文章编号: 1000_0887(2006) 10_1182_11 c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

矢量场方向导数和时标正则曲线*

E• 奥衣马斯

(伊几大学 数学系, 35100, 伊兹密尔, 土耳其)

(郭懋正推荐)

摘要: 研究了一类参数方程的曲线, 其参变量表示为所谓时标(time scale) , 该时标是所有实数的集的一个任意闭子集• 引入了相应于矢量场的方向导数•

关 键 词: 时标; 矢量微分算子(nabla) 导数; 正则曲线; 切线; 矢量场

中图分类号: O186. 11; O175. 7 文献标识码: A

引 言

Aulbach 和 Hilger 在文献[1] 中忽略了时标(time scale) 的概念和时标的计算理论• 但是时标理论在一些重要的动力学过程的数学模拟中非常重要和有用• 考虑时标的动力系统理论的研究结果可参见文献[2~ 4] •

方向导数的概念是在某些几何和物理研究的基础上得出的• 在物理学中, 方向导数用于质点的定向运动研究• Bohner 和 Guseinov 发表了一篇关于时标偏微分法的文章[5]• 在该文中, 作者引入了 Δ(delta) 和 ∇(nabla) 偏导数的概念、关于时标的多变量函数的链规则(chain rule) 及方向导数的概念[5]•

本文的目的是研究相应于矢量场的方向导数的某些性质, 并利用关于时标的正则曲线的 ∇导数来定义切线•

我们打算把文献[5] 定义的几个概念应用到微分几何中•

1 时标计算的预备知识

时标(或称测度链(measure chain)) T 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个任意非空闭子集• 时标 T 是具有度量

$$d(t_1, t_2) = | t_1 - t_2 |$$

的完备度量空间• 当 $t \in T$, 我们定义前跃算子(forward jump operator) $\sigma: T \to T$ 为

$$\sigma(t) = \inf\{ s \in T, s > t\}$$

和后跃算子(backward jump operator) $\rho: T \to T$ 为

$$\rho(t) = \sup\{ s \in T, s < t\} •$$

---

* 收稿日期: 2005-08-01; 修订日期: 2006-04-18

作者简介: E• 奥衣马斯, 副教授(E_mail: eminozyilmaz@ hotmail. com) .

本文原文为英文, 吴承平 译, 张禄坤 校.

在此定义中，当存在有限的 $\max T$ 时，附加条件 $\sigma(\max T)=\max T$；当存在有限的 $\min T$ 时，附加条件 $\rho(\min T)=\min T$• 由于我们假设 T 为 $\mathbf{R}$ 的闭子集，所以当 $t\in T$ 时，$\sigma(t)$ 和 $\rho(t)$ 都在 T 中•

如果 $\sigma(t)>t$，我们称 t 是在右_散布的(right_scattered)，而如果 $\rho(t)<t$，我们称 t 是在左_散布的(left_scattered)• 如果 $\sigma(t)=t$，则 t 称为右_稠密的(right_dense)，而如果 $\rho(t)=t$，则 t 称为左_稠密的(left_dense)•

下面，我们引入由时标 T 导出的 T_k• 如果 T 有右_散布的极小值 m，则 $T_k=T-\{m\}$，否则 $T_k=T$•

对 $a, b\in T$，且 $a\leqslant b$，我们定义 T 中的区间 $[a, b]$：

$$[a, b]=\{t\in T: a\leqslant t\leqslant b\}•$$

可相应定义开区间和半开区间等• 如果 a 是右_散布的，我们用 $[a, b]_k$ 表示 $[\sigma(a), b]$，如果 a 是右_稠密的，则表示 $[a, b]$• 若 $f: T\to\mathbf{R}$ 为一函数，$t\in T_k$，则 f 在 t 点的 ∇ 导数定义为数量 $f^{\nabla}(t)$(若存在)，并具有如下性质：对每一 $\varepsilon>0$，存在 t 的邻域 U，使

$$|f(\rho(t))-f(s)-f^{\nabla}(t)(\rho(t)-s)|\leqslant|\rho(t)-s|,\qquad \text{对所有 } s\in U•$$

定理 1.1 对 $f: T\to\mathbf{R}$ 和 $t\in T_k$，下面结论成立：

(i) 若 f 在 t 是 ∇ 可微的，则 f 在 t 是连续的；

(ii) 若 f 在 t 是连续的且 t 是左_散布的，则 f 在 t 是 ∇_可微的，且

$$f^{\nabla}(t)=\frac{f(\rho(t))-f(t)}{\rho(t)-t};$$

(iii) 若 t 是左_稠密的，则 f 在 t 是 ∇_可微的若且仅若极限

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

存在(有限值)• 在此情况下 $f^{\nabla}(t)$ 等于该极限；

(iv) 若 f 在 t 是 ∇_可微的，则

$$f(\rho(t))=f(t)+[\rho(t)-t]f^{\nabla}(t)•$$

定理 1.2 若 $f, g: T\to\mathbf{R}$ 在 $t\in T_k$ 是 ∇_可微的，则

(i) $f+g$ 在 t 是 ∇_可微的，且

$$(f+g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)+g^{\nabla}(t);$$

(ii) 对任意常数 c，$c•f$ 在 t 是 ∇_可微的，且

$$(cf)^{\nabla}(t)=cf^{\nabla}(t);$$

(iii) $f•g$ 在 t 是 ∇_可微的，且

$$(f•g)^{\nabla}(t)=f^{\nabla}(t)g(t)+f(\rho(t))g^{\nabla}(t)=f(t)g^{\nabla}(t)+f^{\nabla}(t)g(\rho(t));$$

(iv) 若 $g(t)•g(\rho(t))\neq 0$，则 f/g 在 t 是 ∇_可微的，且

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t)=\frac{f^{\nabla}(t)g(t)-g^{\nabla}(t)f(t)}{g(t)•g(\rho(t))}•$$

称函数 $\Phi: T\to\mathbf{R}$ 为 $f: T\to\mathbf{R}$ 的 ∇_反导数，其中 f 由 $\Phi^{\nabla}(t)=f(t)$，$\forall t\in T_k$ 得到，则由 a 到 b 的 f 的 Cauchy ∇_积分由下式定义：

$$\int_a^b f(t)\nabla(t)=\Phi(b)-\Phi(a),\qquad \text{对所有 } a, b\in T•$$

为找到一类具有反导数的函数，我们引入有限_连续(ld_continuous)函数集•

设 $f: T \to \mathbf{R}$ 为一函数• 若函数 f 在 T 中每一左_稠密点是连续的, 且对所有右_稠密点 $t \in T$, 极限 $\lim_{s \to t} f(s)$ 存在(有限值), 则称 f 是有限_连续的• 我们用 C_{ld} 表示时标 T 的有限_连续函数集• 该函数集是 ∇_可微的, 其 ∇_导数是有限_连续的, 并用 C_{ld}^{∇} 表示•

定理 1.3 有限_连续函数具有 ∇_反导数•

设 T 为时标, $v: T \to \mathbf{R}$ 为一严格递增函数, 且 $\tilde{T} = v(T)$ 也是时标• 用 $\tilde{\rho}$ 表示 $\tilde{T}$ 上的跳跃函数, 用 $\tilde{\nabla}$ 表示 $\tilde{T}$ 上的导数• 则

$$v \circ \rho = \tilde{\rho} \circ v \text{•}$$

定理 1.4(链规则) 假设 $v: T \to \mathbf{R}$ 是严格递增的, $\tilde{T} = v(T)$ 是时标• 并设 $w: \tilde{T} \to \mathbf{R}$• 若对 $t \in T_k$ 存在 $v^{\nabla}(t)$ 和 $w^{\tilde{\nabla}}(v(t))$, 则在 t 有 $(w \circ v)^{\nabla}$ 且满足链规则

$$(w \circ v)^{\nabla} = (w^{\tilde{\nabla}} \circ v) v^{\nabla}, \qquad \text{在 } t\text{•}$$

定理 1.5(代换律) 假设 $v: T \to \mathbf{R}$ 是严格递增的, $\tilde{T} = v(T)$ 是时标• 并设 $f: T \to \mathbf{R}$ 为一有限_连续函数, 且 v 是 ∇_可微的, 具有有限_连续 ∇_导数, 则如果 $a, b \in T$, 有

$$\int_a^b f(t) v^{\nabla}(t) \nabla(t) = \int_{v(a)}^{v(b)} (f \circ v^{-1})(s) \tilde{\nabla}(s)\text{•}$$

2 广义正则曲线和曲线的切线

两个实向量 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 和 $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 的 Euclid 标量积是数量

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i\text{•}$$

我们用 $\|\xi\|$ 表示矢量 ξ 的长度(或模), 即

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2},$$

并设 T 为时标•

定义 2.1 在区段 $[a, b] \subset T$, $a < b$ 中定义一 ∇_正则曲线(或一段 ∇_正则弧), γ 为到空间 R^3 的映射

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t), \ z = f_3(t), \qquad t \in [a, b], \tag{1}$$

其中 f_1、f_2、f_3 为定义在 $[a, b]$ 上的实值函数, 且在 $[a, b]_k$ 上是 ∇_可微的, 具有有限_连续 ∇_导数, 且

$$|f_1^{\nabla}(t)|^2 + |f_2^{\nabla}(t)|^2 + |f_3^{\nabla}(t)|^2 \neq 0, \qquad t \in [a, b]_k\text{•} \tag{2}$$

设 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, $\boldsymbol{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$,

则可将方程组(1) 写为矢量形式

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in [a, b], \tag{3}$$

并且条件(2) 变为

$$\|\boldsymbol{f}^{\nabla}(t)\| \neq 0, \qquad t \in [a, b]_k\text{•} \tag{4}$$

定义 2.2 设 γ 为参数形式(1) 给出的曲线, $P_0 = (f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$, $t_0 \in [a, b]_k$ 为 γ 上一点, L_1 是通过 P_0^{ρ} 的直线, 其中

$$P_0^{\rho} = (f_1(\rho(t_0)), f_2(\rho(t_0)), f_3(\rho(t_0)))\text{•}$$

在 γ 上取任意点 P• 且 d 表示点 P_0^{ρ} 到点 P 的距离, 用 δ 表示直线 L_1 到 P 点的距离• 若当 $P \to P_0$, $P \neq P_0^{\rho}$ 时 $\delta / d \to 0$, 则称 L_1 为点 P_0 处曲线 γ 的反向切线•

容易看出, 若曲线 γ 在 P_0 点有反向切线 L_1, 则当 $P \to P_0$, $P \neq P_0^\rho$ 时, 直线 PP_0^ρ 集中到 L_1 上; 若当 $P \to P_0$, $P \neq P_0^\rho$ 时, 直线 PP_0^ρ 集中到某一直线上, 则该极限的直线即是曲线在点 P_0 的反向切线•

定理 2. 1　由方程(3)给出的每一∴_正则曲线在任意点 $P_0 = (f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$, $t_0 \in [a, b]_k$ 有反向切线, 该切线有定向矢量 $\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)$•

证明　假定曲线 γ 在点 $P_0(t_0)$ 有反向切线 L_1•　设 τ 为切线 L_1 的单位矢量•　点 P_0^ρ 到点 $P(t)$ 的距离 d 为 $\|\boldsymbol{f}(t_0) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0))\|$•　进而直线 L_1 到点 $P(t)$ 的距离 δ 为 $\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0)) \wedge \tau_1\|$, 其中 $\wedge$ 表示矢量积•　由反向切线的定义, 有

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0)) \wedge \tau_1\|}{\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0))\|} \to 0 \qquad (t \to t_0,\ t \neq \rho(t_0))\text{•}$$

另一方面

$$\frac{\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0)) \wedge \tau_1\|}{\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0))\|} = \frac{\|[(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0)))/(t - \rho(t_0))] \wedge \tau_1\|}{\|(\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0)))/(t - \rho(t_0))\|} \to$$
$$\frac{\|\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0) \wedge \tau_1\|}{\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)} \qquad (t \to t_0,\ t \neq \rho(t_0))\text{•}$$

同时 $\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0) \wedge \tau_1 = 0$•　因为 $\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0) \neq 0$, 所以矢量 $\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)$ 和 τ_1 是共线的•　因此, 若反向切线存在, 那么它有唯一定向矢量 $\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)$•

反之, 若设 L_1 是通过点 P_0^ρ 具有定向矢量 $\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)$ 的直线, 则 L_1 就是点 P_0 处的反向切线•同时, 如上所述, 有

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\|[\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0))] \wedge [(\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0))/(\|\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)\|)]\|}{\|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{f}(\rho(t_0))\|} \to$$
$$\frac{\|\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0) \wedge \boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)\|}{\|\boldsymbol{f}^{\therefore}(t_0)\|} = 0\text{•}$$

定理证毕•

注 2. 1　显然, 当 $P_0 \neq P_0^\rho$ 时, 曲线 γ 在 P_0 点的反向切线与通过点 P_0 和 P_0^ρ 的直线重合•

方程(1)给出的 ∴_正则曲线 γ, 在点 $P_0(t_0)$, $t_0 \in [a, b]_k$ 的反向切线方程为

$$\frac{X - f_1(t_0)}{f_1^{\therefore}(t_0)} = \frac{Y - f_2(t_0)}{f_2^{\therefore}(t_0)} = \frac{Z - f_3(t_0)}{f_3^{\therefore}(t_0)}\text{•}$$

在平面曲线情况下, 反向切线方程为

$$\frac{X - f_1(t_0)}{f_1^{\therefore}(t_0)} = \frac{Y - f_2(t_0)}{f_2^{\therefore}(t_0)}\text{•}$$

若∴_正则平面曲线的方程为

$$y = f(x), \qquad x \in [a, b] \subset T,$$

则点 $P_0(x_0)$, $x_0 \in [a, b]_k$ 的反向切线方程为

$$Y - f(x_0) = f^{\therefore}(t_0)(X - x_0)\text{•}$$

设 γ 为∴_正则曲线, 其方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t), \qquad t \in [a, b] \subset T\text{•}$$

若 γ 为方程(3) 确定的 ∴_正则曲线, 我们可引入如下形式的函数 $q(t)$:

$$q(t)=\int_a^t \|\boldsymbol{r}^{\Delta}(s)\|\Delta s,\qquad t\in[a,b]\cdot \tag{5}$$

函数 $q(t)$ 是严格递增并且连续的(在 T 的拓扑意义上)· 因此 $q([a,b])$ 即是时标· 在该时标上,我们分别用 ρ 和 ∇ 表示后跃函数和 Δ_导数·

变量 q 也可用作曲线 γ 的参数· 因此,一条曲线的参数化可以称为固有的(natural)((或内蕴的)(intrinsic)) Δ_参数化·

根据式(5),变量 t 变为 q: $t=t(q)$ 的函数· 因此有 $\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t(q))$·

定理 2.2 在曲线 γ 的固有 Δ_参数化条件下,反向切向量 $\boldsymbol{r}_q^{\nabla}$ 为单位矢量,即 $\|\boldsymbol{r}_q^{\nabla}\|=1$·

证明 由式(5)有

$$q^{\Delta}(t)=\|\boldsymbol{r}^{\Delta}(t)\|>0,\qquad t\in(a,b]\cdot$$

因此由链规则(定理 1.4)有

$$\boldsymbol{r}_t^{\Delta}=\boldsymbol{r}_q^{\nabla}q_t^{\Delta}=\boldsymbol{r}_q^{\nabla}\|\boldsymbol{r}_t^{\Delta}\|$$

且

$$\boldsymbol{r}_q^{\nabla}=\boldsymbol{r}_t^{\Delta}/\|\boldsymbol{r}_t^{\Delta}\|\cdot$$

否则 $\|\boldsymbol{r}_q^{\nabla}\|=1$· 定理证毕·

3 时标偏微分法

设 $n\in\mathbf{N}$ 确定· 对每一 $i\in\{1,2,\dots,n\}$ 设 T_i 表示一时标,即 T_i 为实数集 $\mathbf{R}$ 的非空闭子集,设集

$$\Lambda^n=T_1\times T_2\times\dots\times T_n=\{t=(t_1,t_2,\dots,t_n):t_i\in T_i,\text{对所有 } i=\{1,2,\dots,n\}\}\cdot$$

称 Λ^n 为一 n 维时标· 集 Λ^n 为一完备度量空间,其度量 d 定义为

$$d(t,s)=\left(\sum_{i=1}^n|t_i-s_i|^2\right)^{1/2},\qquad \text{当 } t,s\in\Lambda^n\cdot$$

设 σ_i 和 ρ_i 分别表示 T_i 中的前跃算子和后跃算子· 如前所述,当 $u\in T_i$ 时,前跃算子 $\sigma_i:T_i\to T_i$ 定义为

$$\sigma_i(u)=\inf\{v\in T_i:v>u\}$$

而后跃算子 $\rho_i:T_i\to T_i$ 定义为

$$\rho_i(u)=\sup\{v\in T_i:v<u\}\cdot$$

在这些定义中,若 T_i 有有限极大值,则令 $\sigma_i(\max T_i)=\max T_i$;若 T_i 有有限极小值,则令 $\rho_i(\min T_i)=\min T_i$· 若 $\sigma_i(u)>u$,则称 u 是右_散布的(在 T_i 中);若 $\rho_i(u)<u$,则称任意的 u 是左_散布的(在 T_i 中)· 同样,若 $u<\max T_i$ 且 $\sigma_i(u)=u$,则称 u 是右_稠密的(在 T_i 中);若 $u>\min T_i$ 且 $\rho_i(u)=u$,则称 u 是左_稠密的(在 T_i 中)· 若 T_i 有左_散布极大值 M,则定义 $T_i^k=T_i-\{M\}$,反之定义 $T_i^k=T_i$· 若 T_i 有右_散布极小值 m,则定义 $(T_i)_k=T_i-\{m\}$,反之定义 $(T_i)_k=T_i$·

设 $f:\Lambda^n\to\mathbf{R}$ 为一函数· f 对 $t_i\in T_i^k$ 的 Δ 偏导数定义为极限

$$\lim_{\substack{s_i \to t_i \\ s_i \neq \sigma_i(t_i)}} \frac{f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, \sigma_i(t_i), t_{i+1}, \cdots, t_n) - f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \cdots, t_n)}{\sigma_i(t_i) - s_i} =$$

$$\frac{\partial f(t)}{\Delta_i t_i},$$

高阶 Δ 偏导数可类似定义• f 对 $t_i \in (T_i)_k$ 的 ∇ 偏导数定义为极限

$$\lim_{\substack{s_i \to t_i \\ s_i \neq \rho_i(t_i)}} \frac{f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, \rho_i(t_i), t_{i+1}, \cdots, t_n) - f(t_1, t_2, \cdots, t_{i-1}, s_i, t_{i+1}, \cdots, t_n)}{\rho_i(t_i) - s_i} =$$

$$\frac{\partial f(t)}{\nabla_i t_i}•$$

定义 3.1 如果存在与 $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in \Lambda^n$ 无关的数 $A_1, A_2, \cdots, A_n$(但一般与 t^0 有关), 我们说函数 $f: \Lambda^n \to \mathbf{R}$ 在点 $t^0 = (t_1^0, t_2^0, \cdots, t_n^0) \in (T_1)_k \times (T_2)_k \times \cdots \times (T_n)_k$ 是完全 ∇ 可微的, 对所有 $t \in U_\delta(t^0)$, 有

$$f(t_1^0, \cdots, t_n^0) - f(t_1, \cdots, t_n) = \sum_{i=1}^n A_i(t_i^0 - t_i) + \sum_{i=1}^n \alpha_i(t_i^0 - t_i) \tag{6}$$

并且对每一 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 和所有 $t \in U_\delta(t^0)$, 有

$$f(t_1^0, \cdots, t_j^0, \rho_j(t_j^0), t_{j+1}^0, \cdots, t_n^0) - f(t_1, \cdots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \cdots, t_n) =$$

$$A_j(\rho_j(t_j^0) - t_j) + \sum_{i=1, i\neq j}^n A_i(t_i^0 - t_i) + \beta_{jj}(\rho_j(t_j^0) - t_j) + \sum_{i=1, i\neq j}^n \beta_{ij}(t_i^0 - t_i), \tag{7}$$

其中 δ 为充分小的正数, $U_\delta(t^0)$ 是 Λ^n 中 t^0 的 δ_邻域, $\alpha_i = \alpha_i(t^0, t)$ 和 $\beta_{ij} = \beta_{ij}(t^0, t)$ 定义在 $U_\delta(t^0)$ 上, 当 $t = t^0$ 时, 它们为 0 且

$$\lim_{t \to t_0} \alpha_i(t^0, t) = 0 \text{ 和 } \lim_{t \to t_0} \beta_{ij}(t^0, t) = 0, \qquad \text{对所有 } i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}•$$

定理 3.1 设 f 在点 $P(t^0, s^0)$ 是 ρ_1_完全 ∇ 可微的• 若函数 φ 和 ψ 在点 ξ^0 有 ∇ 导数, 则复合函数

$$F(\xi) = f(\varphi(\xi), \psi(\xi)), \qquad \xi \in T \tag{8}$$

在点 ξ^0 有 ∇ 导数, 可表示如下

$$F^{\nabla}(\xi^0) = \frac{\partial f(P)}{\nabla_1 t}\varphi^{\nabla}(\xi^0) + \frac{\partial f(\rho_1(t^0), s^0)}{\nabla_2 s}\psi^{\nabla}(\xi^0)•$$

证明 本定理可类似文献[5]中定理 7.1 给出证明•

定理 3.2 设函数 f 在点 $P(t^0, s^0)$ 是 ρ_2_完全 ∇ 可微的• 若函数 φ 和 ψ 在点 ξ^0 有 ∇ 导数, 则由式(8) 定义的复合函数 F 有 ∇ 导数 $F^{\nabla}(\xi^0)$, 其表达式为

$$F^{\nabla}(\xi^0) = \frac{\partial f(t^0, \rho_2(s^0))}{\nabla_1 t}\varphi^{\nabla}(\xi^0) + \frac{\partial f(t^0, s^0)}{\nabla_2 s}\psi^{\nabla}(\xi^0)• \tag{9}$$

证明 本定理可类似文献[5]中定理 7.2 给出证明•

4 方 向 导 数

设 T 为具有后跃算子 ρ 和矢量微分算子 ∇ 的时标, 我们假设 $0 \in T$• 并设 $\boldsymbol{w} \in (w_1, w_2) \in R^2$ 为一单位矢量, $P(t^0, s^0)$ 为 R^2 中的一个不动点• 设

$$T_1 = \left\{ t^0 + \xi w_1 : \xi \in T \right\} \text{ 和 } T_2 = \left\{ s = s^0 + \xi w_2 : \xi \in T \right\},$$

则 T_1 和 T_2 为时标, 且 $t^0 \in T_1$, $s^0 \in T_2$. 分别记 ρ_1 和 ρ_2 为 T_1 和 T_2 的后跃算子, ∴$_1$ 和 ∴$_2$ 为矢量微分算子.

定义 4.1 设函数 $f: T_1 \times T_2 \to \mathbf{R}$ 已知. 函数 f 在点 $P(t^0, s^0)$ 并在矢量 $\boldsymbol{w}$ 方向(沿 $\boldsymbol{w}$ 方向) 的 ∴ 方向导数定义为数量(若存在)

$$\frac{\partial f(P)}{∴ w} = F^{∴}(0), \tag{10}$$

其中 $$F(\xi) = f(t^0 + \xi w_1, s^0 + \xi w_2), \qquad \text{当 } \xi \in T. \tag{11}$$

定理 4.1 假设函数 f 在点 $P(t^0, s^0)$ 是 ρ_1_完全 ∴ 可微的, 则 f 在点 $P(t^0, s^0)$ 沿 $\boldsymbol{w}$ 方向的 ∴ 方向导数存在, 且表达式为

$$\frac{\partial f(P)}{∴ w} = \frac{\partial f(P)}{∴_1 t} w_1 + \frac{\partial f(\rho_1(t_0), s^0)}{∴_2 s} w_2. \tag{12}$$

证明 本定理可类似文献[5]中定理 8.2 给出证明.

5 矢量空间和方向导数的某些性质

我们考虑 Cartezian 积

$$\Lambda^2 = T_1 \times T_2 = \left\{ P = (x_1, x_2), \text{ 当 } x_i \in X_i \right\},$$

其中 T_i 定义为时标(对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$). 称 Λ^2 为时标的 2 维 Euclid 空间. 利用此 Cartezian 积, 我们给出矢量空间 Λ^2. 有时, Λ^2 可以假设为一个点集作为矢量空间. 对任意 2 个点 $P = (x_1, x_2)$, $Q = (y_1, y_2) \in \Lambda^2$ 和对任意常数 $\lambda \in \mathbf{R}$, Λ^2 上的标量和和标量积定义为

$$P + Q = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \quad \lambda P = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

这样我们可以定义函数 f, 当 $(P, Q) \to PQ$ 时, $f: \Lambda^2 \times \Lambda^2 \to \Lambda^2$ 在如下两个条件下成立:

(i) 对任意已知 3 点 $P, Q, L \in \Lambda^2$, $PQ + QL = PL$;

(ii) 对一个已知点 $P \in \Lambda^2$ 和矢量 $\alpha \in \Lambda^2$, $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ 若且仅若 Λ^2 中仅有一点 Q.

设对所有 $1 \leqslant i \leqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$, $x_i: \Lambda^2 \to T_i$ 为时标的 Euclid 坐标函数, 表示为集 $\left\{ x_1, x_2 \right\}$. 设 $\boldsymbol{f}: \Lambda^2 \to \Lambda^m$ 为一函数, 由在点 $P \in \Lambda^2$ 的 $\boldsymbol{f}(P) = (f_1(P), f_2(P), \ldots, f_m(P))$ 描述. 函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 P 称为 ρ_1_完全 ∴ 可微函数, 且所有函数 f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ 在点 P 是 ρ_1_完全 ∴ 可微的. 我们用 $C^{∴}_{\rho_1}$ 表示所有这类函数的集.

设 $\left\{ (P, v) = \boldsymbol{v}_P \in \Lambda^2 \right\}$ 为点 $P \in \Lambda^2$ 处的切向量集, 用 $V_P(\Lambda^2)$ 表示. 该集满足如下条件:

1. 和 $\boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{w}_P$ 可写为 $(P, \boldsymbol{v}) + (P, \boldsymbol{w}) = (P, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$;

2. 对任意常数 $a \in \mathbf{R}$ 和 $(P, \boldsymbol{v}) \in V_P(\Lambda^2)$, $a(P, \boldsymbol{v}) = (P, a\boldsymbol{v})$.

定理 5.1 设 $a, b \in \mathbf{R}$, $f, g \in C^{∴}_{\rho_1}$ 和 $\boldsymbol{v}_P, \boldsymbol{w}_P, z_P \in V_P(\Lambda^2)$, 则如下性质成立: 函数 $\boldsymbol{f}$ 在点 $P(t^0, s^0)$ 的方向导数满足:

(i) $$\frac{\partial \boldsymbol{f}(P)}{∴(a\boldsymbol{v}_P + b\boldsymbol{w}_P)} = a\frac{\partial \boldsymbol{f}(P)}{∴ \boldsymbol{v}_P} + b\frac{\partial \boldsymbol{f}(P)}{∴ \boldsymbol{w}_P};$$

(ii) $\dfrac{\partial(af+bg)(P)}{\partial v_P} = a\dfrac{\partial f(P)}{\partial v_P} + b\dfrac{\partial g(P)}{\partial w_P}$;

(iii) $\dfrac{\partial(fg)(P)}{\partial v_P} = g(\rho_1(t^0), s^0)\left[\dfrac{\partial f(P)}{\partial v_P} + f(\rho_1(t^0), \rho_2(t^0))\dfrac{\partial g(P)}{\partial v_P}\right] -$

$$v_1(t^0)v_1\frac{\partial f(P)}{\partial_1 t}\frac{\partial g(P)}{\partial_1 t} - v_2(s^0)v_1\frac{\partial g(P)}{\partial_1 t}\frac{\partial f(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}.$$

证明　(ii) 根据定理 4. 1, 有

$$\frac{\partial(af+bg)(P)}{\partial v_P} = a\frac{\partial f(af+bg)(P)}{\partial_1 t}v_1 + \frac{\partial f(af+bg)(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}v_2 =$$

$$a\left(\frac{\partial f(t^0, s^0)}{\partial_1 t}v_1 + \frac{\partial f(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}v_2\right) + b\left(\frac{\partial g(P)}{\partial_1 t}v_1 + \frac{\partial g(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}v_2\right) =$$

$$\left(a\frac{\partial f}{\partial v_P} + b\frac{\partial g}{\partial v_P}\right)(P).$$

(i) 和(iii) 可同(ii) 类似证明.

6　矢量场相应的方向导数

定义 6. 1　设 $\kappa(T_1 \times T_2)$ 为 ρ_1_完全 Δ 可微矢量场集, 并设 ρ_1_完全 Δ 可微函数 $f: T_1 \times T_2 \to \mathbf{R}$ 已知. 函数 f 在点 $P(t^0, s^0)$ 且矢量场 W 方向的 ∂ 方向导数定义为

$$\left(\frac{\partial f}{\partial W}\right)(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial w_P}\right).$$

根据此定义, 我们已定义函数 $W: C^{\infty}_{\rho_1} \to C^{\infty}_{\rho_1}$, 使 $W(P) = w_P$. w_P 为切向量, 且属于矢量场 W.

定理 6. 1　设 V 和 W 为两个矢量场, 则对两个任意函数 f 和 $g \in C^{\infty}_{\rho_1}$, 有

(i) $\dfrac{\partial(af+bg)}{\partial V} = a\dfrac{\partial f}{\partial V} + b\dfrac{\partial g}{\partial V}$;

(ii) $\dfrac{\partial(fg)}{\partial V} = g(\rho_1(t), s)\left(\dfrac{\partial f}{\partial V}\right) + f(\rho_1(t), \rho_2(s))\left(\dfrac{\partial g}{\partial V}\right) -$

$$v_1(t)v_1\frac{\partial f}{\partial_1 t}\frac{\partial g}{\partial_1 t} - v_2(s)v_1\frac{\partial g}{\partial_1 t}\frac{\partial f(\rho_1(t), s)}{\partial_2 s};$$

(iii) $\dfrac{\partial h}{\partial(fV+gW)} = f\dfrac{\partial h}{\partial V} + g\dfrac{\partial h}{\partial V}$.

证明　(ii) 根据定义 4. 1、定理 4. 1 和定理 5. 1, 有

$$\left(\frac{\partial(fg)}{\partial V}\right)(P) = \left(\frac{\partial(fg)(P)}{\partial v_P}\right) = \frac{\partial(fg)(P)}{\partial_1 t}v_1 + \frac{\partial(fg)(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}v_2 =$$

$$\left(\frac{\partial f(P)}{\partial_1 t}g(P) + f(\rho_1(t^0), s^0)\frac{\partial g(P)}{\partial_1 t}\right)v_1 + \left(\frac{\partial f(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}g(\rho_1(t^0), s^0) + \right.$$

$$\left. f(\rho_1(t^0), \rho_2(s^0))\frac{\partial g(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}\right)v_2 =$$

$$\frac{\partial f(P)}{\partial_1 t}g(P)v_1 + \frac{\partial f(P)}{\partial_1 t}g(\rho_1(t^0), s^0)v_1 - \frac{\partial f(P)}{\partial_1 t}g(\rho_1(t^0), s^0)v_1 +$$

$$\frac{\partial f(\rho_1(t^0),s^0)}{\Delta_2 s}g(\rho_1(t^0),s^0)v_2+f(\rho_1(t^0),s^0)\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}v_1+$$
$$f(\rho_1(t^0),\rho_2(s^0))\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}v_1-f(\rho_1(t^0),\rho_2(s^0))\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}v_1+$$
$$f(\rho_1(t^0),\rho_2(s^0))\frac{\partial g(\rho_1(t^0),s^0)}{\Delta_2 s}v_2=$$
$$g(\rho_1(t^0),s^0)\left(\frac{\partial f(P)}{\Delta_1 t}v_1+\frac{\partial f(\rho_1(t^0),s^0)}{\Delta_2 s}v_2\right)+\frac{\partial f(P)}{\Delta_1 t}v_1(g(P)-$$
$$g(\rho_1(t^0),s^0))+f(\rho_1(t^0),\rho_2(s^0))\left(\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}v_1+\frac{\partial g(\rho_1(t^0),s^0)}{\Delta_2 s}v_2\right)-$$
$$\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}v_1(f(\rho_1(t^0),\rho_2(s^0))-f(\rho_1(t^0),s^0))=$$
$$g(\rho_1(t^0),s^0)\left(\frac{\partial f(P)}{\Delta v_P}\right)+f(\rho_1(t^0),\rho_2(s^0))\left(\frac{\partial g(P)}{\Delta v_P}\right)-$$
$$v_1(t^0)\frac{\partial f(P)}{\Delta_1 t}\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}v_1-v_2(s^0)\frac{\partial g(P)}{\Delta_1 t}\frac{\partial f(\rho_1(t^0),s^0)}{\Delta_2 s}v_1=$$
$$\left[g(\rho_1(t),s)\left(\frac{\partial f}{\Delta V}\right)+f(\rho_1(t),\rho_2(s))\left(\frac{\partial g}{\Delta V}\right)-v_1(t)v_1\frac{\partial f}{\Delta_1 t}\frac{\partial g}{\Delta_1 t}-\right.$$
$$\left.v_2(s)v_1\frac{\partial g}{\Delta_1 t}\frac{\partial f(\rho_1(t),s)}{\Delta_2 s}\right](P)。$$

这样,对所有 $P\in T_1\times T_2$, 我们得到了条件(ii)。

(iii) 根据定义 4.1、定理 4.1 和定理 5.1, 有

$$\left[\frac{\partial h}{\Delta(fV+gW)}\right](P)=\left[\frac{\partial h(P)}{\Delta(f(P)V(P)+g(P)W(P))}\right]=$$
$$f(P)\frac{\partial h(P)}{\Delta v_P}+g(P)\frac{\partial h(P)}{\Delta w_P}=\left(f\frac{\partial h}{\Delta X}+g\frac{\partial h}{\Delta Y}\right)(P)。$$

这样,对所有 $P\in T_1\times T_2$, 我们得到了条件(iii)。

定义 6.2 矢量场 Z 是一个函数, 它与切于 Λ^2 每一点的切向量相关, 且 $Z(P)$ 在点 P 属于切向量空间 $V_P(\Lambda^2)$ 的集。一般来说, 矢量场表示为

$$Z=\sum_{i=1}^{n}g_i(x,y)\frac{\partial}{\partial x},\tag{13}$$

其中, $g_i(x,y)$ 为实值函数, 且有定义在 $T_1\times T_2$ 上的 Δ 偏导函数。

定义 6.3 设已知矢量场 $Z: T_1\times T_2\to T_1\times T_2$。函数 Z 在点 $P(t^0,s^0)$ 沿切向量 $w_P(w_1,w_2)$ 方向的 Δ 方向导数被定义为矢量(若存在):

$$(\partial Z(P))/(\Delta w_P)=Y^{\Delta}(0),$$

其中 $Y(\xi)=Z(t^0+\xi w_1,s^0+\xi w_2)$, 当 $\xi\in T$。

定理 6.2 设已知矢量场 Z。在点 $P(t^0,s^0)$ 沿切向量 w_P 方向, Z 的 Δ 方向导数存在, 且表达式为

$$\frac{\partial Z(P)}{\Delta w_P}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial g_i(P)}{\Delta w_P}\frac{\partial}{\partial x_i}(P),$$

其中函数 g_1 和 g_2 在点 $P(t^0, s^0)$ 有一阶偏导数•

证明 $\partial g_1(P)/(\partial w_P)$ 和 $\partial g_2(P)/(\partial w_P)$ 可类似于文献[5] 中定理 8. 2 求得• 因此定理得证•

定理 6. 3 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 且已知两个矢量场 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Z}$• 两个任意切向量 $\boldsymbol{v}_P$ 和 $\boldsymbol{w}_P$ 有如下性质:

(i) $\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial(a\boldsymbol{v}_P + b\boldsymbol{w}_P)} = a\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{v}_P} + b\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{w}_P}$;

(ii) $\dfrac{\partial(a\boldsymbol{Y} + b\boldsymbol{Z})}{\partial \boldsymbol{w}_P} = a\dfrac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{w}_P} + b\dfrac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{w}_P}$;

(iii) 对任意函数 $\boldsymbol{f} \in C^{\partial}_{\rho_1}$,

$$\frac{\partial(\boldsymbol{f}\boldsymbol{Y})}{\partial \boldsymbol{v}_P} = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}_P}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{f}\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{v}_P} - v_1(t)v_1\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial_1 t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial_1 t} - v_2(s)v_1\frac{\partial \boldsymbol{f}(\rho_1(t), s)}{\partial_2 s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial_1 t};$$

(iv)
$$\frac{\partial\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\rangle}{\partial \boldsymbol{v}_P} = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{v}_P}, \boldsymbol{Z}\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{Y}, \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{v}_P}\right\rangle - v_1(t)v_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\partial_1 t}\frac{\partial g_i}{\partial_1 t} -$$
$$v_2(s)v_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}\frac{\partial g_i(P)}{\partial_1 t}•$$

证明 (i) 根据定义 4. 1、定理 4. 1 和定理 5. 1, 有

$$\frac{\partial \boldsymbol{Z}(P)}{\partial(a\boldsymbol{v}_P + b\boldsymbol{w}_P)} = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial g_i(P)}{\partial(a\boldsymbol{v}_P + b\boldsymbol{w}_P)}\frac{\partial}{\partial x_i} =$$
$$a\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial g_i(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\frac{\partial}{\partial x_i} + b\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial g_i(P)}{\partial \boldsymbol{w}_P}\frac{\partial}{\partial x_i} = a\frac{\partial \boldsymbol{Z}(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P} + b\frac{\partial \boldsymbol{Z}(P)}{\partial \boldsymbol{w}_P},$$

因此对所有 $P \in T_1 \times T_2$, 我们得到了性质(i)•

(ii) 根据定义 4. 1、定理 4. 1 和定理 5. 1, 有

$$\left(\frac{\partial(a\boldsymbol{Y} + b\boldsymbol{Z})}{\partial \boldsymbol{v}_P}\right)(P) = \frac{\partial(a\boldsymbol{Y}(P) + b\boldsymbol{Z}(P))}{\partial \boldsymbol{v}_P} =$$
$$a\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_i(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\frac{\partial}{\partial x_i} + b\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial g_i(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\frac{\partial}{\partial x_i} =$$
$$a\frac{\partial \boldsymbol{Y}(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P} + b\frac{\partial \boldsymbol{Z}(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P} = a\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\partial \boldsymbol{v}_P} + b\frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\partial \boldsymbol{v}_P},$$

因此对所有 $P \in T^2$, 我们得到了性质(ii)•

(iii) 根据定义 4. 1、定理 4. 1 和定理 5. 1, 有

$$\left(\frac{\partial(\boldsymbol{f}\boldsymbol{Y})}{\partial \boldsymbol{v}_P}\right)(P) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(\boldsymbol{f}h_i)(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n}h_i(\rho_1(t^0), s^0)\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\right] +$$
$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}(\rho_1(t^0), \rho_2(s^0))\left[\frac{\partial h_i(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\right] - \sum_{i=1}^{n}v_1(t^0)\frac{\partial \boldsymbol{f}(P)}{\partial_1 t}\frac{\partial h_i(P)}{\partial_1 t}v_1 -$$
$$\sum_{i=1}^{n}v_2(s^0)\frac{\partial h_i(P)}{\partial_1 t}\frac{\partial \boldsymbol{f}(\rho_1(t^0), s^0)}{\partial_2 s}v_1 =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P}\right]h_i(\rho_1(t^0), s^0) + \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}(\rho_1(t^0), \rho_2(s^0))\frac{\partial h_i(P)}{\partial \boldsymbol{v}_P} -$$

$$
- v_1(t^0)\frac{\partial f(P)}{\nabla_1 t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i(P)}{\nabla_1 t}v_1 - v_2(s^0)v_1\frac{\partial f(\rho_1(t^0), s^0)}{\nabla_2 s}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i(P)}{\nabla_1 t} =
$$

$$
\left[\frac{\partial f}{\nabla v_P}\boldsymbol{Y}(\rho_1(t), s)\right] + f(\rho_1(t), \rho_2(s))\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\nabla v_P} - v_1(t^0)v_1\frac{\partial f}{\nabla_1 t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i}{\nabla_1 t} -
$$

$$
v_2(s)v_1\frac{\partial f(\rho_1(t), s)}{\nabla_2 s}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_i(P)}{\nabla_1 t}.
$$

(iv)
$$
\left(\frac{\partial\langle \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}\rangle}{\nabla v_P}\right)(P) = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial(h_i g_i)(P)}{\nabla v_P}\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{2}g_i(\rho_1(t^0), s^0)\left[\frac{\partial h_i(P)}{\nabla v_P}\right] +
$$

$$
\sum_{i=1}^{2}h_i(\rho_1(t^0), \rho_2(s^0))\left[\frac{\partial g_i(P)}{\nabla v_P}\right] - v_1(t^0)v_1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial h_i(P)}{\nabla_1 t}\frac{\partial g_i(P)}{\nabla_1 t} -
$$

$$
v_2(s^0)v_1\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial g_i(P)}{\nabla_1 t}\frac{\partial h_i(\rho_1(t^0), s^0)}{\nabla_2 s} =
$$

$$
\left[\left\langle\frac{\partial \boldsymbol{Y}}{\nabla v_P}, \boldsymbol{Z}(\rho_1(t), s)\right\rangle + \left\langle Y(\rho_1(t), \rho_2(s)), \frac{\partial \boldsymbol{Z}}{\nabla v_P}\right\rangle -\right.
$$

$$
\left. v_1 v_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial h_i(P)}{\nabla_1 t}\frac{\partial g_i(P)}{\nabla_1 t} - v_2(s^0)v_1\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\nabla_1 t}\frac{\partial h_i(\rho_1(t), s)}{\nabla_2 s}\right](P),
$$

因此,对所有 $P \in T_1 \times T_2$, 我们得到了性质(iv)•

[参 考 文 献]

[1] Aulbach B, Hilger S. Linear dynamic processes with inhomogeneous time scale[A]. In: Nonlinear Dynamics and Quantum Dynamical Systems[C]. Berlin: Akademie Verlag, 1990, 9—20.

[2] Ahlbrandt C D, Bohner M, Ridenhour J. Hamiltonian systems on time scales[J]. J Math Anal Appl, 2000, **250**: 561—578.

[3] Hoffacker J. Basic partial dynamic equations on time scales[J]. J Difference Equ Appl, 2002, **8**(4): 307—319. (In honor of Professor Lynn Erbe)

[4] Bohner M, Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales—An Introduction With Applications[M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[5] Bohner M, Guseinov G. Partial differentiation on time scales[J]. Dynamic Systems and Applications, 2003, **12**: 351—379.

Directional Derivative of the Vector Field and Regular Curves on Time Scales

Emin Özyilmaz

(Department of Mathematics, Ege University, 35100, İzmir, Turkey)

Abstract: The general idea is to study curves where in the parametric equations the parameter varies in a so_called time scale, which may be an arbitrary closed subset of the set of all real numbers. The directional derivative according to the vector fields was introduced.

Key words: time scale; nabla derivative; regular curve; tangent line; vector field