

# 横观各向同性压电空间中圆裂纹与合成点源的三维相互作用

侯鹏飞<sup>1</sup>, 皓江<sup>2</sup>, 梁以德<sup>3</sup>

(1. 湖南大学 工程力学系, 长沙 410082;

2. 浙江大学 土木工程学院, 杭州 310027;

3. 香港城市大学 建筑工程系, 香港)

(本刊编委 皓江来稿)

**摘要:** 研究了横观各向同性压电空间中的圆裂纹与包括力偶极子、电偶极子、点力矩、力张和力旋这些常见合成点源的相互作用。用初等函数的形式给出了在任意位置和方向的合成点源作用下, 裂纹尖端 3 种应力强度因子和电位移强度因子的三维解。其中圆裂纹包括币形裂纹和外圆裂纹。这一系列的力电合成点源不仅其自身在工程中普遍存在, 而且在某些情形下还可以模拟诸如微裂纹、空洞、夹杂和位错等缺陷。

**关键词:** 压电; 圆裂纹; 合成点源; 强度因子

**中图分类号:** O343.2 **文献标识码:** A

## 引言

由于压电陶瓷材料的广泛应用和其固有的脆性弱点, 使得对于其断裂问题的研究一直是热点。最近 10 年对于压电陶瓷材料三维断裂问题的研究相关文献较多<sup>[1~14]</sup>。其中, Chen 和 Shioya<sup>[10~12]</sup> 和 Chen 等<sup>[13]</sup> 分别给出了在横观各向同性压电空间中的币形裂纹和外圆裂纹上下表面作用对称和反对称点力和点电荷时, 压电空间中力电耦合场的全场解。在此基础上, Ding 和 Chen<sup>[14]</sup> 导出了含币形裂纹和外圆裂纹压电空间在任意位置和方向的点力和点电荷作用下, 裂纹尖端应力强度因子和电位移强度因子的解, 简称场强因子基本解。

Wang 和 Kuang<sup>[15]</sup> 研究了电偶极子与各种裂纹的二维相互作用。最近, Hou 等<sup>[16]</sup> 研究了横观各向同性压电空间中的半平面裂纹与包括力偶极子、电偶极子、点力矩、力张和力旋这些常见合成点源的相互作用。给出了在任意位置和方向的合成点源作用下, 半平面裂纹尖端 3 种应力强度因子和电位移强度因子的三维解。这些力电合成点源除了其自身在工程中普遍存在外, 在某些情形下还可以模拟诸如微裂纹、空洞、夹杂和位错等缺陷。此外, 这些解还与在小区域里分布的力电载荷与裂纹的相互作用密切相关。

收稿日期: 2005\_08\_16; 修订日期: 2006\_08\_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472102); 湖南省青年骨干教师基金资助项目(521105236)

作者简介: 侯鹏飞(1969), 男, 湖南衡阳人, 教授(联系人, Tel: + 86\_731\_8822330; E\_mail: xiongs@zju.edu.cn)

本文将利用 Ding 和 Chen<sup>[14]</sup> 给出的场强因子基本解, 进一步考虑包括币形裂纹和外圆裂纹这两种圆裂纹与各种合成点源的三维相互作用, 用初等函数的形式给出在任意位置和方向的合成点源作用下, 应力强度因子和电位移强度因子的三维解. 最后通过数值算例讨论 3 种应力强度因子和电位移强度因子的分布规律.

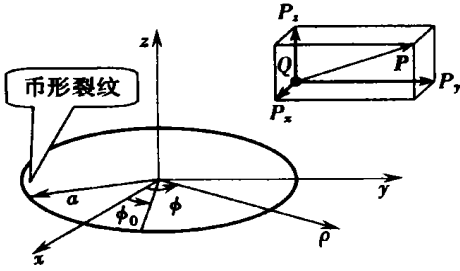


图 1 压电空间中的币形裂纹  
与点力和点电荷

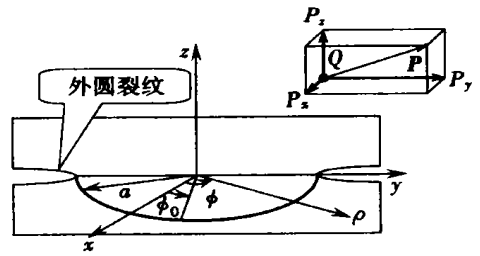


图 2 压电空间中的外圆裂纹  
与点力和点电荷

## 1 任意点力和点电荷与圆裂纹的相互作用

考虑横观各向同性压电空间中含有一与各向同性面平行且半径为  $a$  的圆裂纹(图 1 为币形裂纹, 图 2 为外圆裂纹), 任意方向的点力  $\boldsymbol{P} = (P_x, P_y, P_z)$  和点电荷  $Q$  作用在空间任意一点  $(x_0, y_0, z_0)$  上. 圆裂纹的裂尖位置由角度参数  $\phi_0$  来描述. Ding 和 Chen<sup>[14]</sup> 给出了在以上力电点载荷作用下, 圆裂纹应力和电位移强度因子的如下场强因子基本解.

当单独作用点力  $P_x$  时

$$k_1(\phi_0) = -\frac{P_x}{\sqrt{2a}} \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^3 (1a_j - 3b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \quad (1a)$$

$$k_D(\phi_0) = -\frac{P_x}{\sqrt{2a}} \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^3 (2a_j - 4b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \quad (1b)$$

$$k_2(\phi_0) + ik_3(\phi_0) = \frac{P_x a}{\sqrt{2a}} \left\{ \frac{G_1 e^{-i\phi_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [-c_j f_3^{\#}(z_j) + c_j f_4^{\#}(z_j)] + \frac{G_2 e^{i\phi_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [-c_j f_3^{\#}(z_j) + c_j f_4^{\#}(z_j)] \right\} - \frac{P_x a}{4\sqrt{2a}} \left\{ \frac{G_1 e^{-i\phi_0}}{G_1 - G_2} [f_5^{\#}(z_0) + f_6^{\#}(z_0)] + \frac{G_2 e^{i\phi_0}}{G_1 - G_2} [f_5^{\#}(z_0) + f_6^{\#}(z_0)] \right\} \quad (1c)$$

当单独作用点力  $P_y$  时

$$k_1(\phi_0) = -\frac{P_y}{\sqrt{2a}} \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^3 (1a_j - 3b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \quad (2a)$$

$$k_D(\phi_0) = -\frac{P_y}{\sqrt{2a}} \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^3 (2a_j - 4b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \quad (2b)$$

$$k_2(\phi_0) + ik_3(\phi_0) = \frac{P_y a i}{\sqrt{2a}} \left\{ \frac{G_1 e^{-i\phi_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [-c_j f_3^{\#}(z_j) - c_j f_4^{\#}(z_j)] + \frac{G_2 e^{i\phi_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [c_j f_3^{\#}(z_j) + c_j f_4^{\#}(z_j)] \right\} -$$

$$\frac{P_y a i}{4 \sqrt{2a}} \left\{ \frac{G_1 e^{-i_0}}{G_1 - G_2} [f_5^\#(z_0) - f_6^\#(z_0)] + \frac{G_2 e^{i_0}}{G_1 - G_2} [-f_5^\#(z_0) + f_6^\#(z_0)] \right\} \quad (2c)$$

当单独作用点力  $P_z$  时

$$k_1(\ 0) = - \frac{P_z}{\sqrt{2a}} \sum_{j=1}^3 s_j k_{1j} (a_j - 3b_j) f_2^\#(z_j), \quad (3a)$$

$$k_D(\ 0) = - \frac{P_z}{\sqrt{2a}} \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} (2a_j - 4b_j) f_2^\#(z_j), \quad (3b)$$

$$k_2(\ 0) + i k_3(\ 0) = \frac{2P_z a}{\sqrt{2a} (G_1 + G_2)} \left[ G_1 e^{-i_0} \sum_{j=1}^3 s_j k_{3j} c_j f_7^\#(z_j) + G_2 e^{i_0} \sum_{j=1}^3 s_j k_{3j} c_j f_7^\#(z_j) \right] \quad (3c)$$

当单独作用点电荷  $Q$  时

$$k_1(\ 0) = \frac{Q}{\sqrt{2a}} \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} (a_j - 3b_j) f_2^\#(z_j), \quad (4a)$$

$$k_D(\ 0) = \frac{Q}{\sqrt{2a}} \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} (2a_j - 4b_j) f_2^\#(z_j), \quad (4b)$$

$$k_2(\ 0) + i k_3(\ 0) = - \frac{2Qa}{\sqrt{2a} (G_1 + G_2)} \left[ G_1 e^{-i_0} \sum_{j=1}^3 s_j k_{3j} c_j f_7^\#(z_j) + G_2 e^{i_0} \sum_{j=1}^3 s_j k_{3j} c_j f_7^\#(z_j) \right], \quad (4c)$$

式中  $k_1, k_2$  和  $k_3$  分别为第一、第二和第三型应力强度因子  $k_D$  为电位移强度因子  $1 \sim 4, G_1 \sim 2, s_j, k_{1j}, k_{2j}, a_j, b_j$  和  $c_j (j = 0, 1, 2, 3)$  为由 Ding 和 Chen<sup>[14]</sup> 中的式(7.1.6), 式(7.2.6), 式(3.1.27), 式(3.1.29), 式(3.1.36), 式(7.1.7b), 式(7.2.3)定义的常数  $z_j = s_j z (j = 0, 1, 2, 3)$ , 对于币形裂纹,  $f_{1 \sim 7}^\#(z)$  为由 Ding 和 Chen<sup>[14]</sup> 中的式(7.4.7), 式(29)~ 式(31)定义的初等函数, 对于外圆裂纹,  $f_{1 \sim 7}^\#(z)$  为由 Ding 和 Chen<sup>[14]</sup> 中的式(7.4.8), 式(29), 式(32), 式(33)定义的初等函数 此外, 本文所有符号的上画线表示复共轭

## 2 力偶极子、电偶极子和点力矩与圆裂纹的相互作用

考虑两个平衡系统, 其一是一对大小相等方向相反的力  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$  和  $-\mathbf{P} = (-P_x, -P_y, -P_z)$  沿  $\mathbf{P}$  所在直线作用在含圆裂纹的压电空间上, 作用点距离为  $l$  当  $P$  和  $l \rightarrow 0$  时 ( $P$  为力矢  $\mathbf{P}$  的大小), 该系统构成力偶极子  $\lim_{l \rightarrow 0} P l = p$  (假设是有限的) 为力偶极子强度, 当力相互指向时为正, 力相互背向时为负 其二是一对电量相等电性相反的点电荷  $+Q$  和  $-Q$  作用在含圆裂纹的压电空间上, 相互之间的距离为  $h$  当  $Q$  和  $h \rightarrow 0$  时, 该系统构成电偶极子  $\lim_{h \rightarrow 0} Q h = q$  (假设是有限的) 为电偶极子强度, 方向从正电荷指向负电荷

由以上定义可知, 在力偶极子和电偶极子作用下产生的沿圆裂纹裂尖的应力强度因子  $k_1, k_2, k_3$  和电位移强度因子  $k_D$ , 可以通过对场强度因子基本解(1)~(4)沿  $\mathbf{P}$  的方向(对力偶极子)或电偶极子正向(对电偶极子)求方向导数得到 由于  $P_m = P \cos \theta_m (m = x, y, z; \theta_m$  为  $\mathbf{P}$  的方向余弦), 故对于单独作用力偶极子  $p$  有

$$k_1 = - \frac{p}{\sqrt{2a}} \sum_{m, n = x, y, z} \cos \theta_m \frac{F_m^{k_1}}{n}, \quad (5)$$

$$k_D = - \frac{p}{\sqrt{2a}} \sum_{m, n=x, y, z}^3 \frac{F_m^k}{n}, \quad (6)$$

$$k_2 + ik_3 = \frac{\sqrt{ap}}{\sqrt{2}} \sum_{m, n=x, y, z}^3 \frac{F_m^{k_{23}}}{n}, \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} F_x^k = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^3 (a_j - 3b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \\ F_y^k = \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^3 (a_j - 3b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \\ F_z^k = \sum_{j=1}^3 s_j k_{1j} (a_j - 3b_j) f_2^{\#}(z_j), \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} F_x^{k_D} = \operatorname{Re} \left[ \sum_{j=1}^3 (2a_j - 4b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \\ F_y^{k_D} = \operatorname{Im} \left[ \sum_{j=1}^3 (2a_j - 4b_j) f_1^{\#}(z_j) \right], \\ F_z^{k_D} = \sum_{j=1}^3 s_j k_{1j} (2a_j - 4b_j) f_2^{\#}(z_j), \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} F_x^{k_{23}} = \left\{ \frac{G_1 e^{-i_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [-c_j f_3^{\#}(z_j) + c_j f_4^{\#}(z_j)] + \frac{G_2 e^{i_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [-c_j f_3^{\#}(z_j) + c_j f_4^{\#}(z_j)] \right\} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{G_1 e^{-i_0}}{G_1 - G_2} [f_5^{\#}(z_0) + f_6^{\#}(z_0)] + \frac{G_2 e^{i_0}}{G_1 - G_2} [f_5^{\#}(z_0) + f_6^{\#}(z_0)] \right\}, \\ F_y^{k_{23}} = i \left\{ \frac{G_1 e^{-i_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [-c_j f_3^{\#}(z_j) - c_j f_4^{\#}(z_j)] + \frac{G_2 e^{i_0}}{G_1 + G_2} \sum_{j=1}^3 [c_j f_3^{\#}(z_j) + c_j f_4^{\#}(z_j)] \right\} - \frac{i}{4} \left\{ \frac{G_1 e^{-i_0}}{G_1 - G_2} [f_5^{\#}(z_0) - f_6^{\#}(z_0)] + \frac{G_2 e^{i_0}}{G_1 - G_2} [-f_5^{\#}(z_0) + f_6^{\#}(z_0)] \right\}, \\ F_z^{k_{23}} = \frac{2}{(G_1 + G_2)} \left[ \sum_{j=1}^3 G_1 e^{-i_0} s_j k_{1j} c_j f_7^{\#}(z_j) + \sum_{j=1}^3 G_2 e^{i_0} s_j k_{1j} c_j f_7^{\#}(z_j) \right] \end{cases} \quad (10)$$

设  $m$  ( $m = x, y, z$ ) 为电偶极子的方向余弦, 则单独作用电偶极子  $q$  时, 有

$$k_1(0) = - \frac{q}{\sqrt{2a}} \sum_{m, n=x, y, z}^3 \frac{F_m^{k_1}}{m}, \quad (11)$$

$$k_D(0) = - \frac{q}{\sqrt{2a}} \sum_{m, n=x, y, z}^3 \frac{F_m^{k_D}}{m}, \quad (12)$$

$$k_2(0) + ik_3(0) = \frac{\sqrt{aq}}{\sqrt{2}} \sum_{m, n=x, y, z}^3 \frac{F_m^{k_{23}}}{m}, \quad (13)$$

式中

$$F_x^k = \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} (a_j - 3b_j) f_2^{\#}(z_j), \quad (14)$$

$$F^{k_D} = \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} (2a_j - 4b_j) f_2^{\#}(z_j), \tag{15}$$

$$F^{k_{23}} = \frac{2}{G_1 + G_2} \left[ G_1 e^{-i_0} \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} c_j f_7^{\#}(z_j) + G_2 e^{i_0} \sum_{j=1}^3 s_j k_{2j} c_j f_7^{\#}(z_j) \right] \tag{16}$$

再考虑一个平衡系统, 一对大小相等方向相反的力  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$  和  $-\mathbf{P} = (-P_x, -P_y, -P_z)$  作用在与它们垂直的一条直线上, 作用点距离为  $l$  当  $P$  和  $l \rightarrow 0$  时 ( $P$  为力矢  $\mathbf{P}$  的大小), 该系统构成点力矩  $\mathbf{M} = \lim_{l \rightarrow 0} P l = M$  (假设是有限的) 为点力矩强度,  $\mathbf{M}$  的方向由右手法则确定

由以上定义可知, 在点力矩作用下产生的沿圆裂纹裂尖的应力强度因子  $k_1, k_2, k_3$  和电位移强度因子  $k_D$ , 可以通过对场强度因子基本解(1)~(4)沿  $\mathbf{P}$  的法向方向即力臂  $l$  的方向求导数得到 约定力臂  $l$  的方向余弦为  $x, y$  和  $z$  由  $P_m = P \cos m$  ( $m = x, y, z$ ;  $m$  为  $\mathbf{P}$  的方向余弦), 故对于作用点力矩有

$$k_1 = - \frac{M}{\sqrt{2a}} \sum_{m,n=x,y,z} \cos m \cos n \frac{F_m^{k_1}}{n}, \tag{17}$$

$$k_D = - \frac{M}{\sqrt{2a}} \sum_{m,n=x,y,z} \cos m \cos n \frac{F_m^{k_D}}{n}, \tag{18}$$

$$k_2 + ik_3 = \frac{\sqrt{a}M}{\sqrt{2}} \sum_{m,n=x,y,z} \cos m \cos n \frac{F_m^{k_{23}}}{n}, \tag{19}$$

式中  $F_m^{k_1}, F_m^{k_D}$  和  $F_m^{k_{23}}$  ( $m = x, y, z$ ) 如式(8)~式(10)所示

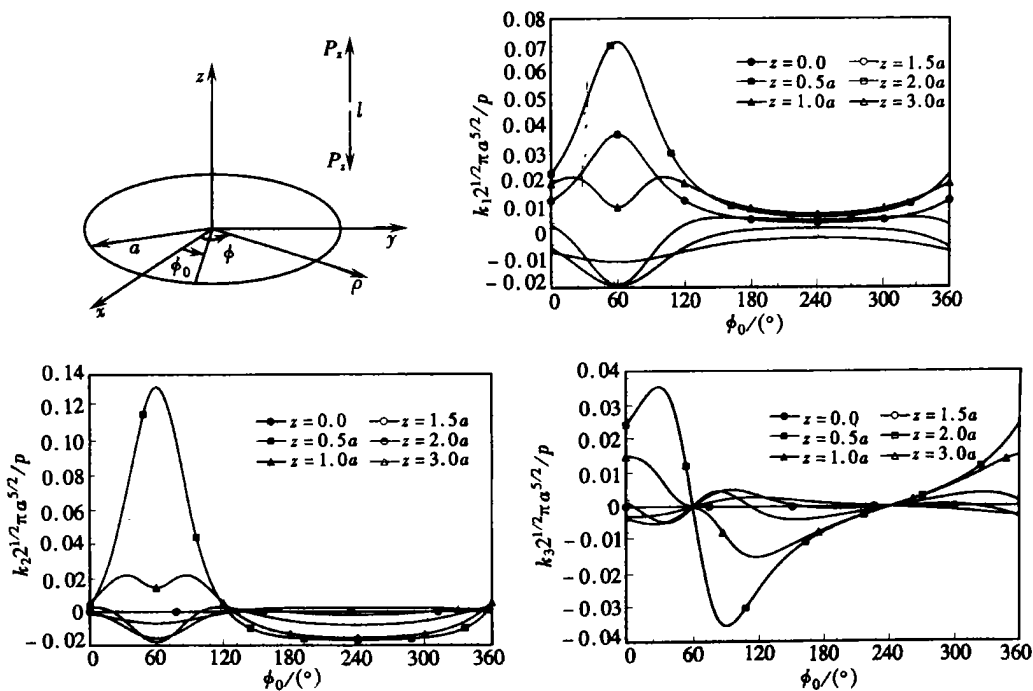


图3 作用点在 ( $l/a = 2, \phi_0 = \pi/3, z$ ) 的平行于  $z$  轴的力偶极子在圆形裂纹尖端产生的  $k_1, k_2$  和  $k_3$

### 3 力张和力旋与圆裂纹的相互作用

考虑一个由 3 个相互正交、方向余弦分别为  $(x, y, z)$ 、 $(x, y, z)$ 、 $(x, y, z)$  且强度均为  $p$  的力偶极子作用在点  $(x, y, z)$  处构成的力中心扩张, 简称力张  $P$ 。类似地, 两对相互正交的力构成的两个强度为  $M$  的力矩进一步构成了一个具有相同作用点、相同强度  $M$  和方向的力旋  $M$ 。这两个合成点源可以模拟网格、原子空隙和球状夹杂。利用叠加原理、式(5)~式(7)和式(17)~式(19), 可以得到在力张  $P$  和力旋  $M$  作用下的应力和电位移强度因子

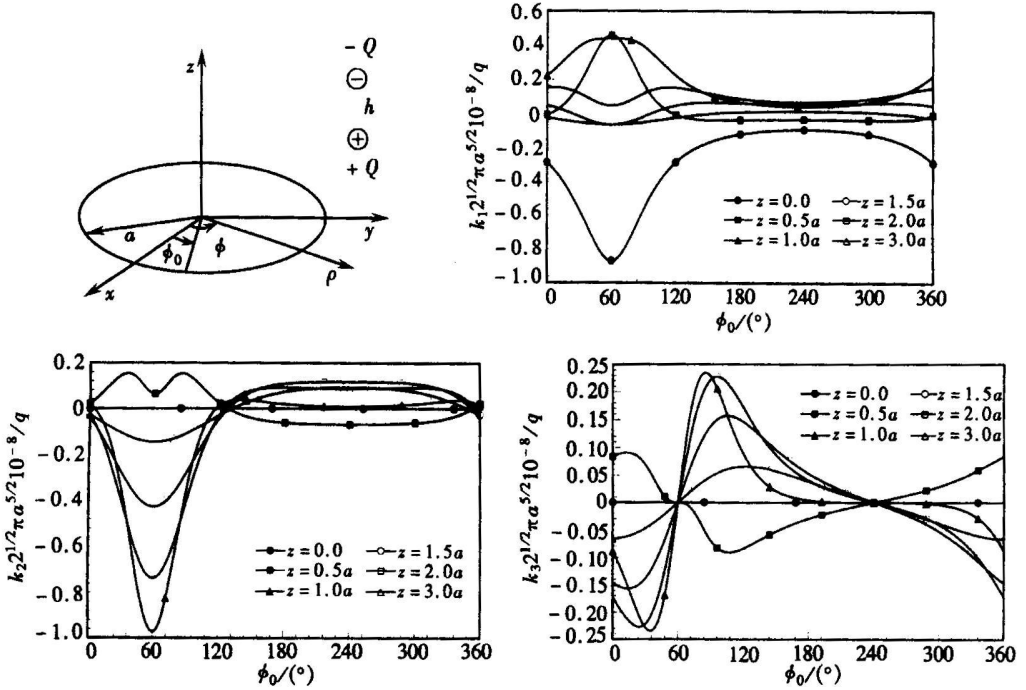


图4 作用点在  $(x/a = 2, y/a = 1/3, z)$  的  $z$  向电偶极子在币形裂纹尖端产生的  $k_1$ 、 $k_2$  和  $k_3$

单独作用力张  $P$  时有

$$k_1 = - \frac{p}{\sqrt{2a}} \sum_{m=x,y,z} \frac{F_m^{k_1}}{m}, \quad (20)$$

$$k_D = - \frac{p}{\sqrt{2a}} \sum_{m=x,y,z} \frac{F_m^{k_D}}{m}, \quad (21)$$

$$k_2 + ik_3 = \frac{\sqrt{ap}}{\sqrt{2}} \sum_{m=x,y,z} \frac{F_m^{k_{23}}}{m} \quad (22)$$

单独作用力旋  $M$  时有

$$k_1 = - \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[ M_x \left( \frac{F_y^{k_1}}{z} - \frac{F_z^{k_1}}{y} \right) + M_y \left( \frac{F_z^{k_1}}{x} - \frac{F_x^{k_1}}{z} \right) + M_z \left( \frac{F_x^{k_1}}{y} - \frac{F_y^{k_1}}{x} \right) \right], \quad (23)$$

$$k_D = - \frac{1}{\sqrt{2a}} \left[ M_x \left( \frac{F_y^{k_D}}{z} - \frac{F_z^{k_D}}{y} \right) + M_y \left( \frac{F_z^{k_D}}{x} - \frac{F_x^{k_D}}{z} \right) + M_z \left( \frac{F_x^{k_D}}{y} - \frac{F_y^{k_D}}{x} \right) \right], \quad (24)$$

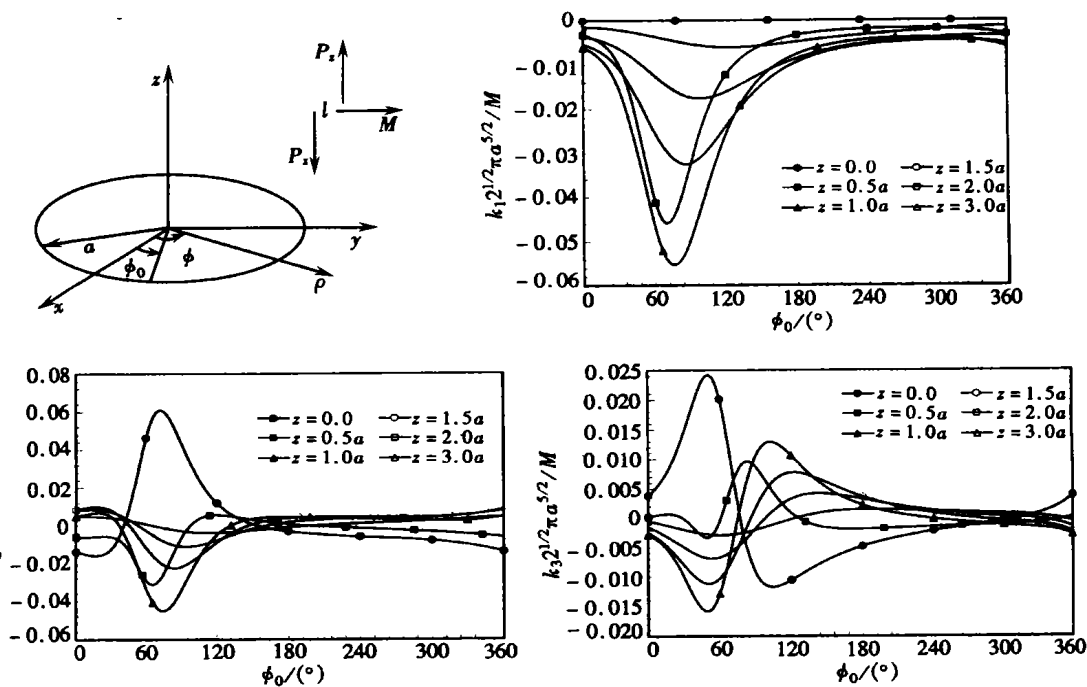


图 5 作用点在  $(r/a = 2, \theta = \pi/3, z)$  的由一对  $z$  向力构成的  $y$  向力矩在币形裂纹尖端产生的  $k_1, k_2$  和  $k_3$

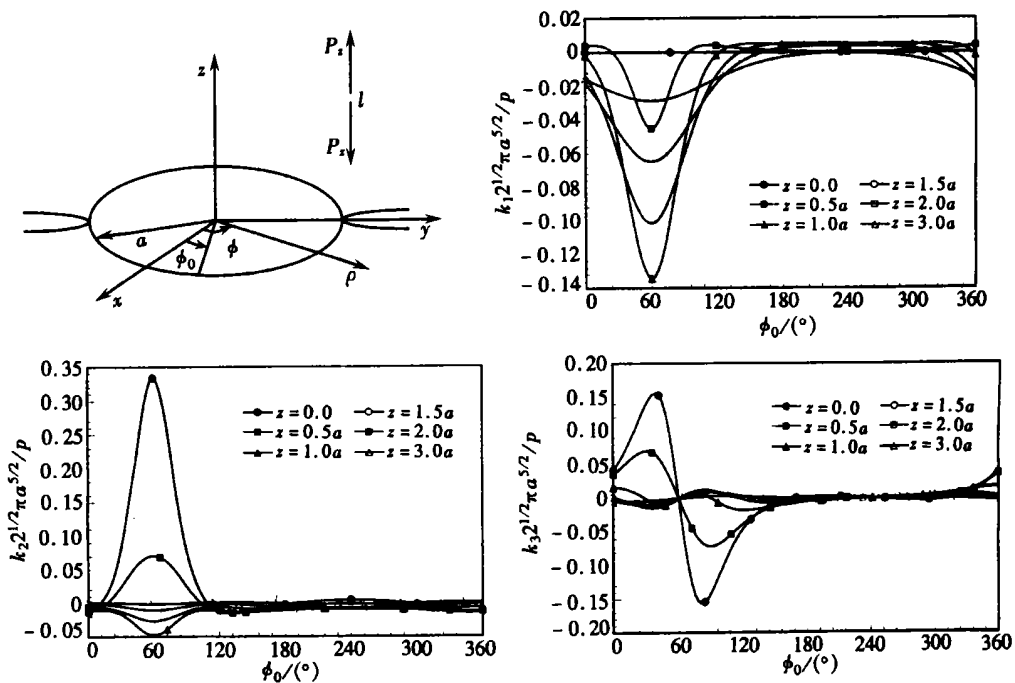


图 6 作用点在  $(r/a = 2, \theta = \pi/3, z)$  的平行于  $z$  轴的力偶极子在外圆裂纹尖端产生的  $k_1, k_2$  和  $k_3$

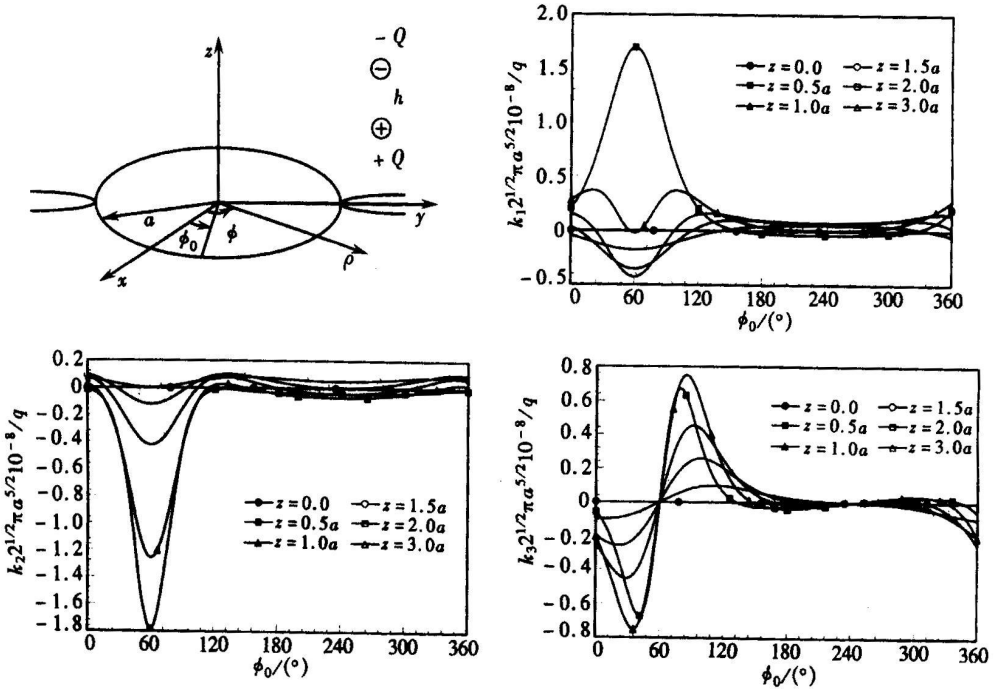


图7 作用点在 \$(l/a = 2, z = l/3, z)\$ 的 \$z\$ 向电偶极子在外圆裂纹尖端产生的 \$k\_1, k\_2\$ 和 \$k\_3\$

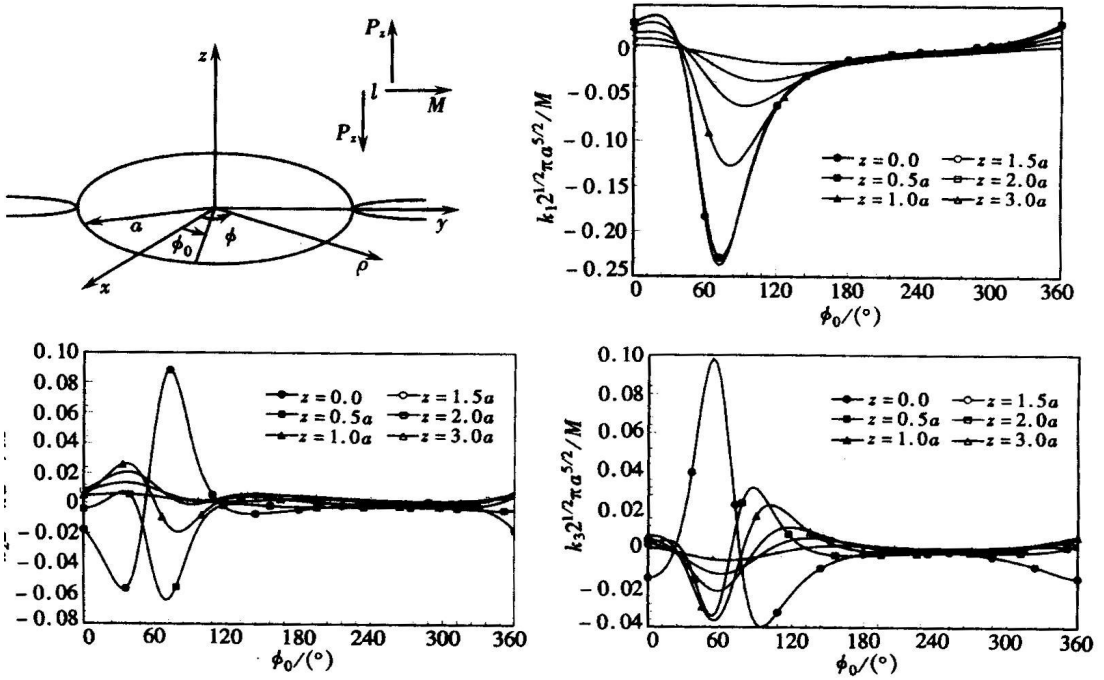


图8 作用点在 \$(l/a = 2, z = l/3, z)\$ 的由一对 \$z\$ 向力构成的 \$y\$ 向力矩在外圆裂纹尖端产生的 \$k\_1, k\_2\$ 和 \$k\_3\$



$$k_2 + ik_3 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left[ M_x \left( \frac{F_y^{k_{23}}}{z} - \frac{F_z^{k_{23}}}{y} \right) + M_y \left( \frac{F_z^{k_{23}}}{x} - \frac{F_x^{k_{23}}}{z} \right) + M_z \left( \frac{F_x^{k_{23}}}{y} - \frac{F_y^{k_{23}}}{x} \right) \right], \quad (25)$$

式中  $M_x$ 、 $M_y$  和  $M_z$  为力旋  $M$  指向  $x$ 、 $y$  和  $z$  轴正向的分量

可见力张和力旋都是独立于方向参数而只与其自身大小有关的量# 这一点不同于单个的力偶极子(5)~(7)和点力矩(17)~(19)#

## 4 数值算例

当一个  $z$  向力偶极子、一个  $z$  向电偶极子和一个  $y$  向点力矩(由一对  $z$  向平行力构成) 分别作用在含圆裂纹的 PZT<sub>4</sub><sup>[17]</sup> 压电空间内一点( $Q(a=2, \leq P/3, z)$ ) 上, 图3~图5和图6~图8 分别给出了币形裂纹和外圆裂纹的应力强度因子  $k_1$ 、 $k_2$  和  $k_3$  沿裂尖的分布曲线# 在计算过程中, 通用符号计算软件可以用来高效完成所需函数  $f_k^{\#}(z)$  ( $k=1\sim 7$ ) 的求导工作#

从图中可以看到, 应力强度因子  $k_1$ 、 $k_2$  和  $k_3$  沿裂尖呈现出复杂的分布趋势# 但大部分的应力强度因子随着角度  $\alpha$  的变化都有变号特性(正变为负或负变为正)# 这是使用裂纹闭合技术的必要依据, 特别是对于第一型应力强度因子  $k_1$  尤其有效#

此外, 计算还显示出两个相似性: 1) 电位移强度因子  $k_D$  沿裂尖的分布与第一型应力强度因子  $k_1$  相似; 2) 在力张和力旋作用下强度因子沿裂尖的分布与在力偶极子和点力矩作用下的强度因子相似#

感谢: 感谢香港城市大学专项基金(9610022)和湖南大学育英基金(531103011110)的资助

### [参 考 文 献]

- [1] Sosa H A, Pak Y E. Three-dimensional eigenfunction analysis of a crack in a piezoelectric material [J]. Internat J Solids and Structures, 1990, 26(1): 1) 15.
- [2] Pak Y E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials[J]. Internat J Fracture, 1992, 54(1): 79) 100.
- [3] Wang B. Three-dimensional analysis of a flat elliptical crack in a piezoelectric material[J]. Internat J Engng Sci, 1992, 30(6): 781) 791.
- [4] Kogan L, Hui C\_Y, Molkov V. Stress and induction field of a spheroidal inclusion or a penny-shaped crack in a transversely isotropic piezoelectric material[J]. Internat J Solids and Structures, 1996, 33(19): 2719) 2737.
- [5] Huang J H A. Fracture criterion of a penny-shaped crack in transversely isotropic piezoelectric media [J]. Internat J Solids and Structures, 1997, 34(20): 2631) 2644.
- [6] Chen W Q. Exact solution of a semi-infinite crack in an infinite piezoelectric body[J]. Arch Applied Mechanics, 1999, 69(5): 309) 316.
- [7] 胡玉林, 侯密山. 各向异性压电材料平面裂纹的耦合分析[J]. 固体力学学报, 2000, 21(4): 325) 329.
- [8] 王旭, 沈亚鹏. 三相压电复合本构模型中的弧形界面裂纹[J]. 固体力学学报, 2001, 22(4): 329) 345.
- [9] HOU Peng-fei, DING Hao-jiang, Guan F L. Exact solution to the problem of a half-plane crack in a transversely isotropic piezoelectric body subjected to antisymmetric tangential point forces[J]. Acta Mechanica Sinica A, 2001, 14(2): 176) 182.
- [10] Chen W Q, Shioya T S. Fundamental solution for a penny-shaped crack in a piezoelectric medium[J].

- J Mechanics and Physics of Solids, 1999, 47(7): 1459) 1475.
- [11] Chen W Q, Shioya T S. Complete and exact solutions of a penny-shaped crack in a piezoelectric solid: antisymmetric shear loadings[ J]. Internat J Solids and Structures, 2000, 37(18): 2603) 2619.
- [12] Chen W Q, Shioya T S. Green's functions of an external circular crack in a transversely isotropic piezoelectric medium[ J]. JSME International Journal, Ser A, 1999, 42: 73) 79.
- [13] Chen W Q, DING Hao\_jiang, HOU Peng\_fei. Exact solution of an external circular crack in a piezoelectric solid subjected to shear loading[ J]. Journal of Zhejiang University (Science), 2001, 2(1): 9) 14.
- [14] DING Hao\_jiang, Chen W Q. Three Dimensional Problems of Piezoelectricity[ M]. New York: Nova Science Publishers, 2001.
- [15] Wang J W, Kuang Z B. The interaction between crack and dipole of piezoelectricity[ J]. Acta Mechanica Solida Sinica A, 2000, 13(4): 1) 7.
- [16] HOU Peng\_fei, Pan X P, DING Hao\_jiang. Three-dimensional interactions of a half-plane crack in a transversely isotropic piezoelectric space with resultant sources[ J]. Acta Mechanica Solida Sinica A, 2005, 18(3): 265) 271.
- [17] Dunn M L, Taya M. Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneties in piezoelectric solids[ J]. ASME J Appl Mech, 1994, 61(2): 474) 475.

T h r e e \_ D m e n s i o n a l I n t e r a c t i o n s o f a C i r c u l a r C r a c k  
i n a T r a n s v e r s e l y I s o t r o p i c P i e z o e l e c t r i c  
S p a c e W i t h R e s u l t a n t S o u r c e s

HOU Peng\_fei<sup>1</sup>, DING Hao\_jiang<sup>2</sup>, LEUNG Andrew\_yt<sup>3</sup>

(1. Department of Engineering Mechanics, Hunan University,  
Changsha 410082, P. R. China;

2. Department of Civil Engineering, Zhejiang University,  
Hangzhou 310027, P. R. China;

3. Department of Building and Construction, City University of Hong Kong,  
Hong Kong, P. R. China)

Abstract: Exact solutions in form of elementary functions were derived for the stress and electric displacement intensity factors of a circular crack in a transversely isotropic piezoelectric space interacting with various stress and charge sources: force dipoles, electric dipoles, moments, force dilatation and rotation. The circular crack includes penny-shaped crack and external circular crack and the locations and orientations of these resultant sources with respect to the crack are arbitrary. Such stress and charge sources may model defects like vacancies, foreign particles, and dislocations. Numerical results are presented at last.

Key words: piezoelectric space; circular crack; resultant source; intensity factor