应用数学和力学,第 27 卷 第 11 期
2006 年 11 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 11, Nov. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 11_1363_10

具有局部阻尼的热弹性问题的渐近行为和指数稳定性*

高洪俊[1], 赵玉娟[2]

(1. 南京师范大学 数学与计算机科学学院, 南京 210097;
2. 南京理工大学 紫金学院, 南京 210094)

(刘曾荣推荐)

摘要: 一个关于具有局部阻尼的半线性热弹性问题, 是材料科学中最重要的数学模型之一• 这个问题的解的存在性和齐次问题解的指数衰竭于零的性质被得到了• 进而, 也得到了对非齐次问题吸收集的存在性• 结果显示了所研究的系统是渐近稳定的•

关 键 词: 热弹性; 指数衰竭; 渐近行为; 吸收集

中图分类号: O175.24; O175.8 文献标识码: A

引 言

无耗散的波方程是一个守恒系统, 即它的总能量总是常数• 许多作者通过引入不同类型的耗散机制来稳定系统: 例如引入摩擦阻尼 αu_t (参阅文献[1]) 其中耗散作用在整个区域; 或者引入摩擦边界条件(参阅文献[2]和文献[3]); 或者引入局部阻尼(参阅文献[4]至文献[6]), 其中磨擦阻尼项形如 $\alpha(x)u_t$, α 会在区域的某个部分消失• 因此研究方向似乎就是找极小的耗散使得相应耗散波方程的解当时间 t 趋于无穷大时一致衰竭于 0• 相关局部阻尼主要问题就是: α 在区域的哪部分是正数才能保证一致衰减率? 这个问题和控制理论有关• 在 Lions 等的书里(参阅文献[7]) 证明了如果能控制作用在 Ω 的一子区间 ω 上, 通过引入一个有效作用在 ω 上的阻尼机制, 就有可能稳定这个系统• 剩下的问题就是找到尽可能小的这样的 ω• Bardos 等(参阅文献[8]) 找到了二阶双曲波方程中符合条件的 ω 的充分条件• 另外一种情形, 是由复合材料引入的耗散, 例如 Marzocchi 等[9] 用上述理论证明了复合材料一维情况下区域 $\Omega=[0,L_3]$ 的子区间 $\omega=(0,L_1)\cup(L_2,L_3)$ 部分材料具有热弹性受温度变化影响; (L_1,L_2) 部分是弹性材料与温度无关(如图 1)•

记 $x+u(x,t)$ 是粒子 x 在时间 t 的热弹性部分的位置, $x+v(x,t)$ 是粒子 x 在时间 t 的弹性部分的位置, 记 θ 是实际温度和参考温度的差• 文献[9] 考虑了方程:

$$u_{tt}-au_{xx}+m\theta_x+f(u)=h_1,\qquad 在(0,L_1)\cup(L_2,L_3)\times(0,\infty), \tag{1$'$}$$

$$\theta_t-k\theta_{xx}+mu_{xt}=h_2,\qquad 在(0,L_1)\cup(L_2,L_3)\times(0,\infty), \tag{2$'$}$$

* 收稿日期: 2005_06_28; 修订日期: 2006_06_12
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571087); 教育部博士点专项基金资助项目(20050319001); 江苏省教育厅自然科学基金资助项目(05KJB110063)
作者简介: 高洪俊(1966—), 男, 江苏金坛人, 教授, 博士(联系人. E_mail: gaohj@njnu.edu.cn)•

$$v_{tt}-bv_{xx}=h_3,\qquad 在(L_1,L_2)\times(0,\infty), \tag{3$'$}$$

满足一定的初边值条件时的稳定结果•

本文考虑的是一维情况下区域 $\Omega=[0,L_2]$ 上的复合材料 $L_1\in[0,L_2]$, 假定在子区间 $\omega=(0,L_1)$ 的部分材料是热弹性材料; (L_1,L_2) 部分是弹性材料与温度无关(如图2)•

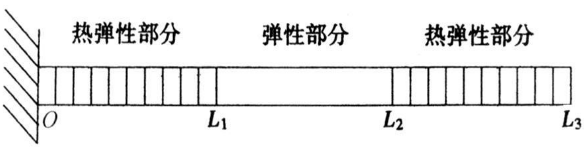

图1　热弹性_弹性_热弹性

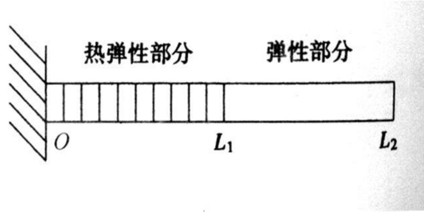

图2　热弹性_弹性

本系统可看作局部阻尼系统, 我们感兴趣的是由热效应作用在更小一部分材料上时引起弱耗散是否足以稳定这个系统, 上述模型满足的方程为

$$u_{tt}-au_{xx}+m\theta_x+f(u)=h_1,\qquad 在(0,L_1)\times(0,\infty), \tag{1}$$

$$\theta_t-k\theta_{xx}+mu_{xt}=h_2,\qquad 在(0,L_1)\times(0,\infty), \tag{2}$$

$$v_{tt}-bv_{xx}=h_3,\qquad 在(L_1,L_2)\times(0,\infty), \tag{3}$$

其中 a、b、k 和 m 是正常数, $h_i:(0,L_1)\to R\ (i=1,2)$ 和 $h_3:(L_1,L_2)\to R$ 是给定的函数及 $f:R\to R$ 是非线性函数, 其性质待定•　这个系统满足如下边界条件

$$u(0,t)=\theta(0,t)=v(L_2,t)=0, \tag{4}$$

$$u(L_1,t)=v(L_1,t),\ au_x(L_1,t)-m\theta(L_1,t)=bv_x(L_1,t), \tag{5}$$

$$\theta_x(L_1,t)=0 \tag{6}$$

和初值条件

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in(0,L_1), \tag{7}$$

$$\theta(x,0)=\theta_0(x),\qquad x\in(0,L_1), \tag{8}$$

$$v(x,0)=v_0(x),\ v_t(x,0)=v_1(x),\qquad x\in(L_1,L_2)• \tag{9}$$

我们记　$F(s)=\int_0^s f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$•

并且假定 f 满足

$$sf(s)\geqslant 0,\qquad \forall s\in R• \tag{10}$$

在这里我们也注意到有关这方面的其他文章•　当时间 $t\to\infty$ 时, 有界区域上的线性热弹性方程的解的渐进行为已被很多作者研究过了•　众所周知一维情况下对于所有的满足经典边值条件的方程的解指数衰减(于0), 可参阅文献[10]•

本文给出了在材料只有一部分热弹性材料时对于线性奇次情况: $(f\equiv 0,\ h_i\equiv 0,\ i=1,2,3)$, 当 t 趋于无穷大时, 上述系统的解以指数率衰减于0•　对于非线性情况, 对照能量函数的选取, 假定 μ(函数 f 的Lipschitz 常数) 充分小时, 在解空间中存在吸收集代替上述的指数衰减结果•

文章的余下部分是这样安排的: 在第1节里给出了一些函数空间记法, 及在以后要用的一个引理; 第2节以严格的推导改善了文献[9]中解的存在唯一性定理及解的正则性; 第3节推导出不同阶的能量估计得到解的指数衰减结果; 最后在第4节证明出非奇次问题解空间中吸收集的存在性和一些重要的注记•

1 函数空间和记法

令 $I \subset R$ 是一个有界区间, 按通常记法引用空间 $L^2(I), H^1(I)$ 作用在 I 上, 记 L^2_内积 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 和 L^2_范数 $\|\cdot\|$• 我们也考虑那些定义在 I 上, 取值在巴拿赫空间 X 上的函数空间比如 $C(I, X), C^1(I, X), L^p(I, X), H^p(I, X)$, 这些空间具有通常的范数• 进一步引进下列空间

$$H^1_{L_0}(0, L_1) = \left\{w \in H^1(0, L_1): w(0) = 0\right\},$$
$$H^1_{L_2}(L_1, L_2) = \left\{v \in H^1(L_1, L_2): v(l_2) = 0\right\},$$
$$V = \left\{(u, v) \in H^1_{L_0}(0, L_1) \times H^1_{L_2}(L_1, L_2): u(L_1) = v(L_1)\right\}•$$

注意到 V 是$H^1_{L_0}(0, L_1) \times H^1_{L_2}(L_1, L_2)$ 的闭子空间, 并且在如下范数意义下

$$\|(u, v)\|^2_V := \int_0^{L_1} |u_x|^2 dx + \int_{L_1}^{L_2} |v_x|^2 dx$$

是希尔伯特空间•

注 1.1 由于 $u(0, t) = v(L_2, t) = 0$, 则

$$\int_0^{L_1} |u_x|^2 dx \leqslant \|u\|^2_{H^1_{L_0}(0, L_1)} = \int_0^{L_1} |u|^2 dx + \int_0^{L_1} |u_x|^2 dx \leqslant (\lambda_1^2 + 1)\int_0^{L_1} |u_x|^2 dx,$$

同理 v 也有类似结果• 则有

$$\|u\|^2_{H^1_{L_0}(0, L_1)} \sim \|u_x\|^2_{L^2(0, L_1)}, \quad \|v\|^2_{H^1_{L_2}(L_1, L_2)} \sim \|v_x\|^2_{L^2(L_1, L_2)},$$

由于 $u(0) = 0$, λ_1 是仅依赖于$(0, L_1)$ 的 Poincar 常数•

为了简化记法, 我们在不导致混淆的情况下省略变量对应的空间, 例如 $v \in C([0, T]; H^1)$ 意味着 $v \in C([0, T]; H^1((L_1, L_2)))$ 等等•

在下面的讨论中, 我们需要如下引理(文献[9])

引理 1.1 设 $z \in L^2(I, L^2(x_1, x_2))$, $q \in C^1(x_1, x_2)$• 则对任意函数 $w \in H^2(I, L^2(x_1, x_2)) \cap L^2(I, H^2(x_1, x_2))$ 满足 $w_{tt} - \sigma w_{xx} = z$, 其中 $\sigma > 0$, 则有

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q w_t w_x dx = \int_{x_1}^{x_2} q w_x z dx + \frac{q(x_2)}{2}(|w_t(x_2, t)|^2 + \sigma|w_x(x_2, t)|^2) - \frac{q(x_1)}{2}(|w_t(x_1, t)|^2 + \sigma|w_x(x_1, t)|^2) - \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}(q_x|w_t|^2 + q_x\sigma|w_x|^2) dx•$$

2 解的存在唯一性定理

在这一节给出问题(1) ~ 问题(9) 的解的存在唯一性结果, 其中假定函数 f 是非线性的且满足条件(10)• 首先我们定义问题(1) ~ 问题(9) 的弱解• 通篇设 $I = [0, T], T > 0$•

定义 2.1 令 $h_i \in L^2 (i = 1, 2, 3)$• 我们称$(u, \theta, v)$ 是问题(1) ~ 问题(9) 的一个弱解, 当

$$(u, v) \in L^\infty(I, V), \ (u_t, v_t) \in L^\infty(I, L^2 \times L^2), \ \theta \in L^\infty(I, L^2) \cap L^2(I, H^1_{L_0}),$$

满足恒等式

$$\int_0^T\int_0^{L_1}\left\{u\phi_{tt} + a u_x\phi_x - m\theta\phi_x + [f(u) - h_1]\phi\right\} dx dt + \int_0^T\int_{L_1}^{L_2}(v\omega_{tt} + b v_x\omega_x - h_3\omega) = \int_0^{L_1} u_1\phi(0) dx - \int_0^{L_1} u_0\phi_t(0) dx + \int_{L_1}^{L_2} v_1\omega(0) dx - \int_{L_1}^{L_2} v_0\phi(0) dx, \tag{11}$$

$$\int_0^T\int_0^{L_1}(-\theta\psi_t + k\theta_x\psi_x - m u_x\psi_t - h_2\psi) dx dt = \int_0^{L_1}\theta_0\psi(0) dx + m\int_0^{L_1} u_{0x}\psi(0) dx, \tag{12}$$

对所有的 $(\phi, \omega) \in C^2(I, V)$, $\psi \in C^2(I, H^1_{L_0})$ 及乎处处 $t \in I$ 使得

$$\phi(T) = \phi_t(T) = \psi(T) = \omega(T) = \omega_t(T) = 0.$$

问题(1)~ 问题(9) 解的存在性由以下定理给出

定理 2.1 假定 f 是满足(10) 的 C^1 函数, 初始值满足

$$(u_0, v_0) \in V, \ (u_1, v_1) \in L^2 \times L^2 \text{且} \ \theta_0 \in L^2.$$

则问题(1)~ 问题(9) 存在解 (u, v, θ) 满足

$$(u, v) \in L^\infty(I, V), \ (u_t, v_t) \in L^\infty(I, L^2 \times L^2), \ \theta \in L^\infty(I, L^2) \cap L^2(I, H^1_{L_0}).$$

另外, 如果

$$(u_0, v_0) \in (H^2 \times H^2) \cap V, \ (u_1, v_1) \in V, \ \theta_0 \in H^2 \cap H^1_{L_0},$$

且符合相容性条件

$$a u_{0x}(L_1) - m\theta_0(L_1) = b v_{0x}(L_1),$$

那么解满足

$$(u, v) \in L^\infty(I, (H^2 \times H^2) \cap V), (u_t, v_t) \in L^\infty(I, V),$$
$$(u_{tt}, v_{tt}) \in L^\infty(I, L^2 \times L^2),$$
$$\theta \in L^\infty(I, H^2 \cap H^1_{L_0}), \ \theta_t \in L^\infty(I, L^2).$$

这种情况我们就称 (u, θ, v) 是强解, 强解是唯一的.

证明 我们用 Faedo_Galerkin 方法和弱收敛方法得到.

注 2.1 用与上述相同的过程我们也可证明当初始值满足

$$(u_0, v_0) \in (H^3 \times H^3) \cap V, \ (u_1, v_1) \in (H^2 \times H^2) \cap V,$$
$$(u_2, v_2) \in (H^1 \times H^1) \cap V, \ \theta \in H_3 \cap H^1_{L_0},$$

并满足相容性条件

$$a u_{0x}(L_1) - m\theta_0(L_1) = b v_{0x}(L_1),$$

其中

$$(u_2, v_2) = (a u_{0xx} - m\theta_{0x} - f(u_0) + h_1(x), \ b v_{0xx} + h_3).$$

则解满足

$$(u, v) \in L^\infty(I, (H^3 \times H^3) \cap L^\infty(I, L^2 \times L^2), \ (u_t, v_t) \in L^\infty(I, (H^2 \times H^2),$$
$$(u_{tt}, v_{tt}) \in L^\infty(I, (H^1 \times H^1), \ \theta \in L^\infty(I, H^3 \cap H^1_{L_0}) \cap L^\infty(I, H^1).$$

这时我们就称 (u, θ, v) 是 H^3 解.

3 能 量 估 计

在以下的引理中我们证得问题(1)~ 问题(9) 的耗散性. 假定 f 是 Lipschitz 函数, 其 Lipschitz 常数 $\mu > 0$ 充分小. 类似文献[9]的讨论, 我们可得下面的引理 3.1, 引理 3.2, 引理 3.3.

引理 3.1 假定 (u, θ, v) 是问题(1)~ 问题(9) 的强解, 则能量恒等式可写为

$$\frac{d}{dt}\mathscr{E}_1(t) = -k\int_0^{L_1} |\theta_x|^2 dx + \int_0^{L_1}(h_1 u_t + h_2\theta)dx + \int_{L_1}^{L_2} h_3 v_t dx, \tag{13}$$

其中

$$\mathscr{E}_1(t) = \frac{1}{2}\int_0^{L_1}(|u_t|^2 + a|u_x|^2 + |\theta|^2)dx + \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}(|v_t|^2 + b|v_x|^2)dx + \int_0^{L_1}F(u)dx.$$

特别地, 如果 $h_i \equiv 0 \ (i = 1, 2, 3)$, 我们就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_1(t)=-k\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x.$$

引理 3.2 假定 (u,θ,v) 是问题(1)～问题(9)的强解，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_2(t)=-k\int_0^{L_1}|\theta_{xt}|^2\mathrm{d}x-\int_0^{L_1}f'(u)u_tu_{tt}\mathrm{d}x, \tag{14}$$

其中

$$\mathscr{E}_2(t)=\frac{1}{2}\int_0^{L_1}(|u_{tt}|^2+a|u_{xt}|^2+|\theta_t|^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}(|v_{tt}|^2+b|v_{xt}|^2)\mathrm{d}x.$$

引理 3.3 假定 (u,θ,v) 是问题(1)～问题(9)的强解，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_3(t)=&-ak\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x+a\int_0^{L_1}f(u)u_{xxt}\mathrm{d}x+m\theta_t(L_1,t)u_{tt}(L_1,t)-\\&am\theta_x(0,t)u_{xt}(0,t)-a\int_0^{L_1}(h_1u_{xxt}+h_2\theta_{xx})\mathrm{d}x-b\int_{L_1}^{L_2}h_3v_{xxt}\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{15}$$

其中 $$\mathscr{E}_3(t)=\frac{1}{2}\int_0^{L_1}(|u_{xt}|^2+a|u_{xx}|^2+|\theta_x|^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}(|v_{xt}|^2+b|v_{xx}|^2)\mathrm{d}x.$$

特别地，如果 $h_i\equiv 0\ (i=1,2,3)$，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{E}_3(t)=&-ak\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x+a\int_0^{L_1}f(u)u_{xxt}\mathrm{d}x+\\&m\theta_t(L_1,t)u_{tt}(L_1,t)-am\theta_x(0,t)u_{xt}(0,t).\end{aligned}$$

定义 $$\mathscr{K}(t)=\int_0^{L_1}(N_0\theta u_{xt}-u_tu_{xx}+c_0uu_t)\mathrm{d}x+c_0\int_{L_1}^{L_2}vv_t\mathrm{d}x,$$

其中 N_0 和 c_0 是正常数，记

$$B(t)=|u_{xt}(L_1,t)|^2+|u_{tt}(L_1,t)|^2,\quad B_0(t)=|u_{xt}(0,t)|^2.$$

引理 3.4 假定 (u,θ,v) 是问题(1)～问题(9)的 H^3 解，则下列不等式成立

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{K}(t)\leqslant&-\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2-\frac{mN_0}{4}\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2+\frac{k^2N_0}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x-\\&\frac{ac_0}{4}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+c_0\lambda_2^2\int_{L_1}^{L_2}|v_{xt}|^2\mathrm{d}x+\delta B(t)-\frac{1}{8a}\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x+\\&C_\delta\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x+C_1\left[\int_0^{L_1}(|h_1|^2+|h_2|^2)\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2\mathrm{d}x\right],\end{aligned} \tag{16}$$

既然 $u(0)=0$，$v(L_2)=0$，$\theta(0)=0$，存在 λ_1 是仅依赖于 $(0,L_1)$ 的 Poincar 常数，λ_2 是仅依赖于 (L_1,L_2) 的 Poincar 常数，N_0 和 c_0 是正常数，待定.

证明 方程(2)乘以 u_{xt} 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{L_1}\theta u_{xt}\mathrm{d}x=&\int_0^{L_1}\theta_tu_{xt}\mathrm{d}x+\int_0^{L_1}\theta u_{xtt}\mathrm{d}x=\\&k\int_0^{L_1}\theta_{xx}u_{xt}\mathrm{d}x-m\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x-\int_0^{L_1}\theta_xu_{tt}\mathrm{d}x+\\&\int_0^{L_1}h_2u_{xt}\mathrm{d}x+\theta(L_1,t)u_{tt}(L_1,t)\leqslant\\&\frac{k^2}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{m}{2}\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+\frac{\delta}{N_0}\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x+\\&\frac{\delta}{N_0}|u_{tt}(L_1,t)|^2+C_2\int_0^{L_1}|h_2|^2\mathrm{d}x+C_\delta\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{17}$$

并且因为

$$\theta(L_1,t)u_{tt}(L_1,t)\leqslant\frac{\delta}{N_0}|u_{tt}(L_1,t)|^2+\frac{N_0}{4\delta}|\theta(L_1,t)|^2\leqslant$$
$$\frac{\delta}{N_0}|u_{tt}(L_1,t)|^2+\frac{N_0\lambda_1^2}{4\delta}\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x.$$

方程(1)乘以 $-u_{xx}$ 可得

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{L_1}u_tu_{xx}\mathrm{d}x=-\int_0^{L_1}u_{tt}u_{xx}\mathrm{d}x-\int_0^{L_1}u_tu_{xxt}\mathrm{d}x=$$
$$-\int_0^{L_1}a|u_{xx}|^2\mathrm{d}x+\int_0^{L_1}m\theta_xu_{xx}\mathrm{d}x+\int_0^{L_1}f(u)u_{xx}\mathrm{d}x-$$
$$\int_0^{L_1}h_1u_{xx}\mathrm{d}x+\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+u_{xt}(L_1,t)u_t(L_1,t)\leqslant$$
$$-\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{4a}\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x+$$
$$C\delta\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+\frac{10\lambda_1^2\mu^2}{a}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+$$
$$C_3\int_0^{L_1}|h_1|^2\mathrm{d}x+C_4\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x+\delta|u_{xt}(L_1,t)|^2. \tag{18}$$

由方程(1)可得

$$-\frac{a}{2}|u_{xx}|^2\leqslant-\frac{1}{4a}|u_{tt}|^2+\frac{m^2}{2a}|\theta_x|^2+\frac{4}{a}|f(u)|^2+\frac{4}{a}|h_1|^2$$

又有 $$\int_0^{L_1}|f(u)|^2\mathrm{d}x=\int_0^{L_1}|f(u)-f(0)|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\int_0^{L_1}|\mu u|^2\mathrm{d}x\leqslant\lambda_1^2\mu^2\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x.$$

其中 μ 是常数,使得 $10\lambda_1^2\mu^2/a<ac_0/4$. 方程(1)乘以 u,方程(3)乘以 v 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^{L_1}uu_t\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}vv_t\mathrm{d}x\right]=$$
$$\int_0^{L_1}|u_t|^2\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|v_t|^2\mathrm{d}x-a\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x-$$
$$b\int_{L_1}^{L_2}|v_x|^2\mathrm{d}x+mu(L_1,t)\theta(L_1,t)-m\int_0^{L_1}u\theta_x\mathrm{d}x-$$
$$\int_0^{L_1}f(u)u\mathrm{d}x+\int_0^{L_1}h_1u\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}h_3v\mathrm{d}x\leqslant$$
$$-\frac{a}{2}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x-b\int_{L_1}^{L_2}|v_x|^2\mathrm{d}x+C_5\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x+\lambda_1^2\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+$$
$$\lambda_2^2\int_{L_1}^{L_2}|v_{xt}|^2\mathrm{d}x+C_6\left[\int_0^{L_1}|h_1|^2\mathrm{d}x\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2\mathrm{d}x\right]. \tag{19}$$

因为

$$mu(L_1,t)\theta(L_1,t)\leqslant m\|u\|_{L^\infty}\|\theta\|_{L^\infty}\leqslant\varepsilon\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+C\varepsilon\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x.$$

又由不等式(17)~不等式(19),所以可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{H}(t)\leqslant\mathscr{B}(t)-\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\left(\frac{N_0m}{2}-C\delta-c_0\lambda_1^2\right)\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+$$
$$\frac{N_0k^2}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x-\left(\frac{ac_0}{2}-5\lambda_1^2\mu^2\right)\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x-$$

$$\left(\frac{1}{4a}-\delta\right)\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x+c_0\lambda_2^2\int_{L_1}^{L_2}|v_{xt}|^2\mathrm{d}x+$$
$$C_\delta\int_0^{L_1}|\theta_x|^2\mathrm{d}x+C_1\left[\int_0^{L_1}(|h_1|^2+|h_2|^2)\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2\mathrm{d}x\right].$$

从而可以得出结论.

引入积分式

$$\mathscr{L}_1(t)=-\int_0^{L_1}\omega_1u_{tt}u_{xt}\mathrm{d}x,\quad \mathscr{L}_2(t)=-\int_{L_1}^{L_2}\omega_2v_{tt}v_{xt}\mathrm{d}x,$$

其中　$\omega_1(x)=x-\dfrac{1}{2}L_1,\ x\in[0,L_1],\quad \omega_2(x)=\dfrac{L_1}{4(L_1-L_2)}(x-L_2)+\dfrac{L_1}{4},\ x\in[L_1,L_2].$

则我们有

引理 3.5　令 (u,θ,v) 是问题(1) ~ 问题(9) 的 H^3_解, $h_1\in L^2$, 则下列不等式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}_1(t)\leqslant-\frac{L}{2}[B(t)+B_0(t)]+D\int_0^{L_1}(|u_{tt}|^2+|u_{xt}|^2+|\theta_{xt}|^2)\mathrm{d}x, \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}_2(t)\leqslant\frac{L_1}{4}\left(\frac{2a^2}{b}+1\right)B(t)-\frac{Lb}{8}|v_{xt}(L_2,t)|^2+\frac{m^2\lambda_1^2L_1}{2b}\int_0^{L_1}|\theta_{xt}|^2\mathrm{d}x-$$
$$\frac{L_1}{4(L_2-L_1)}\int_{L_1}^{L_2}(|v_{tt}|^2+b|v_{xt}|^2)\mathrm{d}x, \tag{21}$$

其中 $L=\min\left\{L_1,L_1a\right\}$ 并且 $D=(1/2)[1+aL_1(2+\mu^2\lambda_1^2)+m^2]$.

证明　对方程(1) 关于 t 求导, 运用引理1.1, 令其中的 $z=-m\theta_{xt}-f'(u)u_t$, $x_1=0$, $x_2=L_1$, $\sigma=a$, ω_1 代替 q, 经过计算可以得到结论.

引理 3.6　令 (u,θ,v) 是问题(1) ~ 问题(9) 的 H^3_解, $h_i\in L^2$, $i=1,2,3$, 则下列不等式成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathscr{K}(t)+\delta_0\mathscr{L}_1(t)+\frac{\delta_0b}{2(2a^2+b)}\cdot\frac{L}{L_1}\mathscr{L}_2(t)\right]\leqslant$$
$$-\frac{L^2b^2\delta_0}{16(2a^2+b)L_1}|v_{xt}(L_2,t)|^2-\frac{L\delta_0}{8}[B(t)+B_0(t)]-$$
$$\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{mN_0}{8}\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{16a}\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x-$$
$$\frac{ac_0}{8}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+\frac{k^2N_0}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x+C_7\int_0^{L_1}(|\theta_x|^2+|\theta_{xt}|^2)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{bL\delta_0}{16(2a^2+b)(L_2-L_1)}\int_{L_1}^{L_2}(|v_{tt}|^2+|v_{xt}|^2)\mathrm{d}x+$$
$$C_8\left[\int_0^{L_1}(|h_1|^2+|h_2|^2)\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2dx\right]. \tag{22}$$

证明　用引理3.4和引理3.5的第1部分, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathscr{K}(t)+\delta_0\mathscr{L}_1(t)]\leqslant-\left(\frac{L\delta_0}{2}-\delta\right)[B(t)-B_0(t)]-$$
$$\left(\frac{1}{8a}-\delta_0D\right)\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x-\left(\frac{mN_0}{4}-\delta_0D\right)\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x-$$
$$\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{ac_0}{8}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+\frac{k^2N_0}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x+$$
$$C_9\int_0^{L_1}(|\theta_{xt}|^2+|\theta_x|^2)\mathrm{d}x+c_0\lambda_2^2\int_{L_1}^{L_2}|v_{xt}|^2\mathrm{d}x+$$

$$C_1\left[\int_0^{L_1}(|h_1|^2+|h_2|^2)\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2\mathrm{d}x\right]\cdot$$

那么取 δ 充分小使得 $\delta< L\delta_0/4$ 就可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathscr{K}(t)+\delta_0\mathscr{L}_1(t)]\leqslant-\frac{L\delta_0}{4}[B(t)-B_0(t)]-\frac{ac_0}{8}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x-\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{16a}\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x-\frac{mN_0}{8}\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x+\frac{k^2N_0}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x+C_9\int_0^{L_1}(|\theta_{xt}|^2+|\theta_x|^2)\mathrm{d}x+c_0\lambda_2^2\int_{L_1}^{L_2}|v_{xt}|^2\mathrm{d}x+C_1\left[\int_0^{L_1}(|h_1|^2+|h_2|^2)\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2\mathrm{d}x\right]\cdot\tag{23}$$

用引理3.5的第2部分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathscr{K}(t)+\delta_0\mathscr{L}_1(t)+\frac{\delta_0 b}{2(2a^2+b)}\cdot\frac{L}{L_1}\mathscr{L}_2(t)\right]\leqslant-\frac{L^2b^2\delta_0}{16(2a^2+b)L_1}|v_{xt}(L_2,t)|^2-\frac{L\delta_0}{8}[B(t)+B_0(t)]-\frac{a}{4}\int_0^{L_1}|u_{xx}|^2\mathrm{d}x-\frac{mN_0}{8}\int_0^{L_1}|u_{xt}|^2\mathrm{d}x-\frac{1}{16a}\int_0^{L_1}|u_{tt}|^2\mathrm{d}x-\frac{ac_0}{8}\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+C_7\int_0^{L_1}(|\theta_x|^2+|\theta_{xt}|^2)\mathrm{d}x+\frac{k^2N_0}{m}\int_0^{L_1}|\theta_{xx}|^2\mathrm{d}x-\left[\frac{bL\delta_0}{8(2a^2+b)(L_2-L_1)}-c_0\lambda_2^2\right]\int_{L_1}^{L_2}(|v_{tt}|^2+|v_{xt}|^2)\mathrm{d}x+C_1\left[\int_0^{L_1}(|h_1|^2+|h_2|^2)\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|h_3|^2\mathrm{d}x\right]\cdot\tag{24}$$

取 c_0 使得

$$c_0\lambda_2^2\leqslant\frac{bL\delta_0}{16(2a^2+b)(L_2-L_1)},$$

成立并且 N_0 充分大时就可导出结论•

我们引入下列泛函

$$\mathscr{L}(t)=M_0\mathscr{E}_1(t)+M_0\mathscr{E}_2(t)+N\mathscr{E}_3(t)-Na\int_0^{L_1}f(u)u_{xx}\mathrm{d}x+\mathscr{K}(t)+\delta_0\mathscr{L}_1(t)+\frac{\delta_0 b}{2(2a^2+b)}\cdot\frac{L}{L_1}\mathscr{L}_2(t)\cdot$$

其中 M_0, N, δ_0 是正常数, M_0, N 充分大待定• 则我们有

定理 3.1 令 (u,θ,v) 是问题(1) ~ 问题(9) 的强解, 当 μ 满足适当条件并令 $h_1, h_3\in H^1$, $h_2\in L^2$• 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t)\leqslant-\frac{\gamma}{C_{10}}\mathscr{L}(t)+\Lambda\cdot$$

其中 γ, C_{10}, Λ 是正常数• 特别的, 如果 $h_i\equiv0$, $i=1,2,3$, 那么会有

$$M_0\mathscr{E}_1(t)+M_0\mathscr{E}_2(t)+N\mathscr{E}_3(t)\leqslant[\mathscr{E}_1(0)+M_0\mathscr{E}_2(0)+N\mathscr{E}_3(0)]e^{-(\gamma/(C_{10}))t}\cdot$$

证明 我们将假定 (u,θ,v) 是 H^3 解, 我们的结论按常规的稠密性讨论得到• 运用上面的引理和适当选取 N, M_0 我们可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathscr{L}(t) \leqslant -\gamma[\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_2(t)+\mathscr{E}_3(t)]+C_h \leqslant -\frac{\gamma}{C_{10}}\mathscr{L}(t)+C_h, \tag{25}$$

这里 γ, $C_{10}<\infty$ 和 $C_h<\infty$ 是正常数, 且用到了

$$C_{11}[\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_2(t)+\mathscr{E}_3(t)] \leqslant \mathscr{L}(t) \leqslant C_{12}[\mathscr{E}_1(t)+\mathscr{E}_2(t)+\mathscr{E}_3(t)].$$

这里 C_{11}, C_{12} 是正常数.

4 渐近行为

在这一节, 我们给出吸收集的定义并得到方程解的渐近行为.

定义 4.1 令 $B(0,\mathbf{R})$ 是 $\mathscr{H}$中的以 0 为中心以 $\mathbf{R}>0$ 为半径的开球, 有界集 $\mathscr{B}_0\subset\mathscr{H}$被称作问题(1) ~ 问题(9) 的吸收集: 如果对任何初始值 $y_0\in B(0,R)\subset\mathscr{H}$, 存在 $t_{\mathscr{H}}=t_{\mathscr{H}}(R)$ 使得任何以 y_0 为初始的值满足

$$y(t)\in\mathscr{B}_0,\quad \forall t\geqslant t_{\mathscr{H}}.$$

令 $y=(u,\theta,v)$ 是问题(1) ~ 问题(9) 的强解且具有初始值 $y_0=(u_0,\theta_0,v_0)$, 其中$(u_0,v_0)\in(H^2\times H^2)\cap V$, $(u_1,v_1)\in\cap V$, $\theta_0\in H^2\cap H^1_{L_0}$ 并且满足相容性条件. 令 $\mathscr{Y}=\left\{y=(u,\theta,v),\ \|(u,\theta,v)\|_{\mathscr{Y}}<\infty\right\}$ 在范数

$$\begin{aligned}\|y\|^2_{\mathscr{Y}}=&\int_0^{L_1}|u_x|^2\mathrm{d}x+\int_{L_1}^{L_2}|v_x|^2\mathrm{d}x+\\&\int_0^{L_1}(|u_{tt}|^2+|u_{xt}|^2+|u_{xx}|^2+|\theta_t|^2+|\theta_x|^2)\,\mathrm{d}x+\\&\int_{L_1}^{L_2}(|v_{tt}|^2+|v_{xt}|^2+|v_{xx}|^2)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{26}$$

定理 4.1 在定理 3.1 的条件下以及对f 的如上假定下, 在空间 $\mathscr{Y}$中存在吸收集.

证明 由定理 3.1, 我们有

$$\mathscr{L}(t)\leqslant\mathscr{L}(0)\mathrm{e}^{-\mathscr{E}t}+\frac{C_h}{\mathscr{E}}(1-\mathrm{e}^{-\mathscr{E}t}),$$

其中 $\mathscr{E}=\gamma/C_{10}$ 再由初始值就可得到

$$\mathscr{E}_1(0)\leqslant C_{15}[\mathscr{E}_2(0)+\mathscr{E}_3(0)].$$

所以我们有

$$\mathscr{E}_2(t)+\mathscr{E}_3(t)\leqslant C_{13}\mathscr{L}(t)\leqslant C_{14}[\mathscr{E}_2(0)+\mathscr{E}_3(0)]\mathrm{e}^{-\mathscr{E}t}++C_{15},$$

对于适当的数 C_{13}、C_{14}、C_{15}. 这就意味着 $\mathscr{Y}$中每一个半径比 C_{15} 大的球都是吸收集.

对于线性情况, 我们可以得到一阶能量的衰减. 按照常规的讨论(参阅文献[10]), 有

定理 4.2 如果$f\equiv 0$, $h_i\equiv 0(i=1,2,3)$ 则存在常数 $c>0$ 使得,

$$\mathscr{E}_1(t)\leqslant c\,\mathscr{E}_1(0)\mathrm{e}^{-\mathscr{E}t}.$$

定理 4.3 如果(1) 中$f\equiv 0$, 则问题(1) ~ 问题(9) 解指数趋于静态问题的解

$$\begin{aligned}&-au^*_{xx}+m\theta^*_x=h_1, && \text{在}(0,L_1\times(0,\infty),\\&-k\theta^*_{xx}=h_2, && \text{在}(0,L_1\times(0,\infty),\\&-bv^*_{xx}=h_3, && \text{在}(L_1,L_2\times(0,\infty).\end{aligned}$$

注 4.1 对于这样的只有一段热弹性另一段是弹性的复合材料, 作少量的改动用上述同样的过程, 可以考虑下列边界条件

$$u(0,t)=\theta(0,t)=v_x(L_2,t)=0. \tag{4$'$}$$

注 4.2 我们给出了比文献[9] 更严格的推导, 例如范数的等价性, 衰减估计, 弱解的存在性, 正则性以及

解空间等. 另外, 我们的结果给出实际问题中简单稳定化设计的合理性•

致谢 本文得到南京师范大学优秀青年教师教学科研奖励计划资助, 特此感谢•

[参 考 文 献]

[1] Hensen S W. Exponential energy decay in a linear thermoelastic rod[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 1992, **167**(2): 429—442.

[2] Komornik V. Rapid boundary stabilization of the wave equation[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1991, **129**(1): 197—208.

[3] Ono K. A stretched string equation with a boundary dissipation[J]. Kyushu Journal of Mathematcs, 1994, **48**(2): 265—281.

[4] Nakao M. Decay of solutions of the wave equation with a local nonlinear dissipation[J]. Mathematiche Annalen, 1996, **305**(3): 403—417.

[5] Nakao M. Decay of solutions of the wave equation with a local degenerate dissipation[J]. Israel Journal of Mathematics, 1996, **95**(1): 25—42.

[6] Zuazua E. Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping[J]. Communications in Partial Differential Equations, 1990, **15**(2): 205—235.

[7] Lions J_L. Contrhatoit Exacte, Perturbations et Stabilisation de Syst mes distrib s[M]. Tome 1. masson. Paris, 1998.

[8] Bardos C, Lebeau G, Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1992, **30**(5): 1024—1065.

[9] Marzocchi A, Munoz Rivera J E, Naso M G. Asymptotic behaviour and exponential stability for a transmission problem in thermoelasticity[J]. Math Methods Appl Sci, 2002, **25**(11): 955—980.

[10] Kim J U. On the energy decay of a linear thermoelastic bar and plate[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1992, **23**(5): 889—899.

Asymptotic Behaviour and Exponential Stability for a Thermoelastic Problem With Localized Damping

GAO Hong_jun[1], ZHAO Yu_juan[2]

(1. Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, P. R. China;

2. Zijin College, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P. R. China)

Abstract: A semi_linear thermoelastic problem with localized damping is considered, which is one of the most important mathematical models in material science. The existence and decays exponentially to zero of solution of this problem were obtained. Moreover, the existence of absorbing sets was achieved in the non_homogeneous case. The result indicates that the system which we studied here is asymptotic stability.

Key words: thermoelasticity; exponential decay; asymptotic behaviour; absorbing set