

文章编号: 1000\_0887(2006) 10\_1243\_07

c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000\_0887

# 周边面内压力作用下夹层圆板的非线性振动\*

杜国君, 马建青

(燕山大学 建筑工程与力学学院, 河北 秦皇岛 066004)

(刘人怀推荐)

**摘要:** 基于 von K  rm  n 薄板理论, 讨论了滑动固定基础上周边面内压力作用下夹层圆板的非线性振动问题, 应用变分法导出了该问题的非线性特征方程和边界条件, 给出了其精确静态解, 并使用修正迭代法求解了该方程, 导出了夹层圆板振幅和非线性振频的解析关系式。当周边面力使夹层圆板的最低固有频率为零时, 就可获得临界载荷的值。

**关 键 词:** 夹层圆板; 非线性振动; 临界载荷; 屈曲; 幅频\_载荷特征关系

中图分类号: O322 文献标识码: A

## 引言

板壳非线性振动问题的研究工作很多, 其理论也比较成熟, 但对于特殊材料或结构形式的板壳非线性振动问题的研究还不够完善。对于压电矩形薄板的非线性振动以及正交异性扁球壳的非线性振动问题等已有相关的文献报道<sup>[1,2]</sup>。静载荷作用下板壳结构的非线性振动特性也是研究者关心的课题。

所有结构物在静载作用下都要发生形状的改变, 从而引起其刚度的变化, 使其固有频率受到影响。文献[3]讨论了具有初缺陷曲板在非线性静平衡附近的微小振动, 由频率方程的表达式中, 令固有频率为零, 正好得到曲板受临界载荷失稳的表达式。周又和<sup>[4]</sup>基于 von K  rm  n 薄板理论, 研究了圆薄板在周边均布面内压力作用下的自由振动、屈曲和后屈曲, 其屈曲前后的稳定静平衡解以精确解形式给出; 在稳定静平衡构形附近, 讨论了其微小轴对称自由振动。采用幂级数解法, 精确地获得其固有频率和振型函数。当周边压力使圆薄板的最低固有频率为零时, 就可获得分支解的临界点(即临界载荷)和相应的屈曲波型, 然后求得前屈曲的路径。作者<sup>[5]</sup>对夹层圆板的轴对称大幅度自由振动做了初步探讨, 利用 Hamilton 原理导出了夹层圆板轴对称大幅度自由振动的基本方程, 并利用修正迭代法求出了具有滑动固定边界条件的夹层圆板轴对称大幅度自由振动的一种解析解。在此基础上, 作者<sup>[6,7]</sup>进一步讨论了均布荷载作用下夹层圆板在非线性弯曲静平衡构形附近的自由振动问题, 给出了其固有频率、载荷和振幅之间的特征关系。

本文讨论周边面内压力作用下夹层圆板的非线性振动, 给出了微幅振动时在周边均布面

\* 收稿日期: 2005-09-20; 修订日期: 2006-06-13

作者简介: 杜国君(1961—), 男, 黑龙江人, 教授, 副院长, 博士。主要从事非线性振动、数值计算等研究工作(联系人, E-mail: dugj2002@yahoo.com)。

内压力作用下夹层圆板的临界载荷, 还给出了大幅度振动时夹层圆板受周边力作用失稳的临界载荷。

## 1 基本方程和边界条件

考虑半径为  $a$ , 承受周边面内载荷  $q_1$  的夹层圆板。参照文献[7]可知, 其运动微分方程的变分形式可由 Hamilton 原理导出为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left\{ rm \frac{d^2 w}{dt^2} - 2h_1 \frac{d}{dr} \left( r \sigma_r \frac{dw}{dr} \right) - G_2 h_0 \frac{d}{dr} \left[ r \left( \phi + \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} \delta w 2\pi dr dt = 0, \quad (1)$$

$$D \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\phi) \right] - G_2 h_0 \left( \phi + \frac{dw}{dr} \right) = 0; \quad (2)$$

应变协调方程为

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_r) \right] + \frac{E}{2r} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = 0; \quad (3)$$

式中,  $a$  为夹层圆板半径,  $r$  为径向坐标,  $h_1$  为表板厚度,  $h_0$  为上下表板中面间距离,  $w$  为夹层板挠度,  $\phi$  为表板中面两相对点连线与变形前中面法线间夹角,  $m$  为夹层板的面密度,  $\sigma_r$  为中面炮径向应力,  $G_2$  为夹心的剪切模量,  $D$  为夹层板抗弯刚度,  $E$  为表板弹性模量。

设夹层圆板在静载荷  $q_1$  作用下产生挠度  $w^0$ , 在此基础上考虑其自由振动, 动挠度为  $w$ , 则有

$$w = w^0 + \bar{w}, \quad \sigma_r = \sigma_r^0 + \bar{\sigma}_r, \quad \phi = \phi^0 + \bar{\phi}, \quad (4)$$

并设其解为

$$w = W(r) \cos \omega t, \quad \phi = \phi(r) \cos \omega t, \quad \sigma_r = S(r) \cos^2 \omega t, \quad (5)$$

其中  $\omega$  是夹层圆板大幅度振动的无量纲振频,  $W(r)$ 、 $\phi(r)$ 、 $S(r)$  是未知的空间函数。将式(4)~(5)代入式(1)~(3), 并式(1)、(2)两式消去  $\phi(r)$  得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} + \frac{\omega^2 m}{G_2 h_0} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dW}{dr} \right) - \frac{\omega^2 m}{D} r W + \\ & \frac{2h_1}{G_2 h_0} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \sigma_r^0 \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} + \frac{3h_1}{2G_2 h_0} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r S \frac{dW}{dr} \right) \right] \right\} - \\ & \frac{3h_1}{2D} \frac{d}{dr} \left( r S \frac{dW}{dr} \right) - \frac{2h_1}{D} \frac{d}{dr} \left( r \sigma_r^0 \frac{dW}{dr} \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 S) \right] + \frac{E}{2r} \left( \frac{dW}{dr} \right)^2 = 0. \quad (7)$$

为了将上式转化为无量纲的形式, 引入下列符号:

$$\begin{cases} \rho = \frac{r}{a}, \quad W = \frac{w}{h_0}, \quad W^0 = \frac{w^0}{h_0}, \quad \phi = \frac{dW}{d\rho}, \quad \omega = \sqrt{\frac{ma^4}{D}}^{1/2}, \quad S = \frac{2h_1 a^2}{D} S, \\ S_r^0 = \frac{2h_1 a^2}{D} \sigma_r^0, \quad K = \frac{D}{G_2 h_0 a^2}, \quad \beta = \frac{3(1-\nu^2)}{2}, \quad P_1 = \frac{2h_1 a^2}{D} q_1, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} + K \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho S \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} + \\ & \omega^2 K \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dW}{d\rho} \right) - \frac{d}{d\rho} \left( \rho S \frac{dW}{d\rho} \right) - \frac{d}{d\rho} \left( \rho S_r^0 \frac{dW}{d\rho} \right) - \omega^2 \rho W + \\ & K \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho S_r^0 \frac{dW}{d\rho} \right) \right] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 S) \right] + \frac{\beta}{\rho} \left( \frac{dW}{d\rho} \right)^2 = 0 \quad (9)$$

滑动固定基础上边界条件为

$$\begin{cases} r = a \text{ 时}, & w = 0, \phi = 0, \overline{\omega}_r = 0, \sigma_r^0 = -q_1; \\ r = 0 \text{ 时}, & \phi = 0, \sigma_r < \infty. \end{cases} \quad (10)$$

将(4)、(5)两式代入(1)式解出  $\phi$ , 代入边界条件(10)式并转化为无量纲形式, 可得到

$$\rho = 1 \text{ 时}, \quad W = 0, \quad K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W d\rho + KS\phi + KS_r^0\phi + \phi = 0, \quad S = 0, \quad S_r^0 = -P_1; \quad (11)$$

$$\rho = 0 \text{ 时}, \quad W = W_0, \quad K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W d\rho + KS\phi + KS_r^0\phi + \phi = 0, \quad S < \infty; \quad (12)$$

式(12)中  $W_0$  为夹层圆板中心的振幅。

## 2 静力问题的精确解

根据文献[8]可得到本问题的精确静态解

$$S_r^0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} \rho^{2i}, \quad \phi^0 = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i+1} \rho^{2i+1}, \quad (13)$$

其中  $a_{2i}$  和  $b_{2i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) 是待定常数。

$$\begin{cases} a_{2i} = -\frac{1}{4i(i+1)} \sum_{m=0}^{i-1} b_{2m+1} b_{2i-2m-1} & (i = 1, 2, 3 \dots), \\ b_{2i+1} = -\frac{1}{Ka_0+1} \left[ \frac{1}{4i(i+1)} \sum_{m=0}^{i-1} a_{2m} b_{2i-2m-1} - K \sum_{m=1}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} \right] & (i = 2, 3, 4 \dots), \\ b_3 = \frac{1}{8(Ka_0+1)} (a_0 - 8Ka_2) b_1. \end{cases} \quad (14)$$

表 1 滑动固定夹层圆板的  $a_0$  和  $b_1$  的值

$P_1$	$K = 0.01$		$K = 0.05$		$K = 0.10$	
	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$	$a_0$	$b_1$
1	-0.998 849	-0.012 233	-0.998 853	-0.013 285	-0.998 859	-0.014 802
2	-1.998 941	-0.023 949	-1.998 957	-0.028 396	-1.998 981	-0.035 935
3	-2.999 025	-0.035 173	-2.999 060	-0.045 805	-2.999 118	-0.067 540
4	-3.999 103	-0.045 928	-3.999 162	-0.066 136	-3.999 270	-0.117 576
5	-4.999 174	-0.056 237	-4.999 263	-0.090 229	-4.999 435	-0.203 016
6	-5.999 238	-0.066 123	-5.999 361	-0.119 237	-5.999 585	-0.315 165
7	-6.999 298	-0.075 608	-6.999 453	-0.154 777	-6.999 597	-0.426 594
8	-7.999 352	-0.084 714	-7.999 537	-0.199 172	-7.998 763	-0.592 541
9	-8.999 401	-0.093 462	-8.999 605	-0.255 854	-8.998 953	-0.710 231
10	-9.999 446	-0.101 873	-9.999 647	-0.330 070	-9.999 085	-0.896 812
11	-10.999 48	-0.109 968	-10.999 69	-0.430 154	-10.999 11	-1.003 210
12	-11.999 52	-0.117 768	-11.999 75	-0.569 997	-11.999 19	-1.201 121
13	-12.999 95	-0.125 291	-12.999 87	-0.774 149	-12.999 25	-1.456 323
14	-13.999 96	-0.132 559	-13.999 90	-1.089 341	-13.999 39	-1.676 540
15	-14.999 99	-0.139 589	-14.999 92	-1.413 659	-14.999 50	-1.890 035

由于式(13)已经满足了夹层圆板的两个边界条件,为了确定常数 $a_0$ 和 $b_1$ ,须应用边界条件中尚未用过的另外两个边界条件。将式(13)代入这两个边界条件,得到关于待定常数 $a_0$ 和 $b_1$ 的非线性方程组

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{2i} = -P_1, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left[ K \sum_{m=0}^i a_{2m} b_{2i-2m+1} + b_{2i+1} \right] = 0 \quad (15)$$

使用迭代法,可以求得这些方程组关于 $a_0$ 和 $b_1$ 的数值解(见表1)。

### 3 边值问题的解析解

为了求解边值问题的一阶迭代解,在一阶近似中略去(8)式中的非线性项及与静变形有关项,然后将由(8)式所得的解 $W_1$ 代入(9)式,那么方程(8)、(9)分别变为

$$(L^2 + K\omega_0^2 L - \omega_0^2) W_1 = 0, \quad (16)$$

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 S_1) \right] + \frac{\beta}{\rho} \left( \frac{dW_1}{d\rho} \right)^2 = 0, \quad (17)$$

其中 $L = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \left( \frac{d}{d\rho} \dots \right) \right]$ ,  $\omega_0$ 为夹层圆板无量纲化的线性振频。边界条件则变为

$$\rho = 1 \text{ 时}, \quad W_1 = 0, \quad K\omega_0^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_1 d\rho + \phi_1 = 0, \quad S_1 = 0; \quad (18)$$

$$\rho = 0 \text{ 时}, \quad W_1 = W_0, \quad K\omega_0^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_1 d\rho + \phi_1 = 0, \quad S_1 < \infty \quad (19)$$

设方程(16)的解

$$W_1 = W_0 \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)} \rho^{2j}, \quad (20)$$

其中  $A_j^{(1)} = \mu_1 \frac{\omega_0^{2j}}{2^j (j!)^2 c^j} + \mu_2 \frac{(-1)^j c^j}{2^j (j!)^2}$ ,  $c = \omega_0^2 (K + \sqrt{K^2 + 4/\omega_0^2})/2$ ,

式中 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 为待定系数,由板的边界条件确定。

将式(20)代入式(18)中的第1、2式以及式(19)中的第1式,则可得到

$$A\mu = 0, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu &= [\mu_1, \mu_2, 1]^T, \quad A = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{02} & -1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \end{bmatrix}, \\ a_{01} &= a_{02} = 1, \quad a_{11} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_0^{2j}}{2^j (j!)^2 c^j}, \quad a_{12} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j c^j}{2^j (j!)^2}, \\ a_{21} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega_0^{2j}}{2^j (j!)^2 c^j} \left( \frac{K\omega_0^2}{2j+2} + 2j \right), \quad a_{22} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j c^j}{2^j (j!)^2} \left( \frac{K\omega_0^2}{2j+2} + 2j \right). \end{aligned}$$

由于 $\mu$ 为非零向量,故 $A$ 的行列式等于零,即

$$\det A = 0. \quad (22)$$

从(22)式中解出 $\omega_0$ ,于是得到了 $a_{ij}$ ( $i = 0, 1, 2; j = 1, 2$ )的值,再由(21)式可确定 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ ,因此, $W_1$ 就确定了。

将(20)式代入(17)式,两边积分后乘以 $\rho$ ,然后两边积分再除以 $\rho^2$ ,则可得到

$$S_1 = W_0^2 \sum_{j=0}^{\infty} B_j \rho^{2j}, \quad (23)$$

其中

$$B_j = -\frac{\beta}{j(j+1)} \sum_{i=1}^j i(j-i+1) A_i A_{j-i+1} \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

对于滑动固定边界条件有

$$B_0 = -\sum_{j=1}^{\infty} B_j.$$

将一阶迭代中的有关解代入边值问题(16), 则此边值问题的二阶迭代中有如下的特征值问题

$$(L^2 + K\omega^2 L - \omega^2) W_2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \Phi S_1 \frac{dW_1}{d\rho} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \Phi S_r^0 \frac{dW_1}{d\rho} \right] - \\ K \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d}{\rho d\rho} \left[ \Phi S_1 \frac{dW_1}{d\rho} \right] \right] \right] - \\ K \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[ \rho \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{d}{\rho d\rho} \left[ \Phi S_r^0 \frac{dW_1}{d\rho} \right] \right] \right]. \quad (24)$$

边界条件变为

$$\rho = 1 \text{ 时}, \quad W_2 = 0, \quad K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_2 d\rho + KS_2 \phi_2 + KS_r^0 \phi_2 + \phi_2 = 0, \\ S_2 = 0, \quad S_r^0 = -P_1; \quad (25)$$

$$\rho = 0 \text{ 时}, \quad W_2 = W_0, \quad K\omega^2 \frac{1}{\rho} \int_0^\rho \rho W_2 d\rho + KS_2 \phi_2 + KS_r^0 \phi_2 + \phi_2 = 0, \\ S_2 < \infty, \quad S_r^0 < \infty. \quad (26)$$

现在对此问题进行求解, 设方程(24)的解为

$$W_2 = W_0 \sum_{j=0}^{\infty} (A_j^{(2)} + C_j^{(2)}) \rho^{2j} + W_0^3 \sum_{j=0}^{\infty} D_j^{(2)} \rho^{2j}, \quad (27)$$

其中

$$A_j^{(2)} = \delta_1 \frac{\omega^{2j}}{2^{2j} (j!)^2 c^j} + \delta_2 \frac{(-1)^j c^j}{2^{2j} (j!)^2}, \quad c = \sqrt{K^2 + 4/\omega_0^2}/2.$$

将  $W_2$  的表达式代入微分方程(24), 并注意到式中左右两端  $\rho$  的各个次幂前的系数应该对应相等, 由此得到微分方程的系数表达式, 即

$$D_j^{(2)} = \frac{\omega^2}{16j^2(j-1)^2} D_{j-2}^{(2)} - \frac{K\omega^2}{4j^4} D_{j-1}^{(2)} + \frac{E_{j-2} - KF_{j-1}}{16j^2(j-1)^2}, \quad j \geq 2, \\ C_j^{(2)} = \frac{\omega^2}{16j^2(j-1)^2} C_{j-2}^{(2)} - \frac{K\omega^2}{4j^4} C_{j-1}^{(2)} + \frac{H_{j-2} - KI_{j-1}}{16j^2(j-1)^2},$$

其中

$$D_0^{(2)} = D_1^{(2)} = 0, \quad C_0^{(2)} = C_1^{(2)} = 0,$$

$$E_j = \sum_{k=0}^{j+2} 4(j+1) k A_k^{(1)} C_{j-k+1}^{(1)}, \quad F_j = \sum_{k=0}^{j+1} 16(j+1) j^2 k A_k^{(1)} C_{j-k+1}^{(1)},$$

$$H_j = \sum_{k=0}^{j+2} 4(j+1) (j-k+1) a_{2k} A_{j-k+1}^{(1)},$$

$$I_j = \sum_{k=0}^{j+1} 16(j+1) j^2 (j-k+1) a_{2k} A_{j-k+1}^{(1)}.$$

将解代入边界条件(25)的第1、第2式及(26)的第1式, 整理得

$$H\delta = 0, \quad (28)$$

其中

$$\delta = [\delta_1, \delta_2, 1]^T, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{01} & h_{02} & -1 \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \end{bmatrix}.$$

矩阵  $\mathbf{H}$  中所有元素都可写成  $\omega$  的函数, 其表达式从略。由方程(28) 可得到如下频率方程

$$\det \mathbf{H} = 0. \quad (29)$$

这就是所求的受周边面内压力作用下夹层圆板大幅度振动的幅频-载荷特征关系的解析表达式, 利用此式可对一定的周边载荷  $P_1$  及幅值  $W_0$  求出相应的  $\omega$  值, 因此矩阵  $\mathbf{H}$  的元素全部确定, 再由(28) 式求出  $\delta_1, \delta_2$ , 到此二阶修正迭代解全部确定。

#### 4 数值计算结果及讨论

对所讨论的滑动固定边界条件下受周边面内压力作用的夹层圆板进行数值计算, 取剪切参数  $K = 0.01, 0.05, 0.1$ , 所得结果绘于图 1~ 图 4。

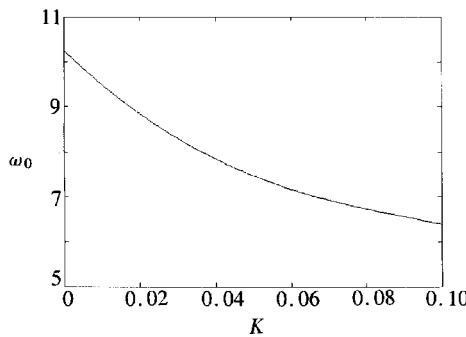


图 1  $K$  值对线性基频的影响

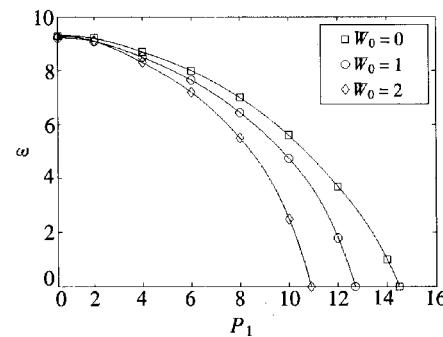


图 2 频率-压力曲线 ( $K = 0.01$ )

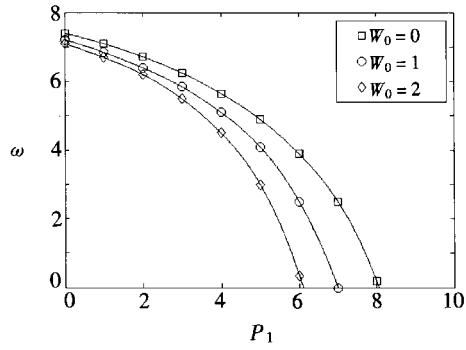


图 3 频率-压力曲线 ( $K = 0.05$ )

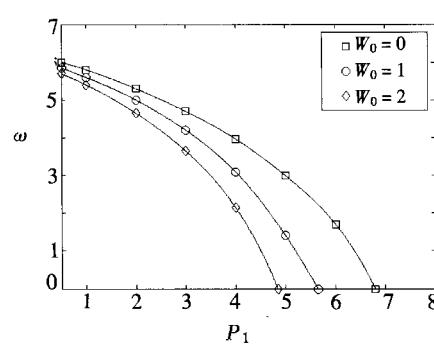


图 4 频率-压力曲线 ( $K = 0.1$ )

由图 1 可见, 随着  $K$  值增大, 夹层圆板的基频减小, 但与  $K$  之间不是线性关系。图 2~ 图 4 给出了不同  $K$  值情况下, 周边载荷对夹层圆板固有频率的影响关系。曲线对应于屈曲前夹层圆板的平衡状态, 屈曲前, 固有频率随着周边压力的增大而减小。当固有频率减小到零时便可得到周边受压夹层圆板在不同  $K$  值时的临界载荷。图 2~ 图 4 还给出了不同  $K$  值情况下夹层圆板微幅振动时 ( $W_0 = 0$ ) 失稳的临界载荷, 以及圆板具有初始振幅时 ( $W_0 = 1, 2$ ) 的临界载荷。由计算结果可见, 当  $K$  值相同时, 临界载荷随着振幅的增大而减小。

### [参 考 文 献]

- [1] 刘人怀, 李东, 袁鸿. 正交异性扁薄球壳的轴对称非线性振动[J]. 振动工程学报, 2005, 18(4): 395—405.
- [2] 陈炎, 刘人怀. 压电矩形薄板的非线性强迫振动[J]. 华南理工大学学报, 2003, 31(S): 63—66.
- [3] Lishakoff I, Birman V, Singer J. Small vibration of an imperfect panel in the vicinity of a nonlinear static state[J]. J Sound Vibration, 1987, 114(1): 57—63.
- [4] 周又和. 圆薄板在周边面内压力下的自由振动、屈曲和后屈曲[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1993, 29(4): 57—62.
- [5] 杜国君, 李慧剑. 均布载荷作用下夹层圆板的非线性振动[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(2): 192—200.
- [6] 杜国君, 田雨宝. 均布载荷作用下夹层圆板的载荷\_频率特征关系[J]. 工程力学, 1997, 14(2): 139—143.
- [7] 杜国君. 夹层圆板的大幅度振动[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(5): 435—441.
- [8] 刘人怀, 施云方. 夹层圆板大挠度问题的精确解[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(1): 11—23.

## Nonlinear Vibration of Circular Sandwich Plates Under Circumjacent Load

DU Guo\_jun, MA Jian\_qing

(School of Civil Engineering and Mechanics, Yan Shan University,  
Qinhuangdao, Hebei 066004, P. R. China)

**Abstract:** Based on von Karman plate theory, the issue about nonlinear vibration for circular sandwich plates under circumjacent load with the loosely damped boundary condition is researched. Nonlinear differential eigenvalue equations and boundary conditions of the problem were formulated by variational method and then their exact static solution can be got. The solution was derived by modified iteration method, so the analytic relations between amplitude and nonlinear oscillating frequency for circular sandwich plates were obtained. When circumjacent load makes the lowest natural frequency zero, critical load is obtained.

**Key words:** sandwich plate; nonlinear vibration; critical load; buckling; amplitude frequency\_load characteristic relation