文章编号: 1000_0887(2006) 10_1169_04

圆薄膜在集中力作用下大变形基本方程的精确解*

郝际平[1], 颜心力[2]

(1. 西安建筑科技大学 土木学院, 西安 710055;
2. 西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055)

(陈山林, 皓江推荐)

摘要: 利用一种新型的简易方法, 获得圆薄膜在中心集中力作用下的基本方程与边界条件下非线性边值问题的精确解; 并利用现代不动点定理讨论了该问题解的存在唯一性• 虽然求解的是圆薄膜在中心集中力作用下的非线性问题, 但此原理亦可应用在其它类似的非线性问题•

关 键 词: 圆薄膜; 集中力; 大变形; 精确解; 不动点
中图分类号: O344.3 文献标识码: A

1 圆薄膜的大变形问题

轴对称圆薄膜的大变形问题, 国内外有众多学者进行研究(参见文献[1]~[5]), 特别是陈山林等获得的以初等函数表示的解析解[5]更为突出• 本文以异于文献[5]且较为简易的方法获得了相同结果, 而且利用现代的不动点理论讨论了该方程解的存在唯一性, 这些对该解的正确性与求解方法的探索都是有益的•

圆薄膜在中心集中力作用下的大变形问题的基本方程为

$$P = xsv,\quad (xs)'' = v^2, \tag{1}$$

式中 $P = [3(1-\nu^2)]^{3/2}R^2p/2\pi Eh^4$, $s = -6(1-\nu^2)R^2N_r/Eh^3$, r 为径向半径, R 为圆薄膜半径, h 为厚度, N_r 为径向薄膜力, E 为弹性模量, ν 为泊松系数, p 为集中力, $x = r^2/R^2$, $y = [3(1-\nu^2)]^{1/2}w/h$, $v = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$•

在式(1)中, 令 $z = xs$, 并消去 v, 得

$$z'' = P^2z^{-2}• \tag{2}$$

相应的边界条件

$$x = 1,\quad 2z' - (1+\nu)z = 0, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0} z(x) = O(x^{\alpha}),\qquad 且\ \alpha < 1• \tag{4}$$

对上述非线性边值问题, 文献[5]的解是

---

* 收稿日期: 2005_07_12; 修订日期: 2006_02_20
作者简介: 颜心力(1930—), 男, 湖南娄底人, 教授;
郝际平(1959—), 男, 山西襄垣人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: +86_29_82202827; Fax: +86_29_82202244; E_mail: haojiping@xauat.edu.cn)•

$$z(x) = -\left(\frac{9}{2}P^2\right)^{1/3}\left(x + \frac{1-3\nu}{3(1+\nu)}\right)^{2/3}. \tag{5}$$

2 求 解

设

$$z' = az^{\alpha}, \tag{6}$$

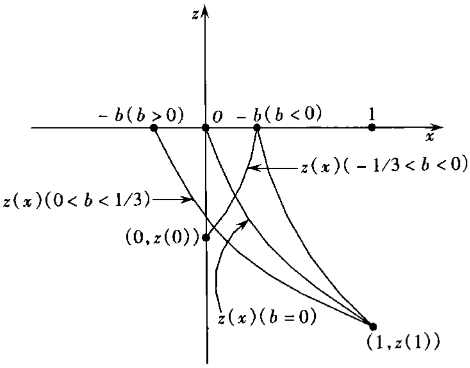

图 1 解的曲线

这里 a、α 为待定常数, 则 $z'' = a\alpha z^{\alpha-1}z' = a^2\alpha z^{2\alpha-1}$, 代入式(2)得

$$0 = a^2\alpha z^{2\alpha-1} - P^2z^{-2}. \tag{7}$$

令 $2\alpha - 1 = -2$, 得 $\alpha = -1/2$, 代入式(7)得

$$0 = -\left(\frac{1}{2}a^2 + P^2\right)z^{-2}.$$

若要上式成立, 则必有

$$a^2 = -2P^2. \tag{8}$$

将 $\alpha = -1/2$ 代入式(6)并积分得

$$z^{3/2} = \frac{3}{2}a(x+b) \qquad (b \text{ 为积分常数}),$$

由式(8), 故

$$z = \left[\frac{9}{4}a^2(x+b)^2\right]^{1/3} = -\left(\frac{9}{2}P^2\right)^{1/3}(x+b)^{2/3},$$

由式(3)可知 $b = (1-3\nu)/3(1+\nu)$, 故式(5)成立.

3 解的存在唯一性

由图 1 知 $z(1) \leqslant z(x) \leqslant 0(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 利用(文献[6]或文献[7])有关单调算子的不动点定理来判定非线性微分方程(2)、(3)、(4)存在唯一解, 并求其解的其它形式的表达式; 而且可利用解的迭代式, 求出满足误差估计的近似解. 首先给出

引理[6,7] 设 E 为具有正规锥的实 Banach 空间, $u_0 < v_0$, $[u_0, v_0] \subset E$, 算子 $A: [u_0, v_0] \to E$ 单调减, 且满足

(i) $u_0 \leqslant Av_0$, $Au_0 \leqslant v_0$;

(ii) $u_0 \leqslant u \leqslant v \leqslant v_0$, 存在 $\beta \in (0, 1)$, 使得 $\|Av - Au\| \leqslant \beta\|v - u\|$, 则 A 存在唯一不动点 $\bar{u} \in [u_0, v_0]$; 对任意的 $w_0 \in [u_0, v_0]$ 令 $w_n = Aw_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$, 则有 $\bar{u} = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$. 且有误差估计

$$\|\bar{u} - w_n\| \leqslant \beta^n\|v_0 - u_0\|. \tag{9}$$

在本节中, 取 E 为定义于闭区间[0, 1]上的连续函数空间, 在 $E = C_{[0,1]}$ 取等价范数 $\|z\| = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} e^{-Mx}|z(x)|$, $\forall z(x) \in C[0, 1]$, 这里 M 为某适当大的正数. 对式(2)积分:

$$z' = p^2\int_0^x y^{-2}(\zeta)\,d\zeta + c_1;$$

由式(5),

$$c_1 = z'(0) = -\frac{2}{3}\left(\frac{9p^2}{2b}\right)^{1/3}, \quad b = \frac{1-3\nu}{3(1+\nu)}.$$

对上式再积分

$$z = p^2\int_0^x\int_0^{\eta} z^{-2}(\zeta)\,d\zeta\,d\eta + c_1x + c_2; \text{ 由式(5)}, \; c_1 = z(0) = -\left(\frac{3pb}{\sqrt{2}}\right)^{2/3}, \tag{10}$$

依文献[6]中化多重积分为单重积分的方法,上式可写成

$$z = p^2\int_0^x (x-\xi)z^{-2}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + c_1x + c_2 \overset{\triangle}{=} Az, \tag{11}$$

则 A 的不动点等价于方程(2)~(4)的解•

定理 设 $u_0 = z(1) < v_0 < 0$ 且

$$v_0 \leqslant \min\left\{c_2^2, \left[\frac{p^2}{2z^2(1)} + c_1 + c_2\right]^2, 2p^2c_1^{-2}[c_2 - z(1)]\right\},$$

则方程(2)~(4)存在唯一连续解 $\bar{z}(x) \in [u_0, v_0]$,且对任意的 $w_0 \in [u_0, v_0]$,令 $w_n = Aw_{n-1}$, $n = 1, 2, \cdots$,有 $\bar{z}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$• 且有误差估计(9)•

证 显然,算子 $A: [u_0, v_0] \to C_{[0,1]}$ 单调减,又

$$Av_0 = \frac{1}{2}P^2v_0^{-2}x^2 + c_1x + c_2 \overset{\triangle}{=} f(x),$$

则 $f'(x) = P^2v_0^{-2}x + c_1$,又 $f'' = p^2v_0^{-2} > 0$, $v_0 = c_2$ 故当 $x = -P^{-2}v_0^2c_1 = -p^{-2}c_2^2c_1$ 时 $f(x)$ 取极小值• 又

$$f(0) = c_2,\ f(1) = \frac{1}{2}p^2c_2 + c_1 + c_2,\ f(-p^{-2}c_2^2c_1) = -\frac{1}{2}p^{-2}c_2^2c_1^2 + c_2,$$

$$f(0) > f(-pc_2^2c_1),\ f(1) - f(-p^{-2}c_2^2c_1) = (p^2 + c_1c_2^2)^2/2c_2^2p^2 > 0,$$

从而当 $x = -p^{-2}c_2^2c_1$ 时 $f(x)$ 在[0,1]取最小值• 因此

$$Av_0 \geqslant \frac{1}{2}P^2v_0^{-2}(-P^{-2}v_0^2c_1)^2 - P^{-2}v_0^2c_1^2 + c_2 =$$

$$-\frac{1}{2}P^{-2}v_0^2c_1^2 + c_2 \geqslant z(1) \qquad (\text{由定理假设})•$$

$Au_0 = (1/2)P^2u_0^{-2}x^2 + c_1x + c_2$,类似上述论证只能在 $x = 0$ 或 1 时才能取最大值•

$$Au_0|_{x=0} = c_2,\quad Au_0|_{x=1} = \frac{1}{2}P^2u_0^{-2} + c_1 + c_2,$$

由定理的假设,有 $Au_0 \leqslant v_0$• 故 A 满足引理的条件(ⅰ)•

对任意的 $u, v(u_0 \leqslant u \leqslant v \leqslant v_0)$,

$$|Av - Au| \leqslant P^2\int_0^x (x-\xi)\,|v^{-2}(\xi) - u^{-2}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi =$$

$$P^2\int_0^x (x-\xi)\frac{|v(\xi)+u(\xi)|}{u^2(\xi)v^2(\xi)}|v(\xi) - u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant$$

$$P^2\frac{2|u_0|}{v_0^4}\int_0^x \mathrm{e}^{M\xi}\mathrm{e}^{-M\xi}|v(\xi) - u(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leqslant$$

$$\frac{2p^2|u_0|}{v_0^4}\|v-u\|\int_0^x \mathrm{e}^{M\xi}\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{2P^2|u_0|}{v_0^4M}\|v-u\|\mathrm{e}^{Mx}•$$

从而, $\mathrm{e}^{-Mx}|Av - Au| \leqslant \left((2p^2|u_0|)/(v_0^4M)\right)\|v-u\| = \beta\|v-u\|$ 故有 $\|Av - Au\| \leqslant \beta\|v-u\|$,这里 $\beta = (2p^2|u_0|)/(v_0^4M)$,我们取 M 足够大使 $\beta \in (0,1)$,因此 A 满足引理的条件(ⅱ),从而依引理知本定理成立•

4 结　　论

本文为解决非线性边值问题提供了一种有效的方法,虽然本文解决的是一个圆薄膜在中心集中力作用下的非线性边值问题,但是其原理同样可以应用到其它类似问题•

[参 考 文 献]

[1] Hencky H. Uber den spannungszustand in kreisunden platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit[J]. Zeit F Math U Phyzik, 1915, (63): 311—317.

[2] 钱伟长, 王志忠, 徐尹格, 等. 圆薄膜中心部分受均布载荷产生的对称变形[J]. 应用数学和力学, 1981, **2**(6): 599—612.

[3] Sherbourne A N, Lennox W C. Elastic large deflections of annular membranes[J]. J Engng Mech Divis, Proc Asce, 1996, **92**(Em2): 75—99.

[4] Kao R, Perrone N. Large deflections of axisymmetric cicular membranes[J]. Internat J Solids Structures, 1971, **12**(7): 1601—1612.

[5] 陈山林, 郑周练. 圆薄膜在集中力作用下的大变形[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(1), 25—28.

[6] 颜心力. 非线性方程的精确解[M]. 北京: 经济科学出版社, 2004: 12—13, 100—102.

[7] 颜心力. 对称压缩算子的方程解的存在唯一性定理及应用[J]. 科学通报, 1990, **35**(10): 733—736.

Exact Solution of Large Deformation Basic Equations of Circular Membrane Under Central Force

HAO Ji_ping[1], YAN Xin_li[2]

(1. School of Civil Engineering, Xi' an University of Architecture and Technology, Xi' an 710055, P.R. China;

2. School of Science, Xi' an University of Architecture and Technology, Xi' an 710055, P.R. China)

Abstract: Exact solution of the nonlinear boundary value problem for the basic equation and boundary condition of circular membrane under central force were obtained by using new simple methods. The existence and uniqueness of the solution were discussed by making use of modern immovable point theorems. Although specific problem is treated, the basic principles of the methods can be applied to a considerable variety of nonlinear problems.

Key words: circular membrane; central force; large deformation; exact solution; fixed point