}\xi - q\int_c^d v(t+\xi)\mathrm{d}\xi\cdot \tag{38}$$

又因为, 函数满足方程(1), 我们有

$$[-w(t) + aw(t-h) + bw(t+g)]^{(n)} = \\ -p\int_c^d w(t-\xi)\mathrm{d}\xi - q\int_c^d w(t+\xi)\mathrm{d}\xi\cdot$$

对 $t \geqslant t_1$, 若 $w(t) < 0$, 我们得到和(a) 相同的结果• 对 $t \geqslant t_1$, 设 $w(t) > 0$• 再考虑两种可能: (c) 对 $t \geqslant t_1$, $v'(t) > 0$; (d) 对 $t \geqslant t_1$, $v'(t) < 0$•

(c) $v'(t) > 0$, $t \geqslant t_1$

这时 $w^{(n+1)}(t) > 0$, 其中 $t \geqslant t_2 \geqslant t_1$, 从而有

$$(a+b)w^{(n)}(t+g) \geqslant -p\int_c^d w(t-\xi)\mathrm{d}\xi - q\int_c^d w(t+\xi)\mathrm{d}\xi\cdot$$

因为 w 在$[t_2, \infty)$ 上递增, 有

$$w^{(n)}(t) \geqslant -\frac{q(d-c)}{a+b}w(t+(c-g))\cdot \tag{39}$$

根据引理1(ⅱ)和条件(29),不等式(39)没有始终无界的正解•

(d) $v'(t)<0,\ t\geqslant t_1$

根据Kiguradze引理, $v''(t)>0$, 从而 $w'(t)=-v'(t)+av'(t-h)+bv'(t+g)\leqslant(a+b-1)v'(t+g)<0$• 另一方面, 根据式(38), 对 $t\geqslant T\geqslant t_1$, $w^{(n)}(t)$ 为递减函数, 根据Kiguradze引理, $(-1)^i w^{(i)}(t)>0$, 其中 $i=0,1,\cdots,n+1$, $t\geqslant T$• 因为 $w(t)$ 与 $w^{(n)}(t)$ 是递减的, 可得

$$(a+b)w^{(n)}(t-h)\geqslant -p\int_c^d w(t-\xi)\mathrm{d}\xi-q\int_c^d w(t+\xi)\mathrm{d}\xi,$$

从而

$$w^{(n)}(t)\geqslant -\frac{p(d-c)}{a+b}w(t-(c-h))•$$

与条件(30)和引理1(ⅰ)相矛盾,定理得证•

例4 考虑下面中立型微分方程

$$\left[x(t)-\frac{29}{12}x\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{55}{12}x(t+2\pi)\right]^{(4)}=$$
$$-3\int_{7\pi/2}^{5\pi}x(t-\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{7}{12}\int_{7\pi/2}^{5\pi}x(t+\xi)\mathrm{d}\xi,$$

可知 $n=4,\ a=29/12,\ b=55/12,\ c=7\pi/2,\ d=5\pi,\ p=-3,\ q=-7/12,\ h=\pi/2,\ g=2\pi$•

可见,定理8的条件满足,易证 $x(t)=\cos t$ 为该问题的一个解•

定理9 设 $a+b>1$, $c>K=\max\{h,g\}$, $k=\min\{h,g\}$, p、q 为负数, 且 $\lambda=\mu=\alpha=\beta=-1$, 又

$$\left(\frac{-q(d-c)}{a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c+k}{n}\right)e>1,\quad \left(\frac{-p(d-c)}{a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-K}{n}\right)e>1,$$

则方程(1)是振荡的•

因为该定理的证明与定理8的证明类似, 省略•

定理10 设 $1>a+b$, $c>K=\max\{h,g\}$, p、q 为负数, 且 $\lambda=\mu=-1$, $\alpha=\beta=1$, 又

$$\left(\frac{-q(d-c)}{a+b}\right)^{1/n}\left(\frac{c-K}{n}\right)e>1,$$

则方程(1)是振荡的•

证明 该定理的证明过程与定理8中直到情况(d)之前的证明(对 $t\geqslant t_1$, $v'(t)<0$)类似, 此时, 注意到 $z(t)<0$, $w(t)>0$, $v(t)>0$, 其中 $t\geqslant t_1$• 由于 $v(t)$ 递减, 根据Kiguradze引理有 $(-1)^i v^{(i)}(t)>0$, 其中 $t\geqslant t_1$ 和 $i=1,2,\cdots,n$• 于是有 $w(t)=-v(t)+av(t+h)+bv(t+g)\leqslant(-1+a+b)v(t)<0$• 但这与 $w(t)>0$ 相矛盾, 因此, 对 $t\geqslant t_1$, 不可能有 $v'(t)<0$• 从而定理得证•

[参 考 文 献]

[1] Hale J. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York: Springer_Verlag, 1977.

[2] Grace S R, Lalli B S. Oscillation theorems for second order neutral functional differential equations [J]. Appl Math Comput, 1992, **52**(2/3): 119—133.

[3] Grace S R, Lalli B S. On the oscillation of certain neutral functional differential equations[J]. Funcialaj Ekvacioj, 1993, **36**(2): 303—310.

[4] Grace S R. Oscillation criteria for n th_order neutral functional differential equations[J]. J Math

Anal Appl, 1994, **184**(1): 44—55.

[5] Grace S R. On the oscillations of mixed neutral equations[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**(2): 377—388.

[6] Candan T, Dahiya R S. Oscillation behavior of n_th order neutral differential equations with continuous delay[J]. J Math Anal Appl, 2004, **290**(1): 105—112.

[7] Dahiya R S, Candan T. Oscillation behavior of arbitrary order neutral differential equations[J]. Appl Math Lett, 2004, **17**(8): 953—958.

[8] Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G. Oscillation Theory of Differential Equations With Deviating Arguments[M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1987.

[9] Kusano T. On even order functional differential equations with advanced and retarded arguments [J]. J Differential Equations, 1982, **45**: 75—84.

[10] Foster K E, Grimmer R C. Nonoscillatory solutions of higher_order delay equations[J]. J Math Anal Appl, 1980, **77**: 150—164.

[11] Grace S R, Lalli B S. Oscillation theorems for n_th order nonlinear differential equations with deviating arguments[J]. Proc Amer Math Soc, 1984, **90**: 65—70.

[12] Agarwal R P, Grace S R. Oscillation theorems for certain neutral functional differential equations[J]. Comput Math Appl, 1999, **38**(11/12): 1—11.

[13] Kiguradze I T. On the oscillation of solutions of the equation $\mathrm{d}^m u/\mathrm{d}t^m + a(t)\,|u|^m \operatorname{sign} u = 0$[J]. Mat Sb, 1964, **65**(107): 172—187.

Oscillation Behavior of Solutions for Even Order Neutral Functional Differential Equations

T. Cadan

(Department of Mathematics, Faculty of Art and Science, Niğde University, Niğde, 51200, Turkey)

Abstract: Even order neutral functional differential equations are considered. Sufficient conditions for the oscillation behavior of solutions for this differential equation are presented. The new results are presented and the some examples also given.

Key words: neutral differential equations; oscillations; distributed deviating arguments