文章编号: 1000_0887(2006) 12_1447_10

拟不变凸集值优化的 Kuhn_Tucker 条件与 Wolfe 对偶*

盛宝怀[1], 刘三阳[2]

(1. 绍兴文理学院 数学系, 浙江 绍兴 312000;
2. 西安电子科技大学 应用数学系, 西安 710071)

(张石生推荐)

摘要: 研究了拟不变凸集值优化最优性的 Kuhn_Tucker 条件及 Wolfe 型对偶问题• 首先引进了 alpha_阶 G_拟不变凸集和 alpha_阶 S_ 拟不变凸集值函数的概念, 由此研究了 alpha_阶 G_拟不变凸集所对应的伴随切锥及 alpha_阶伴随导数的性质; 最后, 借助 alpha_阶伴随切导数刻画了 alpha_阶 S_ 拟不变凸集值优化最优性的 Kuhn_Tucker 条件和 Wolfe 型对偶•

关 键 词: 拟不变凸集值函数; 伴随上图导数; 最优性条件; 对偶

中图分类号: O221.6 文献标识码: A

引 言

向量集值优化问题产生于含参量优化、控制论中的含参数映射、逼近论中的最佳逼近、不动点理论及非光滑分析中的次微分等, 因此, 对其性质的研究具有广泛的应用• 向量集值优化问题的研究因此而受到了人们的极大关注• 如, J. Jahn 和 R. Rauh[1] 引入了有关集值函数伴随上图导数的概念并且建立了无约束集值优化的最优性条件• 这一工作被 G. Y. Chen, J. Jahn 本人及 X. Q. Yang 分别在文献[2] 及文献[3] 中得以推广• 文献[4~ 7] 也应用上图导数建立了约束集值优化的最优性条件• 最近, 文献[8, 9] 引入了 α_ 阶锥凸集值函数并定义了 α_ 阶伴随上图导数, 在这种导数意义下 α_ 阶凸函数为可导的•

众所知道, 凸性和广义凸性在数理经济、工程、管理科学和优化理论中起着十分核心的作用• 对凸性和广义凸性的研究是数学规划所研究的重要的内容之一• Weir 和 Mond[10] 及 Weir 和 Jeyakumar[11] 共同引入了拟不变凸函数• 对于此类非凸函数的研究和在最优化理论中的应用已经有许多重要结果[12~ 24]• 本文的目的是结合 α_ 阶凸集值函数与拟不变凸的概念而定义一种新的拟不变凸集值函数, 并将其应用于非凸集值优化最优性条件的研究•

文章在第 1 节将罗列一些与集值优化有关的概念, 如广义锥凸函数等; 在第 2 节和第 3 节

* 收稿日期: 2004_09_17; 修订日期: 2006_08_19
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371024); 浙江省自然科学基金资助项目(Y604003)
作者简介: 盛宝怀(1962—), 男, 陕西宝鸡人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_575_8342803; E_mail: bhsheng@zscas.edu.cn; shengbaohuai@hotmail.com).

中将给出一些拟不变凸函数的性质，并建立拟不变凸集值函数优化的 Kuhn_Tucker 最优性条件；作为应用，在第 4 节中将给出拟不变凸函数集值优化的 Wolfe 型对偶模型和对偶定理。

1　一 些 概 念

设 X、Y、Z 分别为实的、局部凸拓扑向量空间，相应的对偶空间分别为 X^*、Y^*、Z^*。 设 $S\subset Y$，$K\subset Z$ 分别为点锥。 S 的对偶锥 S^* 定义为

$$S^*=\left\{s^*\in Y^*: s^*(s)\geqslant 0,\ \forall s\in S\right\},$$

其中 $s^*(s)$ 为 s^* 在 s 上的值。

另设 D 为 X 中的非空子集，$F: D\to 2^Y$ 和 $G: D\to 2^Z$ 分别为集值函数并满足 $F(x)\neq\emptyset$，$G(x)\neq\emptyset$，$\forall x\in D$。

考虑如下集值优化问题：

$$(\mathrm{VOP})\qquad S-\min_{\mathrm{s.t.}\, x\in E} F(x),$$

其中 $E=\left\{x\in D: G(x)\cap(-K)\neq\emptyset\right\}$，$F(E)=\bigcup_{x\in E}F(x)$。

对于 $A\subset Y$，$A\neq\emptyset$，定义 A 关于 S 的弱有效集为

$$W\min(A,S)=\left\{y\in A: (-\mathrm{int}S)\cap(A-y)=\emptyset\right\}.$$

如果 $x_0\in E$ 满足

$$F(x_0)\cap W\min[F(E),S]\neq\emptyset,$$

则称 x_0 为(VOP) 的弱有效解。 对任意 $y_0\in F(x_0)\cap W\min[F(E),S]$，$(x_0,y_0)$ 为(VOP) 的弱有效元。

集 $K\subset X$ 被称为不变凸集，如果存在向量函数 $\eta: X\times X\to X$ 使得

$$x,y\in K,\ \lambda\in[0,1]\Leftrightarrow y+\lambda\eta(x,y)\in K.$$

凸集为 $\eta(x,y)=x-y$ 时的不变凸集，但是相反的结论不成立，这方面的例子见文献[14]。 对 η 附加如下条件 C：

条件 C　设有向量函数 $\eta: X\times X\to X$。 如果

(C_1) $\eta(x,x)=0$，$x\in X$；

(C_2) $\bigcup_{x\in X}\eta(x,y)=X$，$\forall y\in X$；

(C_3) 对 $x,x_0,y\in X$ 有 $\eta(\lambda x,\lambda y)=\lambda\eta(x,y)$，$\eta(x-x_0,y-x_0)=\eta(x,y)$，则称 η 满足条件 C。

在 $R^1\times R^1$ 上定义的二元函数 η_1 和 η_2

$$\eta_1(x,y)=\begin{cases} x-y, & \text{如果 } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \text{ 或 } x\leqslant 0,\ y\leqslant 0; \\ y-x, & \text{如果 } x\geqslant 0,\ y\leqslant 0 \text{ 或 } x\leqslant 0,\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

及

$$\eta_2(x,y)=\begin{cases} x-y, & \text{如果 } x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ x-y, & \text{如果 } x\leqslant 0,\ y\leqslant 0, \\ x-y, & \text{如果 } x>1,\ y<-1, \\ x-y, & \text{如果 } x<-1,\ y>1, \\ y-x, & \text{如果 } -1\leqslant x\leqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ y-x, & \text{如果 } -1\leqslant y\leqslant 0,\ x\geqslant 0, \\ y-x, & \text{如果 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y\leqslant 0, \\ y-x, & \text{如果 } 0\leqslant y\leqslant 1,\ x\leqslant 0, \end{cases}$$

便满足条件 C•

设 η 为映 $X\times X$ 到 X 的一个向量函数, A 为一个 η 不变凸集, $\alpha>0$ 为正实数, $F:A\to 2^Y$ 为集值函数• 如果对 $\forall x_1, x_2\in A$ 和 $\forall\lambda\in[0,1]$ 有

$$\lambda^\alpha F(x_1)+(1-\lambda^\alpha)F(x_2)\subset F(x_2+\lambda\eta(x_1,x_2))+S,$$

则称 $F(x)$ 在 A 上关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸的•

如果 clcone$(F(A)+S)$ 为凸集, 则称集值函数 F 为广义 S_次类凸的[25]• 显然, 关于 η 的 α 阶 S_拟不变凸 ⇒ 广义 S_次类凸•

设 $A\subset X\times Y$• 如果对任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ 均有

$$(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda^\alpha y_1+(1-\lambda^\alpha)y_2)\in A,$$

则称 A 为 $(1,\alpha)$_凸集[8,9]• 如果存在向量函数 $\eta: X\times X\to X$ 使得对任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ 有

$$[x_2+\lambda\eta(x_1,x_2),\ \lambda^\alpha y_1+(1-\lambda^\alpha)y_2]\in A,\qquad \forall\lambda\in[0,1]•$$

则称 A 关于 η 为 α_阶 G_不变凸集• 当 $\alpha=1$ 时便得到文献[15]中所定义的 G_不变凸集•

设 $F:E\to 2^Y$ 为集值函数• F 关于 E 的图为

$$\mathrm{graph}_E F=\{(x,y)\in E\times Y: x\in E,\ y\in F(x)\}•$$

F 关于 E 的上图为

$$\mathrm{epi}_E F=\{(x,y)\in E\times Y: x\in E,\ y\in F(x)+S\}•$$

定义 1.1[8~9] 设 $A\subset X\times Y$, $A\neq\varnothing$, $(x_0,y_0)\in \mathrm{cl}A$, 则 A 在 (x_0,y_0) 点的 $(1,\alpha)$_伴随切锥 $T_A^{(1,\alpha)}((x_0,y_0))$ 为 $X\times Y$ 内的一个子集, 其满足 $(x,y)\in T_A^{(1,\alpha)}((x_0,y_0))$ 当且仅当存在 $h_n\to 0^+$, $(x_n,y_n)\in A$, $(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ $(n\to+\infty)$, 使

$$(x,y)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n-x_0}{h_n},\ \frac{y_n-y_0}{h_n^\alpha}\right)•$$

当 $\alpha=1$ 时, $T_A^{(1,\alpha)}((x_0,y_0))$ 便为著名的伴随切锥 $T_A((x_0,y_0))$•

定义 1.2[8,9] 设 $F:X\to 2^Y$, $(x_0,y_0)\in\mathrm{graph}F$• 满足

$$\mathrm{epi}_X D^\alpha F((x_0,y_0))=T^{(1,\alpha)}_{\mathrm{epi}_X F}((x_0,y_0))$$

的集值函数 $D^\alpha F((x_0,y_0))$ 被称为 F 在 (x_0,y_0) 点的 α_阶伴随切导数• 如果集值函数 $D^\alpha F((x_0,y_0))$ 存在则称 F 在 $(x_0,y_0)\in\mathrm{graph}F$ 点为 α_阶伴随可导的• 如果 F 在任意点 $(x,y)\in\mathrm{graph}F$ 上伴随可导, 则称 F 在 X 上为伴随可导的•

对 $A, B\in X$, 文中定义

$$A+B=\{a+b: a\in A,\ b\in B\},\ (A,B)=A\times B=\{(a,b): a\in A,\ b\in B\}•$$

设 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 和 $A\subset\mathbf{R}$• 则 $A\geqslant 0$ 指 $a\geqslant 0$, $\forall a\in A$, 且 $A\geqslant B$ 指 $a\geqslant b$, $\forall a\in A$, $\forall b\in B$, 并记 $\mathbf{R}_+=[0,+\infty)$, $\mathbf{R}_{++}=(0,+\infty)$•

2 几个引理

引理 2.1 设 $D\subset X$ 为关于函数 $\eta: X\times X\to X$ 的不变凸集• 则, $F:D\to 2^Y$ 在 D 上关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸当且仅当 $\mathrm{epi}_D F$ 关于 η 为 α_阶 G_不变凸集•

证明 设 F 关于 η 为 D 上的 α_阶 S_拟不变凸集值函数, $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathrm{epi}_D F$, 则 $y_1\in F(x_1)+S$, $y_2\in F(x_2)+S$• 因为 F 关于 η 为 D 上的 α_阶 S_拟不变凸集值函数, 对 $0\leqslant$

$\lambda \leqslant 1$ 有

$$\lambda^{\alpha}F(x_1) + (1-\lambda^{\alpha})F(x_2) \subset F[x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)] + S.$$

因此,

$$[x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2), \lambda^{\alpha}y_1 + (1-\lambda^{\alpha})y_2] \in \mathrm{epi}_D F, \qquad \forall \lambda \in [0, 1].$$

反之, 假设 $\mathrm{epi}_D F$ 为关于 η 的 α_阶 G_不变凸集. 令 $x_i \in D$, $y_i \in F(x_i)$, $i = 1, 2$, 则 $(x_i, y_i) \in \mathrm{epi}_D F$, $i = 1, 2$. 所以, 对 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,

$$(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2), \lambda^{\alpha}y_1 + (1-\lambda^{\alpha})y_2) \in \mathrm{epi}_D F.$$

由 y_1 和 y_2 的任意性有

$$\lambda^{\alpha}F(x_1) + (1-\lambda^{\alpha})F(x_2) \subset F[x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2)] + S.$$

引理 2.2 设 $A \subset X \times Y$ 关于 η 为 α_阶 G_不变凸集合, η 满足条件 C_3, $(x_0, y_0) \in \mathrm{cl}A$, 则, $T_A((x_0, y_0))$ 也为关于 η 的 α_阶 G_不变凸集.

证明 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in T_A((x_0, y_0))$, 则存在 $(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}), (x_n^{(2)}, y_n^{(2)}) \in A$, $h_n > 0$, $h_n \to 0^+$, 使得

$$(x_i, y_i) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x_n^{(i)} - x_0}{h_n}, \frac{y_n^{(i)} - y_0}{h_n^{\alpha}}\right), \qquad i = 1, 2.$$

因此, 对 $\lambda \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned}
&(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2), \lambda^{\alpha}y_1 + (1-\lambda^{\alpha})y_2) = \\
&\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x_n^{(2)} - x_0}{h_n} + \lambda\eta\left(\frac{x_n^{(1)} - x_0}{h_n}, \frac{x_n^{(2)} - x_0}{h_n}\right), \frac{\lambda^{\alpha}y_n^{(1)} + (1-\lambda^{\alpha})y_n^{(2)} - y_0}{h_n^{\alpha}}\right] = \\
&\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{x_n^{(2)} + \lambda\eta(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}) - x_0}{h_n}, \frac{\lambda^{\alpha}y_n^{(1)} + (1-\lambda^{\alpha})y_n^{(2)} - y_0}{h_n^{\alpha}}\right].
\end{aligned}$$

因为 $(x_n^{(2)} + \lambda\eta(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}), \lambda^{\alpha}y_n^{(1)} + (1-\lambda^{\alpha})y_n^{(2)}) \in A$, 所以

$$(x_2 + \lambda\eta(x_1, x_2), \lambda^{\alpha}y_1 + (1-\lambda^{\alpha})y_2) \in T_A^{(1,\alpha)}[(x_0, y_0)].$$

因此, $T_A^{(1,\alpha)}[(x_0, y_0)]$ 为一个关于 η 的 α 阶 G_不变凸集.

引理 2.3 设 $F: D \to 2^Y$ 为定义在不变凸集 D 上的一个关于 η 的 α_阶 S_拟不变凸集值函数. 如果 F 在 $(x_0, y_0) \in \mathrm{graph}F$ 处伴随可导, 则

1) $D^{\alpha}F((x_0, y_0))(x): D \to 2^Y$ 为关于 η 的 α_阶 S_拟不变凸集值函数;

2) $\theta_Y \in D^{\alpha}F((x_0, y_0))(\theta_X)$.

证明 1) 可以由 $T^{(1,\alpha)}_{\mathrm{epi}_D F}((x_0, y_0))$ 关于 η 为 α_阶 G_不变凸集而得到; 2) 可由 $D^{\alpha}F((x_0, y_0))$ 的定义得到.

引理 2.4 设 $E \subset X$ 关于 η 为 α_阶不变凸集合, $F: E \to 2^Y$ 为 α_阶伴随可导, 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸的集值函数, 则,

$$F(x) - y_0 \subset D^{\alpha}F((x_0, y_0))(\eta(x, x_0)) + S, \qquad x \in E.$$

证明 设 $(x_0, y_0), (x, y) \in \mathrm{graph}F$. 令 $t_n = n$, $x_n = x_0 + (1/n)\eta(x, x_0)$, $y_n = y_0 + (1/n^{\alpha})(y - y_0) = (1/n^{\alpha})y + (1 - (1/n^{\alpha}))y_0$. 则,

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0),$$

而且

$$\lim_{n\to+\infty}(t_n(x_n - x_0), t_n^{\alpha}(y_n - y_0)) = (\eta(x, x_0), y - y_0).$$

因为 E 关于 η 为不变凸集, 所以 $x_n \in E$• 又因为 $F(x)$ 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸的, 所以 $y_n \in F(x_n) + S$ 且 $(x_n, y_n) \in \mathrm{epi}_E F$•

$$(\eta(x, x_0), y - y_0) \in T^{(1,\alpha)}_{\mathrm{epi}_E F}((x_0, y_0)) = \mathrm{epi} D^{\alpha} F((x_0, y_0)),$$

即

$$F(x) - y_0 \subset D^{\alpha} F((x_0, y_0))(\eta(x, x_0)) + S•$$

引理 2.5[8,9] 设 $E \subset X$, 集值函数 $F: E \to 2^Y$ 在 $(x^*, y^*) \in \mathrm{graph} F$ α_阶伴随可导, 则

$$D^{\alpha} F(x^*, y^*)(T_E(x^*)) \subset \mathrm{clcone}(F(E) + S - y^*)•$$

特别地, 当 F 为 S_类凸的集值函数时, 有 $D^{\alpha} F(x^*, y^*)(T_E(x^*)) \subset T_{F(E)+S}(y^*)$•

考虑(VOP)的标量化问题:

$$(\mathrm{VOP}_{\varphi}) \quad \min_{\mathrm{s.t.}\, x \in E} (\varphi F)(x),$$

其中 $\varphi \in Y^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$• 如果 $x_0 \in E$, $y_0 \in F(x_0)$, 使

$$\varphi(y_0) \leqslant \varphi(y), \qquad y \in F(E),$$

则称 x_0 和 (x_0, y_0) 分别为 (VOP_{φ}) 的最优解和最优元•

引理 2.6[25] 设 $\mathrm{int} S \neq \varnothing$, $x_0 \in E$, $y_0 \in F(x_0)$, F 在 A 上为广义 S_类凸的, 则 (x_0, y_0) 为 (VOP) 的弱有效元当且仅当存在 $\varphi \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$ 使得 (x_0, y_0) 为 (VOP_{φ}) 的最小元•

引理 2.7[26] 设 $\mathrm{int} S \neq \varnothing$, $A \subset Y$, $\mathrm{clcone}(A + S)$ 为凸集, 则下列两个结论中有且仅有一个成立:

1) $\mathrm{clcone}(A + S) \cap (-\mathrm{int} S) \neq \varnothing$;

2) 存在 $\mu \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$ 使得 $\mu(a) \geqslant 0$, $a \in A$•

引理 2.8[25] 设 $A \subset Y$• 如果 $\mathrm{clcone}(A + S) \cap (-\mathrm{int} S) \neq \varnothing$, 则,

$$A \cap (-\mathrm{int} S) \neq \varnothing•$$

3 Kuhn_Tucker 条件

定理 3.1 设 D 为关于 η 的不变凸集, η 满足条件 C• $F: D \to 2^Y$ 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸的集值函数, $G: D \to 2^Z$ 关于 η 为 α_阶 K_拟不变凸的集值函数, (x_0, y_0) 为 (VOP) 的一个弱有效元• 如果存在 $x \in X$ 使得 $G(x) \cap (-\mathrm{int} K) \neq \varnothing$, α_阶伴随导数 $D^{\alpha} F(x_0, y_0)$ 存在, 并且对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap (-K)$, α_阶伴随导数 $D^{\alpha} G(x_0, z_0)$ 存在, 则存在 $(s^*, k^*) \in S^* \times K^*$ 满足 $s^* \neq \theta_{Y^*}$, 使

$$s^*(D^{\alpha} F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) + k^*(D^{\alpha} G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geqslant 0, \quad \forall x \in D, \tag{1}$$

且

$$k^*(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}, \tag{2}$$

其中

$$s^*(D^{\alpha} F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) = \bigcup_{y \in D^{\alpha} F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))} s^*(y),$$

$$k^*(D^{\alpha} G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) = \bigcup_{z \in D^{\alpha} G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))} k^*(z)•$$

证明 因为 (x_0, y_0) 为(VOP)的弱有效元, 所以

$$(F(E) - y_0) \cap (-\mathrm{int} S) = \varnothing• \tag{3}$$

令 $\varphi(x) = (D^{\alpha}F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0)), D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0)) + G(x_0) \cap (-K)): D \to 2^{Y\times Z}$. 由引理2.1和引理2.3知道 $\varphi(x)$ 为 D 上的广义 $S \times K$ 类凸函数. 我们将证明

$$\mathrm{clcone}(\varphi^*(X) + S \times K) \cap [-\mathrm{int}(S \times K)] = \varnothing. \tag{4}$$

如果式(4)不成立,由 $\mathrm{int}(S \times K)$ 为开集和引理2.8知道

$$\varphi^*(X) \cap [-\mathrm{int}(S \times K)] \neq \varnothing. \tag{5}$$

因此,存在 $x \in D$, $y \in D^{\alpha}F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))$, $z \in D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))$, $z_0' \in G(x_0) \cap [-K]$, 使

$$(y, z + z_0') \in -\mathrm{int}(S \times K). \tag{6}$$

因为 $z \in D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))$, 我们可以找到 $t_n > 0$, $t_n \to +\infty(n \to +\infty)$, $x_n \in X$, $x_n \to x_0$, $z_n \in G(x_n) + K$, 使

$$(\eta(x, x_0), z) = \lim_{n\to+\infty}(t_n(x_n - x_0), t_n^{\alpha}(z_n - z_0)).$$

由式(6)知道 $y \in -\mathrm{int}S$ 且 $\lim_{n\to+\infty} t_n^{\alpha}(z_n - z_0) + z_0' \in -\mathrm{int}K$. 因为 $-\mathrm{int}K$ 为开集,不失一般性可设对一切 $n \in \mathbf{N}$,

$$t_n^{\alpha}(z_n - z_0) + z_0' \in -\mathrm{int}K.$$

因此,

$$z_n \in z_0 - \frac{z_0'}{t_n^{\alpha}} - \mathrm{int}K \subset -K.$$

令 $z_n = z_n' + k_n'$ $\in G(x_n) + K$, $k_n' \in K$, $z_n' \in G(x_n)$, 则 $z_n' \in -K - k_n' + z_n \subset -K$. 所以 $G(x_n) \cap [-K] \neq \varnothing$, $x_n \in E$. 因此 $\eta(x, x_0) \in T_E(x_0)$. 由 $y \in D^{\alpha}F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))$ 和引理2.5知道 $y \in \mathrm{clcone}(F(E) + S - y_0)$. 因为 $y \in -\mathrm{int}S$, 所以,

$$\mathrm{clcone}(F(E) + S - y_0) \cap [-\mathrm{int}S] \neq \varnothing.$$

由引理2.8

$$(F(E) - y_0) \cap [-\mathrm{int}S] \neq \varnothing.$$

与式(3)矛盾了. 因此式(4)成立. 由引理2.7,存在 $(s^*, k^*) \in (S \times K)^* = S^* \times K^*$, $(s^*, k^*) \neq (\theta_{Y^*}, \theta_{Z^*})$, 使

$$s^*(D^{\alpha}F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) + k^*(D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0)) + G(x_0) \cap (-K)) \geqslant 0, \quad x \in X. \tag{7}$$

在式(7)中令 $x = x_0$. 由条件 C_1 知道 $k^*(G(x_0) \cap (-K)) \geqslant 0$. 由 K^* 的定义有 $k^*(G(x_0) \cap (-K)) \leqslant 0$. 所以得到了式(1)和式(2).

下证 $s^* \neq \theta_{Y^*}$. 反之,如果 $s^* = \theta_{Y^*}$, 则 $k^* \neq \theta_{Z^*}$. 由式(1)有

$$k^*(D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geqslant 0, \quad x \in D.$$

特别,

$$k^*(D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geqslant 0. \tag{8}$$

由引理2.4

$$0 > k^*(z - z_0) \in k^*(D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0)) + K).$$

因为 $k^*(k) \geqslant 0$, $k \in K$, $k^*(z_0) = 0$, 所以,

$$k^*(D^{\alpha}G(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \cap (-\mathbf{R}_{++}) \neq \varnothing.$$

与式(8)矛盾了.

定理 3.2 设 $D \subset X$ 为一关于 η 的不变凸集, η 满足条件 C. $F: D \to 2^Y$ 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸集值函数, $G(x): D \to 2^Z$ 关于 η 为 α_阶 K_拟不变凸集值函数, $(x_0, y_0) \in \mathrm{graph}F$, 存在 $s^* \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$, $k^* \in K^*$, 使得对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap (-K)$, 式(1) 和式(2) 成立, 则 (x_0, y_0) 为(VOP) 的弱有效元.

证明 如果结论不成立, 则

$$(F(E) - y_0) \cap (-\mathrm{int}S) \neq \varnothing.$$

因此, 存在 $y' \in F(x')$, $x' \in E$, 使得 $y' - y_0 \in -\mathrm{int}S$. 因此, $s^*(y' - y_0) < 0$. 由引理 2.4 知道

$$s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x', x_0)) + S) \cap (-\mathbf{R}_{++}) \neq \varnothing.$$

因为 $s^*(s) \geqslant 0$, $s \in S$, 所以

$$s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x', x_0))) \cap (-\mathbf{R}_{++}) \neq \varnothing. \tag{9}$$

另一方面, 因为 $x' \in E$, 所以

$$G(x') \cap (-K) \neq \varnothing.$$

选择 $z' \in G(x')$ 使 $k^*(z' - z_0) = k^*(z') \leqslant 0$. 因此,

$$k^*(D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x', x_0))) \cap (-\mathbf{R}_{+}) \neq \varnothing. \tag{10}$$

由式(9) 和式(10) 得到

$$[s^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x', x_0))) + k^*(D^\alpha G(x_0, z_0)(\eta(x', x_0)))] \cap (-\mathbf{R}_{++}) \neq \varnothing.$$

与式(1) 矛盾了.

4 Wolfe 型对偶

作为定理 3.1 和定理 3.2 的应用, 这里讨论(VOP) 的对偶问题.

相应于(VOP), 考虑下列 Wolfe 型对偶模型:

$$(\mathrm{DVOP}) \quad \begin{cases} \max \ \Psi(u, y, z, s^*, k^*) = s^*(y) + k^*(z), \\ \quad s^*(D^\alpha F(u, y)(\eta(x, u))) + k^*(D^\alpha G(u, z)(\eta(x, u))) \geqslant 0, \\ \quad x \in E, \ u \in D, y \in F(u), z \in G(u) \cap (-K), \\ \quad s^* \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}, \ k^* \in K^*. \end{cases}$$

用 W 表示(DVOP) 的可行解.

对 $u \in E$, $y \in F(u)$, (u, y) 被称为(VOP) 的一个可行解. 对 $u \in D$, $z' \in G(u) \cap (-K)$, $s^* \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$, $k^* \in K^*$, $y' \in F(u)$, (u, y', z', s^*, k^*) 被称为(DVOP) 的一个可行解.

定理 4.1(弱对偶定理) 令 D 为一个 η 型不变凸集, η 满足条件 C. $x_0 \in E$, $(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*) \in W$. 如果 $F: D \to 2^Y$ 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸集值函数, $G: D \to 2^Z$ 关于 η 为 α_阶 K_拟不变凸集值函数, 则(VOP) 的可行元 (x_0, y_0) 与(DVOP) 的可行元 $(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*)$ 之间存在关系

$$s_0^*(y_0) \geqslant \Psi(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*).$$

证明 对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap (-K)$

$$s_0^*(y_0 - y_0') \geqslant s_0^*(D^\alpha F(u_0, y_0')(\eta(x_0, u_0))) \geqslant$$
$$-k_0^*(D^\alpha G(u_0, z_0')(\eta(x_0, u_0))) \geqslant -k_0^*(z_0 - z_0') \geqslant k_0^*(z_0').$$

因此,

$$s_0^*(y_0) \geqslant s_0^*(y_0') + k_0^*(z_0') = \Psi(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*)$$

即

$$s_0^*(y_0) \geqslant \Psi(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*).$$

定理 4.2(对偶定理) 设 $x_0 \in E$, $y_0 \in F(x_0)$, $(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*) \in W$, $y_0' \in F(u_0)$, $z_0' \in G(u_0) \cap (-K)$, 集值函数 F、G 满足定理4.1的条件且 $s_0^*(y_0) = \Psi(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*)$, 则 (x_0, y_0) 为(VOP) 的弱有效元, $(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*)$ 为(DVOP) 的最优解.

证明 由定理4.1知道对(DVOP)的可行元 (u, y', z', s^*, k^*) 和 $x \in E$, $y \in F(x)$, 有

$$\Psi(u, y', z', s^*, k^*) \leqslant s_0^*(y_0) = \Psi(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*) \leqslant s_0^*(y).$$

因此, $(u_0, y_0', z_0', s_0^*, k_0^*)$ 为(DVOP) 的最优元. 因为 $s_0^*(y) \geqslant s_0^*(y_0)$, 由引理2.6知道 (x_0, y_0) 为(VOP)的弱有效元.

定理 4.3(正定理) 设 D 为关于 η 的不变凸集合, η 满足条件C. $F: D \to 2^Y$ 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸集值函数, $G: D \to 2^Z$ 关于 η 为 α_阶 K_拟不变凸集值函数, $(x_0, y_0) \in \mathrm{graph}F$ 为(VOP) 的弱有效元, 对任意 $z_0 \in G(x_0) \cap (-K)$ α_阶伴随导数 $D^\alpha F(x_0, y_0)$ 和 $D^\alpha G(x_0, z_0)$ 存在, 且存在 $x \in D$ 使得 $G(x) \cap (-\mathrm{int}K) \neq \varnothing$. 如果存在 $s^* \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$, $k^* \in K^*$, 使对任意 $z_0' \in G(x_0) \cap (-K)$, $(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*)$ 为(DVOP)的可行解且

$$s_0^*(y_0) = \Psi(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*),$$

则 $(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*)$ 为(DVOP)的最优元.

证明 由定理3.1, 存在 $s_0^* \in S^* \setminus \{\theta_{Y^*}\}$, $k_0^* \in K^*$, 使对任意 $z_0' \in G(x_0) \cap (-K)$ 有

$$s_0^*(D^\alpha F(x_0, y_0)(\eta(x, x_0))) + k_0^*(D^\alpha F(x_0, z_0)(\eta(x, x_0))) \geqslant 0, \qquad x \in D$$

和

$$k_0^*(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}.$$

因此, $(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*) \in W$, 且上述关系使得对任意 $z_0' \in G(x_0) \cap (-K)$ 有 $k_0^*(z_0') = 0$.

因此,

$$s_0^*(y_0) = \Psi(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*).$$

由定理4.2知道 $(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*)$ 为(DVOP)的最优解.

定理 4.4(逆定理) 设 D 为关于满足条件C的 η 的不变凸集合, $F: D \to 2^Y$ 关于 η 为 α_阶 S_拟不变凸集值函数, $G: D \to 2^Z$ 关于 η 为 α_阶 K_拟不变凸集值函数, $(x_0, y_0, z_0', s_0^*, k_0^*)$ 为(DVOP) 的可行元且 $k_0^*(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}$, 则 (x_0, y_0) 为(VOP)的弱有效元.

证明 由定理3.2得到.

致谢 对审稿人的宝贵修改意见表示衷心感谢.

[参 考 文 献]

[1] Jahn J, Rauh R. Contingent epiderivative and set_valued optimization[J]. Math Methods Oper Res, 1997, **46**(2): 193—211.

[2] Chen G Y, Jahn J. Optimality conditions for set_valued optimization problems[J]. Math Methods Oper Res, 1998, **48**(2): 187—200.

[3] Yang X Q. Directional derivatives for set_valued mappings and applications[J]. Math Methods Oper

Res, 1998, **48**(2): 274—285.

[4] Jahn J, Khan A A. Generalized contingent epiderivatives in set_valued optimization: optimality conditions[J]. Numberical Functional Analysis and Optimization, 2002, **23**(7/8): 807—831.

[5] Götz A, Jahn J. The Lagrange multiplier rule in set_valued optimization[J]. SIAM J Optim, 1999, **10**(2): 331—344.

[6] Huang Y W. Generalized constraint qualifications and optimality conditions for set_valued optimization problems[J]. J Math Anal Appl, 2002, **265**(2): 309—321.

[7] 盛宝怀, 刘三阳. Benson 真有效意义下向量集值优化的广义 Fritz John条件[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(12): 1289—1295.

[8] SHENG Bao_huai, LIU San_yang. The optimality conditions of nonconvex set_valued vector optimization[J]. Acta Mathematica Scientia B, 2002, **22**(1): 47—55.

[9] 盛宝怀, 刘三阳. Benson 真有效意义下集值优化的广义最优性条件[J]. 数学学报, 2003, **46**(3): 611—620.

[10] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiple_objective optimization[J]. J Math Anal Appl, 1988, **136**(1): 29—38.

[11] Weir T, Jeyakumar V. A class of nonconvex functions and mathematical programming[J]. Bull Austral Math Soc, 1988, **38**(1): 177—189.

[12] Yang X M, Yang X Q, Teo K L. Characterizations and applications of prequasi_invex functions[J]. J Optim Theory Appl, 2001, **110**(3): 645—668.

[13] Mohan S R, Neogy S K. On invex sets and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, **189**(4): 901—908.

[14] Yang X M, Li Duan. On properties of preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, **256**(2): 229—241.

[15] Yang X M, Li Duan. Semistrictly preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, **258**(2): 287—308.

[16] Luo H Z, Xu Z K. On characterizations of prequasi_invex functions[J]. J Optim Theory Appl, 2004, **120**(2): 429—439.

[17] Pini R. Invexity and generalized convexity[J]. Optimization, 1991, **22**(4): 513—525.

[18] Craven B D. Invex functions and constrained local minima[J]. Bull Austral Math Soc, 1981, **24**(2): 357—366.

[19] Hanson M A. On sufficiency of the Kuhn_Tucker conditions[J]. J Math Anal Appl, 1981, **80**(3): 545—550.

[20] Suneja S K, Singh C, Bector C R. Generalization of preinvex and B_vex functions[J]. J Optim Theory Appl, 1993, **76**(3): 577—587.

[21] Kaul R N, Kaur S. Optimality criteria in nonlinear programming involving nonconvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1985, **105**(1): 104—112.

[22] Qsuna_Gómez R, Beato_Moreno A, Rufian_lizana A. Generalized convexity in multiobjective programming[J]. J Math Anal Appl, 1999, **233**(2): 205—220.

[23] Mukherjee R N. Generalized pseudoconvex functions and multiobjective programming[J]. J Math Anal Appl, 1997, **208**(1): 49—57.

[24] Bhatia D, Mehra A. Lagrangian duality for preinvex set_valued functions[J]. J Math Anal Appl, 1997, **214**(3): 599—612.

[25] Yang X M, Li D, Wang S Y. Near_subconvexlikeness in vector optimization with set_valued functions[J]. J Optim Theory Appl, 2001, **110**(2): 413—427.

[26] 盛宝怀, 刘三阳. 关于向量集值优化的 Benson 真有效性[J]. 应用数学, 2000, **13**(4): 95—99.

Kuhn_Tucker Condition and the Wolfe Duality of Preinvex Set_Valued Optimization

SHENG Bao_huai[1], LIU San_yang[2]

(1. Department of Mathematics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing, Zhejiang 312000, P.R.China;

2. Department of Applied Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, P.R.China)

Abstract: The optimality Kuhn_Tucker condition and the Wolfe duality for the preinvex set_valued optimization are investigated. Firstly, the concepts of alpha_order G_invex set and the alpha_order S_preinvex set_valued function were introduced, from which the properties of the corresponding contingent cone and the alpha_order contingent derivative were studied; Then, the optimality Kuhn_Tucker condition and the Wolfe duality theorem for the alpha_order S_preinvex set_valued optimization were presented with the help of the alpha_order contingent derivative.

Key words: preinvex set_valued function; contingent epiderivatives; optimality conditions; duality