应用数学和力学,第 27 卷 第 11 期
2006 年 11 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 27, No. 11, Nov. 15, 2006

文章编号: 1000_0887(2006) 11_1380_07

随机泛函微分方程的渐近稳定性*

沈　铁, 　江明辉, 　廖晓昕

(华中科技大学 控制科学与工程系, 武汉 430074)

(刘曾荣推荐)

摘要: 　应用多个 Liapunov 函数讨论了随机泛函微分方程解的渐近行为, 建立了确定这种方程解的极限位置的充分条件, 并且从这些条件得到了随机泛函微分方程渐近稳定性的有效判据, 使实际应用中构造 Liapunov 函数更为方便• 同时也说明了该结果包含了经典的随机泛函微分方程稳定性结果为其特殊情况• 最后给出的结果在随机 Hopfield 神经网络中的应用•

关 键 词: 　随机泛函微分方程; 　渐近稳定; 　随机神经网络; 　半鞅收敛定理; 　伊藤公式

中图分类号: 　TP183 　　文献标识码: 　A

引　　言

1892 年 Liapunov 引入确定性动力系统的稳定性概念, 并且开创了稳定性理论研究的 Liapunov 第二方法, 该方法的优点是它无须求系统的解就可判别系统的稳定性, 因而在过去的一个世纪, Liapunov 第二方法一直是稳定性研究中的热点[1, 2]• 另一方面, 自 50 年前 Itô引入随机积分后, 随机系统的稳定性理论得到迅速发展, 特别是应用 Liapunov 第二方法研究随机稳定性[3~ 8], 但与确定性系统的稳定性研究相比, 随机系统的稳定性理论还远未完善, 例如现有文献关于随机稳定性的结果大多数是采用一个 Liapunov 函数, 而应用多个 Liapunov 函数研究随机稳定性的结果却很少• 最近文献[3] 应用多个 Liapunov 函数研究了随机微分方程的稳定性, 但其结果对随机泛函微分方程不能应用• 鉴于这种情况, 本文应用多个 Liapunov 函数讨论了一般随机泛函微分方程解的渐近行为, 建立了确定这种方程解的极限位置的充分条件, 并且从这些条件得到了随机泛函微分方程渐近稳定性的有效判据, 使实际应用中构造 Liapunov 函数更方便, 同时也说明了本文的结果包含了经典的随机泛函微分方程稳定性结果为其特殊情况• 需要指出的是, 本文所建立的结果无须 LV 负定, 充分利用了随机扰动项的作用, 并且从理论上解释了一个不稳定的泛函微分方程系统有时加入适当随机扰动后反而稳定• 同时为了说明本文所建立的结果的有效性, 我们应用本文的结果讨论了随机 Hopfield 神经网络的稳定性• Hopfield 神经网络是一种具有广泛应用背景的神经网络系统, 特别是在联想记忆与优化计算中均有重要的应用[9], 而这种网络系统的应用都要求网络系统稳定[9~ 11], 因此讨论随机 Hopfield 神经网络的稳定性对于设计稳定的神经网络系统具有重要的理论意义和应用价值•

---

* 收稿日期: 　2004_04_03; 修订日期: 　2006_08_11
基金项目: 　国家自然科学基金资助项目(60574025; 60074008) ; 湖北省自然科学基金资助项目(2004ABA055)
作者简介: 　沈铁(1964—) , 男, 湖南人, 教授, 博士生导师(联系人. E_mail: 　yishen64@ 163. com)•

并且应用结果表明,本文所建立的随机稳定结果优于经典的随机稳定结果•

本文采用以下记号:记$(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$为一个带有自然流$\{F_t\}_{t\geqslant 0}$的完备概率空间,$\boldsymbol{B}(t)=(B_1(t), B_2(t), \cdots, B_m(t))^{\mathrm{T}}$是定义于该空间上的$m$维标准布朗运动•$\|\cdot\|$为定义于$R^n$上的Euclidean范数•设$\tau>0$, $\varphi:[-\tau, 0]\to R^n$为连续函数,具有上确界范数$\|\varphi\| = \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi(\theta)|$, $C([-\tau, 0]; R^n)$记为连续φ函数族•$C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$表示$F_0$可测的有界的$C([-\tau, 0]; R^n)$_值随机变量$\xi$族且有$\xi = \{\xi(\theta): -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$,

$$D(R_+; R_+):=\left\{\eta\in C(R_+; R_+)\,\middle|\,\int_0^\infty \eta(t)\mathrm{d}t=\infty\right\},$$

$$W([-\tau, 0]; R_+)=\left\{\beta\in C([-\tau, 0]; R_+)\,\middle|\,\int_{-\tau}^0 \beta(t)\mathrm{d}t=1\right\}$$

表示权函数,

$$L^1(R_+; R_+):=\left\{\eta: R_+\to R_+\,\middle|\,\int_0^\infty \eta(t)\mathrm{d}t<\infty\right\}$$

表示正的可积函数族•$K=\{\mu\in C(R_+; R_+)\mid \mu(0)=0, \mu\text{ 单调增加}\}$,

$$K_\infty=\left\{\mu\in K\mid \lim_{r\to\infty}\mu(r)=\infty\right\}•$$

考虑如下随机泛函微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(t, x_t)\mathrm{d}t+g(t, x_t)\mathrm{d}B(t), \qquad t\geqslant 0, \tag{1}$$

在$t\geqslant 0$时初始条件$\{x(\theta): -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}=\xi\in C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$•这里

$$f: R_+\times C([-\tau, 0]; R^n)\to R^n, g: R_+\times C([-\tau, 0]; R^n)\to R^{n\times m},$$

$x_t=\{x(t+\theta): -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$它是$C([-\tau, 0]; R^n)$_值随机过程,若$f$, g满足下列基本假设

(H) f和g是Borel可测函数,对任意$l=1, 2, \cdots$,存在$c_l>0$满足

$$\|f(t, \varphi)-f(t, \phi)\|\vee\|g(t, \varphi)-g(t, \phi)\|\leqslant c_l\|\varphi-\phi\|,$$

其中$\varphi, \phi\in C([-\tau, 0]; R^n)$满足$\|\varphi\|\vee\|\phi\|\leqslant l$, $t\geqslant 0$,并且还存在常数$c>0$使得对任意$(t, \varphi)\in R_+\times C([-\tau, 0]; R^n)$有下式成立

$$\|f(t, \varphi)\|\vee\|g(t, \varphi)\|\leqslant c\left(1+\int_{-\tau}^0\|\varphi(\theta)\|\mathrm{d}\theta\right)•$$

由文献[6]知,在条件(H)之下,方程(1)在$t\geqslant -\tau$时有唯一连续解,记为$x(t; \xi)$,且任意$p>0$,在$t\geqslant 0$时满足

$$E\left[\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(\theta; \xi)|^p\right]<\infty•$$

令$C^{1,2}(R_+\times R^n; R_+)$表示对$t$一次连续可微对$x$二次连续可微的非负函数$V(t, x)$的全体•对任意$V(t, x)\in C^{1,2}(R_+\times R^n; R_+)$,定义

$$V_t(t, x)=\frac{\partial V(t, x)}{\partial t};\quad V_x(t, x)=\left(\frac{\partial V(t, x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{xx}(t, x)=\left(\frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}•$$

进一步定义算子$LV: R_+\times C([-\tau, 0]; R^n)\to R$如下

$$LV(t, \varphi)=V_t(t, \varphi(0))+V_x(t, \varphi(0))f(t, \varphi)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}[g^{\mathrm{T}}(t, \varphi)V_{xx}(t, \varphi(0))g(t, \varphi)]•$$

1 主要结果

定理 1 设存在函数 $U, V \in C^{1,2}(R_+ \times R^n; R_+)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in L^1(R_+; R_+)$, $\omega_1, \omega_2 \in C(R^n; R_+)$, $\alpha \in D(R_+; R_+)$, $\beta \in W([-\tau, 0]; R_+)$, $\gamma \in C(R_+; R_+)$, 使 $\forall (t, \varphi) \in R_+ \times C([-\tau, 0]; R^n)$, $x \in R^n$ 有

$$LU(t, \varphi) \leqslant \gamma_1(t), \tag{2}$$

$$LV(t, \varphi) \leqslant \gamma_2(t) - \omega_1(\varphi(0)) + \int_{-\tau}^{0} \beta(\theta)\, \omega_2(\varphi(\theta))\, d\theta, \tag{3}$$

$$\omega_1(x) \geqslant \omega_2(x), \tag{4}$$

$$\gamma_2(t) - LV(t, \varphi) - \omega_1(\varphi(0)) + \int_{-\tau}^{0} \beta(\theta)\, \omega_2(\varphi(\theta))\, d\theta + |V_x(t, \varphi(0))\, g(t, \varphi)|^2 \geqslant \alpha(t)\, \gamma(U(t, \varphi(0))), \tag{5}$$

则 $\ker \gamma = \left\{ v \geqslant 0: \gamma(v) = 0 \right\} \neq \varnothing$(空集), 且任意 $\xi \in C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$, 方程(1) 的解 $x(t; \xi)$ 都有

$$\lim_{t \to \infty} U(t, x(t; \xi)) \in \ker \gamma, \quad \text{a.s.} \tag{6}$$

证明 固定初始条件 $\xi \in C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$, $x(t; \xi)$ 简记为 $x(t)$•

第 1 步先证明

$$\lim_{t \to \infty} U(t, x(t)) < \infty, \quad \text{a.s.} \tag{7}$$

由伊藤公式, 有

$$U(t, x(t)) = U(0, x(0)) + \int_0^t LU(s, x_s)\, ds + \int_0^t U_x(s, x(s))\, g(s, x_s)\, dB(s) = U(0, x(0)) + \int_0^t \gamma_1(s)\, ds - \int_0^t [\gamma_1(s) - LU(s, x_s)]\, ds + \int_0^t U_x(s, x(s))\, g(s, x_s)\, dB(s)• \tag{8}$$

由半鞅收敛定[12]及已知条件 $\int_0^{+\infty} \gamma_1(s)\, ds < \infty$, $\gamma_1(s) - LU(s, x_s) \geqslant 0$ 与(8) 式易推得结论(7) 成立•

第 2 步证明

$$\int_0^{\infty} \Big[\gamma_2(s) - LV(s, x_s) - \omega_1(x(s)) + \int_{-\tau}^{0} \beta(\theta)\, \omega_2(x(s+\theta))\, d\theta + |V_x(s, x(s))\, g(s, x_s)|^2 \Big]\, ds < \infty, \quad \text{a.s.} \tag{9}$$

再一次应用伊藤公式, 有

$$V(t, x(t)) = V(0, x(0)) + \int_0^t LV(s, x_s)\, ds + \int_0^t V_x(s, x(s))\, g(s, x_s)\, dB(s) = V(0, x(0)) + \int_0^t \gamma_2(s)\, ds - \int_0^t \Big[\gamma_2(s) - LV(s, x_s) - \omega_1(x(s)) + \int_{-\tau}^{0} \beta(\theta)\, \omega_2(x(s+\theta))\, d\theta \Big]\, ds - \int_0^t \Big[\omega_1(x(s)) - \int_{-\tau}^{0} \beta(\theta)\, \omega_2(x(s+\theta))\, d\theta \Big]\, ds + \int_0^t V_x(s, x_s)\, g(s, x_s)\, dB(s), \tag{10}$$

而

$$M(t)\stackrel{\triangle}{=}\int_{-\tau}^{0}\omega_2(x(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\left[\omega_1(x(s))-\int_{-\tau}^{0}\beta(\theta)\omega_2(x(s+\theta))\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}s=$$

$$\int_{-\tau}^{0}\omega_2(x(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\omega_1(x(s))\mathrm{d}s-\int_{-\tau}^{t}\left[\int_{r\vee 0}^{(r+\tau)\wedge t}\beta(r-s)\mathrm{d}s\right]\omega_2(x(r))\mathrm{d}r\geqslant$$

$$\int_{-\tau}^{0}\omega_2(x(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\omega_1(x(s))\mathrm{d}s-\int_{-\tau}^{t}\left[\int_{r}^{r+\tau}\beta(r-s)\mathrm{d}s\right]\omega_2(x(r))\mathrm{d}r=$$

$$\int_0^t[\omega_1(x(s))-\omega_2(x(s))]\mathrm{d}s\geqslant 0. \tag{11}$$

故在(10)式两边加 $M(t)$ 得

$$V(t,x(t))+M(t)=V(0,x(0))+\int_{-\tau}^{0}\omega_2(x(s))\mathrm{d}s+\int_0^t\gamma_2(s)\mathrm{d}s-$$

$$\int_0^t\left[\gamma_2(s)-LV(s,x_s)-\omega_1(x(s))+\int_{-\tau}^{0}\beta(\theta)\omega_2(x(s+\theta))\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}s+$$

$$\int_0^t V_x(s,x(s))g(s,x_s)\mathrm{d}B(s). \tag{12}$$

由已知条件(3)与(11)并将半鞅收敛定理[12]应用于(12)式有

$$\int_0^\infty[\gamma_2(s)-LV(s,x_s)-\omega_1(x(s))+\int_{-\tau}^{0}\beta(\theta)\omega_2(x(s+\theta))\mathrm{d}\theta]\mathrm{d}s<\infty,\ \text{a.s.} \tag{13}$$

$$-\infty<\lim_{t\to\infty}N(t)<\infty,\ \text{a.s.} \tag{14}$$

其中 $\quad N(t)=\int_0^t V_x(s,x(s))g(s,x_s)\mathrm{d}B(s).$

对任意整数 $i\geqslant 1$，定义停时 $\tau_i=\inf\{t\geqslant 0:|N(t)|\geqslant i\}$，这里约定 $\inf\varnothing=\infty$，显然 τ_i 是单调不减的，由(14)式知存在 $\Omega_1\subset\Omega$，$P(\Omega_1)=1$，使 $\forall\omega\in\Omega_1$，存在 $i(\omega)$，使

$$\tau_i(\omega)=\infty,\qquad i\geqslant i(\omega), \tag{15}$$

又由于 $\forall t\geqslant 0$ 与 $i\geqslant 1$，有

$$E\int_0^{t\wedge\tau_i}|V_x(s,x(s))g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s=E|N(t\wedge\tau_i)|^2\leqslant i^2,$$

从而当 $t\to\infty$ 时，有

$$E\int_0^{\tau_i}|V_x(s,x(s))g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\leqslant i^2,$$

因此可推出，$\forall i\geqslant 1$，有

$$\int_0^{\tau_i}|V_x(s,x(s))g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s<\infty,\ \text{a.s.}$$

故存在 $\Omega_2\subset\Omega$，$P(\Omega_2)=1$，使 $\forall\omega\in\Omega_2$，$i\geqslant 1$，有

$$\int_0^{\tau_i(\omega)}|V_x(s,x(s,\omega))g(s,x_s(\omega))|^2\mathrm{d}s<\infty, \tag{16}$$

从而当 $\omega\in\Omega_1\cap\Omega_2$ 时，由(15)式与(16)式有

$$\int_0^\infty|V_x(s,x(s,\omega))g(s,x_s(\omega))|^2\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\tau_{i(\omega)}(\omega)}|V_x(s,x(s,\omega))g(s,x_s(\omega))|^2\mathrm{d}s<\infty.$$

而 $P(\Omega_1\cap\Omega_2)=1$，因此必有

$$\int_0^{+\infty} |V_x(s, x(s)) g(s, x_s)|^2 ds < \infty, \quad a.s. \tag{17}$$

由(13)式与(17)式知(9)式成立.

第3步证明 $\ker \gamma \neq \emptyset$ 及(6)成立.

由已知条件(5)与第2步中已证明结论(9),有

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\gamma(U(t, x(t)))dt < \infty, \quad a.s. \tag{18}$$

由于第1步中已证明 $\lim_{t\to\infty} U(t, x(t)) < \infty$, a.s., 而 $\gamma \in C(R_+; R_+)$, 因此有

$$0 \leqslant \lim_{t\to\infty} \gamma(U(t, x(t))) = \gamma(\lim_{t\to\infty} U(t, x(t))) < \infty, \quad a.s.$$

若能证明

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(U(t, x(t))) = \gamma(\lim_{t\to\infty} U(t, x(t))) = 0, \quad a.s. \tag{19}$$

则 $\ker \gamma \neq \emptyset$, 且(6)式成立.

若(19)式不成立,则存在 $\Omega_0 \subset \Omega$, 且 $P(\Omega_0) > 0$, 使 $\forall \omega \in \Omega_0$, 有

$$\lim_{t\to\infty} \gamma(U(t, x(t, \omega))) > 0.$$

因此存在 $\varepsilon(\omega) > 0$ 与 $T(\omega) > 0$, 当 $t \geqslant T(\omega)$ 时,有

$$\gamma(U(t, x(t, \omega))) \geqslant \varepsilon(\omega),$$

故

$$\int_0^{\infty} \alpha(t)\gamma(U(t, x(t, \omega)))dt \geqslant \varepsilon(\omega)\int_{T(\omega)}^{+\infty} \alpha(t)dt = \infty,$$

这与(18)式矛盾,因此(19)式成立. 证毕.

注1 定理1可以认为是随机型的LaSalle定理. 它是将确定性系统的LaSalle定理推广到随机泛函微分方程,关于确定性系统的LaSalle定理与无时滞的随机型LaSalle定理可参考文献[2]和文献[4].

推论1 设定理1的条件满足,如果 $\ker \gamma = \{0\}$, 且存在 $\mu \in \kappa$, 使 $\forall (t, x) \in R_+ \times R^n$, 有 $\mu(|x|) \leqslant U(t, x)$, 则对任意 $\xi \in C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$, 方程(1)的解 $x(t;\xi)$ 满足: $\lim_{t\to\infty} |x(t;\xi)| = 0$, a.s, 即方程(1)是渐近稳定的.

从定理1易推出推论1,故证明略.

推论2 设存在 $U, V \in C^{1,2}(R_+ \times R^n; R_+)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in L^1(R_+; R_+)$, $\omega_1, \omega_2 \in C(\boldsymbol{R}^n; R_+)$, $\alpha \in D(R_+; R_+)$, $\beta \in W([-\tau, 0]; R^n)$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \kappa$, 使 $\forall (t, \varphi) \in R_+ \times C([-\tau, 0]; R^n)$, $x \in R^n$ 有

$$LU(t, \varphi) \leqslant \gamma_1(t), \tag{20}$$

$$\mu_1(|x|) \leqslant U(t, x) \leqslant \mu_2(|x|), \tag{21}$$

$$LV(t, \varphi) \leqslant \gamma_2(t) - \omega_1(\varphi(0)) + \int_{-\tau}^0 \beta(\theta)\omega_2(\varphi(\theta))d\theta, \tag{22}$$

$$\omega_1(x) \geqslant \omega_2(x), \tag{23}$$

$$\gamma_2(t) - LV(t, \varphi) - \omega_1(\varphi(0)) + \int_{-\tau}^0 \beta(\theta)\omega_2(\varphi(\theta))d\theta + |V_x(t, \varphi(0))g(t, \varphi)|^2 \geqslant \alpha(t)\mu_3(|\varphi(0)|), \tag{24}$$

则对任意 $\xi \in C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$, 方程(1)的解 $x(t;\xi)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} |x(t;\xi)| = 0, \quad a.s. \tag{25}$$

在推论 2 中取 $U=V$, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, $\alpha(t)=1$, $\omega_1=\omega_2=0$, 则有下面的推论

推论 3 设存在 $V\in C^{1,2}(R_+\times R^n;R_+)$, $\gamma\in L^1(R_+;R_+)$, $\mu_1,\mu_2,\mu_3\in K$, 使 $\forall(t,\varphi)\in R_+\times C([-\tau,0];R^n)$, $x\in R^n$ 有

$$\mu_1(|x|)\leqslant V(t,x)\leqslant\mu_2(|x|),\tag{26}$$

$$LV(t,\varphi)\leqslant\gamma(t)\wedge(\gamma(t)+|V_x(t,\varphi(0))g(t,\varphi)|^2-\mu_3(|\varphi(0)|)),\tag{27}$$

则对任意 $\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];R^n)$, 方程(1) 的解 $x(t;\xi)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty}|x(t;\xi)|=0,\quad \text{a.s.}\tag{28}$$

注 2 文献[5]和文献[6]中关于随机泛函微分方程的稳定性结果除了条件(26)必须满足外, 通常还需 LV 负定, 但是从推论 3 的结论可以看出本文的结果不需 LV 负定(当然 LV 负定, 本文的条件一定满足, 反之则不一定), 它可以取正值, 并且本文的结果还充分利用了随机的扰动项 $|V_x(t,\varphi(0))g(t,\varphi)|^2$ 的作用, 因此推论 3 是文献[5]和文献[6]中的某些结果的推广. 同时也说明了一个不稳定的泛函微分方程系统有时加入适当的随机扰动后反而稳定.

2 应 用

设 $B(t)$ 是一维布朗运动, 考虑下列 n 维随机 Hopfield 神经网络

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=(-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))\mathrm{d}t+\sigma\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}B(t),\tag{29}$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $d_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$, $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$ 是权矩阵, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots,f_n(x_n))^{\mathrm T}$, $f_i(x_i)=(e^{x_i}-e^{-x_i})/(e^{x_i}+e^{-x_i})$, $i=1,2,\cdots,n$, 是激活函数, $\sigma\in R$ 是噪声. 式中各项符号的物理意义参见文献[9]~文献[11].

定理 2 设存在正定阵 $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{Q}$ 使

$$\boldsymbol{G}(-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A})^{\mathrm T}\boldsymbol{G}+\sigma^2\boldsymbol{G}=-\boldsymbol{Q}.$$

若 $\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})\geqslant4\|\boldsymbol{GA}\|$, 则随机 Hopfield 神经网络(29) 是全局渐近稳定.

证明 令 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm T}\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}$, 则

$$\begin{aligned}LV(\boldsymbol{x}(t))={}&2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{G}(-\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)))+\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)=\\&2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{G}(-\boldsymbol{D}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\sigma^2\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{GA}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))-\boldsymbol{x}(t))\leqslant\\&-\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q})|\boldsymbol{x}(t)|^2+4\|\boldsymbol{GA}\||\boldsymbol{x}(t)|^2\leqslant0,\end{aligned}$$

而

$$|V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))\sigma\boldsymbol{x}(t)|^2=|2\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{G}\sigma\boldsymbol{x}(t)|^2=4\sigma^2|\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)|^2.$$

因此

$$LV(\boldsymbol{x}(t))\leqslant0\wedge(|V_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))\sigma\boldsymbol{x}(t)|^2-4\sigma^2|\boldsymbol{x}^{\mathrm T}(t)\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}(t)|^2),$$

由推论 3 易知系统(29) 全局渐近稳定. 证毕.

注 3 若应用文献[5]和文献[6]中的随机稳定性理论, LV 必须负定才能保证系统稳定, 因此在定理 2 的条件下不能判断(29) 稳定, 但是应用本文所建立的结果, 尽管 LV 不负定(仅半负定), 都能判定(29) 稳定. 因此本文的随机稳定结果优于经典的随机稳定结果.

[参 考 文 献]

[1] 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003, 45—46.

[2] Lasalle J P. Stability theory of ordinary differential equations[J]. J Differential Equations, 1968, **4**(1): 57—65.

[3] MAO Xue_rong. Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Liapunov functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, **260**(2): 325—340.

[4] MAO Xue_rong. Stochastic versions of the LaSalle_type theorem[J]. J Differential Equations, 1999, **153**(1): 175—195.

[5] Kolmanovskii V B, Nosov V R. Stability of Functional Differential Equations[M]. New York: Academic Press, 1986, 115—120.

[6] MAO Xue_rong. Stochastic Differential Equations and Applications[M]. Chichester: Ellis. Horwood, 1997, 158—159.

[7] 沈轶, 廖晓昕. 非线性随机时滞系统族的鲁棒稳定性[J]. 自动化学报, 1999, **25**(4): 537—542.

[8] 沈轶, 廖晓昕. 随机中立型泛函微分方程指数稳定的 Razumikhin 型定理[J]. 科学通报, 1998, **43**(21): 2272—2275.

[9] Hopfield J. Neural networks and physical system with emergent collective computational abilities[J]. Proc Nat Acad Sci, USA, 1982, **79**(8): 2254—2558.

[10] Liao X, MAO Xue_rong. Stability of stochastic neural networks[J]. Neural, Parallel & Scientific Computations, 1996, **4**(1): 205—224.

[11] 沈轶, 张玉民, 廖晓昕. 随机细胞神经网络的指数稳定性[J]. 电子学报, 2002, **30**(11): 1672—1675.

[12] Lipster R S, Shiryayev A N. Theory of Martingales[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1989, 201—202.

Asymptotic Stabilities of Stochastic Functional Differential Equations

SHEN Yi, JIANG Ming_hui, LIAO Xiao_xin

(Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: Asymptotic characteristic of the solution of the stochastic functional differential equation was discussed and sufficient condition was established by multiple Liapunov functions for locating the limit set of the solution. Moreover, from them many effective criteria on stochastic asymptotic stability, which enable us to construct the Liapunov functions much more easily in application were obtained. The results show that the well_known classical theorem on stochastic asymptotic stability is a special case of our more general results. In the end, application in stochastic Hopfield neural networks is given to verify the results.

Key words: stochastic functional differential equation; stochastic neural network; asymptotic stability; semi_martingale convergence theorem; Itô formula