

具有紧支撑的非张量积形式二维小波有限元*

金坚明, 薛鹏翔, 徐应祥, 朱亚莉

(1. 西北师范大学 数学与信息科学学院, 兰州 730070)

(扶名福推荐)

摘要: 分析论述了构造非张量积形式二维 Daubechies 小波的几条定理, 在此基础上着重构造了具有紧支撑的非张量积形式二维小波, 随后用具有紧支撑的非张量积二维小波有限元去解弹性薄板挠度问题, 给出了误差阶, 最后列举了一个数值例子

关键词: 紧支撑; 非张量积; 二维小波; 插值函数; 弹性薄板; 挠度; 有限元

中图分类号: O24.82 文献标识码: A

1 二维小波简介

设 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上的一个多分辨分析^[1, 2], 其中 V_j 称为多尺度空间

一般 V_j 可表示为

$$V_j = \text{span} \left\{ \varphi_{j, k} \mid k \in \mathbb{Z}^2 \right\}. \quad (1)$$

其中 $\varphi_{j, k}(\mathbf{x}) = 2^{-j} \varphi(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k})$, $\varphi_{j, k}$ 为 V_j 上的一组规范正交基, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$.

由文献[1, 2]有

$$2^{-1} \varphi \left(\frac{\mathbf{x}}{2} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{k}), \quad h_k \in \mathbb{R}, \quad h_k = 2^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \left(\frac{\mathbf{x}}{2} \right) \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{k}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

由式(2)两边经过 Fourier 变换可得

$$\varphi(\omega) = m_0 \left(\frac{\omega}{2} \right) \varphi \left(\frac{\omega}{2} \right), \quad m_0(\omega) = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k e^{-i\mathbf{k} \cdot \omega} \quad (3)$$

为 $2\pi I$ 周期函数, 称为共轭滤波器, h_k 称为频率响应, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\omega \in \mathbb{R}^2$.

引理 1^[3] $\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\varphi(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$

定理 1^[4, 5] 由式(3)确定的 $m_0(\omega)$ 有如下关系式:

1) $|m_0(\omega)| \leq 1, m_0(0) = 1;$ (4)

2) $|m_0(\omega + I\pi)|^2 + |m_0(\omega)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 - \{(2\mathbb{Z}^2 + I) + 2\mathbb{Z}^2\}} |m_0(\omega + k\pi)|^2 |\varphi(\omega + k\pi)|^2 = 1$

* 收稿日期: 2005-06-13; 修订日期: 2006-06-23

作者简介: 金坚明(1943—), 男, 浙江萧山人, 教授, 研究生导师, 主要研究方向为样条函数、小波分析和固体力学有限元(联系人. Tel: + 86_931_7970659; E_mail: jinjm@nwnu.edu.cn).

定义 1 让 $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, $W_j = V_j^\perp$, 则有

$$V_{m-1} = \bigoplus_{j=-m}^{+\infty} W_j, \quad L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j. \quad (5)$$

设

$$W_j = \text{span}\left\{ \psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}^2 \right\}, \quad (6)$$

其中 $\psi_{j,k} = \mathcal{Z}^{-j} \phi(\mathcal{Z}^j x - k)$ 为上 W_j 上规范正交基, 则称 $\phi(x)$ 为基本小波函数.

因为 $\mathcal{Z}^{-1} \phi(x/2) \in W_1 \subset V_0$, 故有

$$\mathcal{Z}^{-1} \phi\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} g_k \varphi(x - k), \quad (7)$$

其中 $g_k = \mathcal{Z}^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} \phi\left(\frac{x}{2}\right) \varphi(x - k) dx$.

定理 2 式(8)中的 g_n 由下式确定

$$g_n = h \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot n (-1)^{-(n_1 + n_2)}, \quad (8)$$

其中 $n = (n_1, n_2)^T \in \mathbb{Z}^2$.

由式(8)两边经过 Fourier 变换可得

$$\phi(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right). \quad (9)$$

2 非张量积二维小波函数的构造

定义 $\eta_l(x)$ 为 $\eta_l(x) = (T_H^l \chi_A)(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$. 其中 χ_A 为 A 的集特征函数,

$$A = \left\{ (x_1, x_2) \mid -1/2 \leq x_1 \leq 1/2, -1/2 \leq x_2 \leq 1/2 \right\},$$

$$(T_H^l f)(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k f(2x - k).$$

由 Fourier 变换可得

$$\eta_l(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \prod_{j=1}^l m_0(\mathcal{Z}^j \omega) \frac{\sin(\mathcal{Z}^{j-1} \omega_1)}{2^{j-1} \omega_1} \frac{\sin(\mathcal{Z}^{j-1} \omega_2)}{2^{j-1} \omega_2},$$

其中 $m_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k e^{-ik \cdot \omega}$, $\omega \in \mathbb{R}^2$. 当 $l \rightarrow \infty$ 可得

$$\eta_\infty = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\mathcal{Z}^j \omega).$$

引理 2^[4] 假设对任意 $\varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |h_k| |k|^\varepsilon < \infty, \quad |k| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2},$$

这时 $\eta_\infty(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\mathcal{Z}^j \omega)$ 对任意给定的 $\omega \in \mathbb{R}^2$ 是收敛的, 而且在有界集上是一致收敛的.

引理 3^[4] 如果

$$m_0(\omega) = \left[\frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega_1}) \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega_2}) \right]^N \mathcal{F}(\omega),$$

其中 $\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} f(k) e^{-ik \cdot \omega}$, 满足 $\sup_{k \in \mathbb{Z}^2} |f(k)| |k|^\varepsilon < \infty$, 记 $\sup_{\omega \in \mathbb{R}^2} |\mathcal{F}(\omega)| = B$, 则

存在常数 $C > 0$, 使得

$$\left| \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega) \right| \leq C |\omega_1|^{-N} |\omega_2|^{-N} |\omega|^{\ln B / \ln 2}.$$

引理 4 定义

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z^2} h_k e^{-ik \cdot \omega},$$

并且假定

$$m_0(\omega) = \left[\frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_1}) \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_2}) \right]^N \mathcal{F}(\omega),$$

其中 $\mathcal{F}(\omega) = \sum_{k \in Z^2} f(k) e^{-ik \cdot \omega},$

满足 $\sup_{k \in Z^2} |f(k)| |k|^\varepsilon < \infty, \varepsilon > 0, \sup_{\omega \in R^2} |\mathcal{F}(\omega)| = B < 2^{N-1}.$

那么由下式

$$\eta_l(x) = 2 \sum_{k \in Z^2} h_k \eta_{l-1}(2x - k), \quad x \in R^2,$$

$$\eta_0(x) = \chi_A(x), \quad A = \left\{ (x_1, x_2) \mid -1/2 \leq x_1 \leq 1/2; -1/2 \leq x_2 \leq 1/2 \right\}$$

定义的函数 $\eta_l(x)$ 当 l 趋于无穷时是逐点收敛于 $\eta_\infty(x)$.

定理 3 让

- 1) $\sum_{k \in Z^2} |h_k| |k|^\varepsilon < \infty, \varepsilon > 0;$
- 2) $\sum_{k \in Z^2} h_{k-2s} h_{k-2t} = \delta_{s,t}, \quad s, t \in Z^2;$
- 3) $\sum_{k \in Z^2} h_k = 2.$

定义 $m_0(\omega) = 2^{-1} \sum_{k \in Z^2} h_k e^{-ik \cdot \omega}, \omega \in R^2$, 并假定

$$m_0(\omega) = \left[\frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_1}) \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_2}) \right]^N \sum_{k \in Z^2} f(k) e^{-ik \cdot \omega};$$

其中

- 4) $\sum_{k \in Z^2} |f(k)| |k|^\varepsilon < \infty, \varepsilon > 0;$
- 5) $\sup_{\omega \in k^2} \left| \sum_{k \in Z^2} f(k) e^{-ik \cdot \omega} \right| < 2^{N-1}, N \in Z^+.$

定义

$$\varphi(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\omega), \quad \varphi(x) = 2 \sum_{k \in Z^2} g_k \varphi(2x - k), \quad \omega \in R^2, x \in R^2.$$

那么 $\varphi_{j,k} = 2^{-j} \varphi(2^{-j}x - k)$ 定义了一个多尺度分析; $\phi_{j,k} = 2^{-j} \phi(2^{-j}x - k)$ 是相应的正交小波基, 只需让 $\eta_0 = \chi_A, A = \left\{ (x_1, x_2) \mid -1/2 \leq x_1 \leq 1/2; -1/2 \leq x_2 \leq 1/2 \right\}, \eta_{l+1} = 2 \sum_{k \in Z^2} h_k \eta_l(2x - k)$, 从而得到 $\eta_l \rightarrow \varphi$, 当 $l \rightarrow \infty$ 时, $V_0 = \text{span} \left\{ \varphi(x - k), x \in R^2, k \in Z^2 \right\}, \left\{ V_m \right\}$ 是多尺度分析.

为构造具有紧支撑的非张量积二维小波, 我们假定序列 $\{h_k\}$ 是有限的. 设 $h_k = 0$ 当 $k_1 < N_1, k_2 < N_2, k_1 > N_{1+}, k_2 > N_{2+}$, 那么 $\varphi(x_1, x_2)$ 和 $\phi(x_1, x_2)$ 具有有限支集.

上面我们已经由 $m_0(\omega)$ 出发构造出了二维 Daubechies 小波, 但是此时 $m_0(\omega)$ 还未知, 为此下面构造二维共轭滤波器 $m_0(\omega)$.

假定只有有限个 $h_k \neq 0$ 且 $\omega = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$ 是 $m_0(\omega) = 0$ 的 N 重根, 那么 $m_0(\omega)$ 可以写成如下形式

$$m_0(\omega) = \left[\frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_1}) \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_2}) \right]^N Q(e^{-i\omega}), \quad (11)$$

其中 $Q(\cdot)$ 为实系数多项式.

再由式(5)得

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \mathbf{I}\pi)|^2 + \left| m_0 \left[\omega + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pi \right] \right|^2 + \left| m_0 \left[\omega + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \pi \right] \right|^2 = 1.$$

令 $y_1 = \cos^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $y_2 = \cos^2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, 有

$$y_1^N y_2^N P((1-y_1), (1-y_2)) + (1-y_1)^N (1-y_2)^N P(y_1, y_2) + (1-y_1)^N y_2^N P(y_1, (1-y_2)) + y_1^N (1-y_2)^N P((1-y_1), y_2) = 1, \quad (12)$$

其中 $P\left[\sin^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \sin^2\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right] = |Q(e^{-i\omega})|^2$.

通过与文献[1]类同的分析, 可知

$$P_N(y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1+j_1}{j_1} \binom{N-1+j_2}{j_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}$$

是方程(12)的一个解.

3 紧支撑非张量积二维小波函数的计算

对小波函数 $\phi(x_1, x_2)$ 和尺度函数 $\varphi(x_1, x_2)$ 的计算要从 h_k 着手. 下面不失一般性地取 $N = 3$, 则有

$$|Q_3(e^{-i\omega})|^2 = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \binom{2+i}{i} \binom{2+j}{j} \sin^{2i}\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \sin^{2j}\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

不妨设 $Q_N(e^{-i\omega}) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} q_{ij} e^{-i\omega_1 i} e^{-i\omega_2 j}$. 由于 $Q_N(\cdot)$ 为实系数多项式, 那么有 $|Q_3(e^{-i\omega})|^2 = Q_3(e^{-i\omega}) Q_3(e^{i\omega})$.

经过运算得下方程组

$$\begin{cases} q_{00}^2 + q_{01}^2 + q_{02}^2 + q_{10}^2 + q_{11}^2 + q_{12}^2 + q_{20}^2 + q_{21}^2 + q_{22}^2 = 625/64, \\ q_{00}q_{01} + q_{01}q_{02} + q_{10}q_{11} + q_{11}q_{12} + q_{20}q_{21} + q_{21}q_{22} = -125/32, \\ q_{00}q_{02} + q_{10}q_{12} + q_{20}q_{22} = 75/128, \\ q_{00}q_{11} + q_{01}q_{12} + q_{10}q_{21} + q_{11}q_{22} = 25/16, \\ q_{00}q_{12} + q_{10}q_{22} = -15/64, \\ q_{00}q_{22} = 9/256, \\ q_{01}q_{10} + q_{02}q_{11} + q_{11}q_{20} + q_{12}q_{21} = 16/25, \\ q_{01}q_{20} + q_{02}q_{21} = -15/64, \\ q_{02}q_{10} + q_{12}q_{20} = -15/64, \\ q_{02}q_{20} = 9/256. \end{cases}$$

求解得到

$$\begin{aligned} q_{00} &= 0.187\ 500\ 000\ 000\ 001\ 05, & q_{01} &= -0.084\ 500\ 542\ 658\ 999\ 16, \\ q_{02} &= 0.013\ 594\ 044\ 723\ 715\ 615, & q_{10} &= -1.165\ 499\ 457\ 341\ 011\ 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_{11} &= 0.525\ 255\ 128\ 608\ 415\ 5, & q_{12} &= -0.084\ 500\ 542\ 658\ 988\ 57, \\
q_{20} &= 2.586\ 150\ 826\ 667\ 882\ 5, & q_{21} &= -1.165\ 499\ 457\ 341\ 011\ 3, \\
q_{22} &= 0.187\ 500\ 000\ 000\ 007\ 47.
\end{aligned}$$

那么由(11)式,得

$$m_0(\omega) = \left[\frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_1}) \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega_2}) \right]^3 \left[\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 q_{ij} e^{-i\omega_1 i} e^{-i\omega_2 j} \right].$$

又由文献[6]

$$m_0(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{p_1=0}^5 \sum_{p_2=0}^5 h_{p_1 p_2} e^{-i\omega_1 p_1} e^{-i\omega_2 p_2},$$

通过对比系数便得到:

$$\begin{aligned}
h_{00} &= 0.005\ 859\ 38, & h_{01} &= 0.014\ 937\ 5, & h_{02} &= 0.010\ 081, & h_{03} &= -0.000\ 788\ 109, \\
h_{04} &= -0.001\ 366\ 2, & h_{05} &= 0.000\ 424\ 814, & h_{10} &= -0.018\ 843\ 7, & h_{11} &= -0.048\ 038\ 9, \\
h_{12} &= -0.032\ 420\ 5, & h_{13} &= 0.002\ 534\ 56, & h_{14} &= 0.004\ 393\ 7, & h_{15} &= -0.001\ 366\ 2, \\
h_{20} &= -0.010\ 870\ 2, & h_{21} &= -0.027\ 711\ 8, & h_{22} &= -0.018\ 702\ 2, & h_{23} &= 0.001\ 462\ 09, \\
h_{24} &= 0.002\ 534\ 56, & h_{25} &= -0.000\ 788\ 109, & h_{30} &= 0.139\ 045, & h_{31} &= 0.354\ 473, \\
h_{32} &= 0.239\ 227, & h_{33} &= -0.018\ 702\ 2, & h_{34} &= -0.032\ 420\ 5, & h_{35} &= 0.010\ 081, \\
h_{40} &= 0.206\ 03, & h_{41} &= 0.525\ 238, & h_{42} &= 0.354\ 473, & h_{43} &= -0.027\ 711\ 8, \\
h_{44} &= -0.048\ 038\ 9, & h_{45} &= 0.014\ 937\ 5, & h_{50} &= 0.080\ 817\ 2, & h_{51} &= 0.206\ 03, \\
h_{52} &= 0.139\ 045, & h_{53} &= -0.010\ 870\ 2, & h_{54} &= -0.018\ 843\ 7, & h_{55} &= 0.005\ 859\ 38.
\end{aligned}$$

由式(4)知 $m_0(0) = 1$, 当是二维且 $N = 3$, $\omega = (0, 0)^T$ 时, 将 $h_{i,j}$ 的结果代入式(3)有

$$m_0(0) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 h_{i,j} = 1.000\ 000\ 000\ 000\ 011\ 5.$$

此结果与式(4)一样, 十分微小的误差是由于计算中舍入误差造成的.

这里得到了 h_k 当 $k_1 > 5, k_1 < 0, k_2 > 5, k_2 < 0$ 时为 0, 便可以计算尺度函数 φ 与小波函数 ψ 的支集.

由定理 3 有 $\varphi(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \eta_l(x)$. 显然所有的 η_l 都具有有限支集

$$\text{supp } \eta_l \subset \left\{ (x_1, x_2) \mid N_{l,1}^- \leq x_1 \leq N_{l,1}^+, N_{l,2}^- \leq x_2 \leq N_{l,2}^+ \right\},$$

其中 $N_{l,1}^- = N_{l-1,1}^- / 2, N_{l,2}^- = N_{l-1,2}^- / 2, N_{l,1}^+ = [N_{l-1,1}^+ + 5] / 2, N_{l,2}^+ = [N_{l-1,2}^+ + 5] / 2$.

因此当 $l \rightarrow \infty$ 时, $N_{l,1}^- \rightarrow 0, N_{l,2}^- \rightarrow 0, N_{l,1}^+ \rightarrow 5, N_{l,2}^+ \rightarrow 5$, 故

$$\text{supp } \varphi \subset \left\{ (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 \leq 5; 0 \leq x_2 \leq 5 \right\}. \tag{13}$$

由(9)式有 g_n 当 $n_1 > 1, n_1 < -4, n_2 > 0, n_2 < -5$ 时都为 0.

又 $\frac{1}{2} \varphi(x) = \sum_{k \in Z^2} g_k \varphi(2x - k)$ 得到 $\varphi(x)$ 具有支集

$$\text{supp } \varphi \subset \left\{ (x_1, x_2) \mid -2 \leq x_1 \leq 3; -2.5 \leq x_2 \leq 2.5 \right\}.$$

对于尺度函数 φ 的计算采用与一维类似的方法. 根据式(13), 由于 h_j 当 $i > 5, i < 0, j > 5, j < 0$ 时都为 0, 所以 $\varphi(x_1, x_2)$ 的支集为 $[0, 5] \times [0, 5]$.

由于在构造紧支撑二维小波函数 $\varphi(x_1, x_2)$ 时假定 $\omega = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$ 是 $m_0(\omega) = 0$ 的 N 重根, 故由参考文献[7]知 $\varphi(x_1, x_2)$ 具有 N 阶消失矩, 即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1^\alpha x_2^\beta \varphi(x_1 - i, x_2 - j) dx_1 dx_2 = 0,$$

$\alpha + \beta = 0, 1, \dots, N-1$ 所以根据参考文献[2] 可知对 $\alpha + \beta \leq N-1$ 的多项式 $x_1^\alpha x_2^\beta$ 可由 V_0 空间的基 $\varphi(x_1 - i, x_2 - j)$ 线性表出, 即有

$$x_1^\alpha x_2^\beta = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{ij} \varphi(x_1 - i, x_2 - j). \quad (14)$$

与文献[8]中一维情形类似, 由(14)式可知

$$1 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{ij} \varphi(x_1 - i, x_2 - j).$$

其中 $C_{ij} = \langle \varphi(x_1 - i, x_2 - j), 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1 - i, x_2 - j) dx_1 dx_2 = 1$.

特别地对(0, 0)点有:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \varphi(i, j) = 1.$$

由于 $\varphi(x_1, x_2)$ 的支集为 $[0, 5] \times [0, 5]$, 故再加上如下的规范化条件:

$$\begin{aligned} & \varphi(1, 1) + \varphi(1, 2) + \varphi(1, 3) + \varphi(1, 4) + \varphi(2, 1) + \varphi(2, 2) + \varphi(2, 3) + \\ & \varphi(2, 4) + \varphi(3, 1) + \varphi(3, 2) + \varphi(3, 3) + \varphi(3, 4) + \varphi(4, 1) + \\ & \varphi(4, 2) + \varphi(4, 3) + \varphi(4, 4) = 1. \end{aligned} \quad (15)$$

并将方程(14)、(15)联立建立关于 $\varphi(i, j)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ 的线性非齐次代数方程组 $\Phi \mathbf{H} = \mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{B} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$.

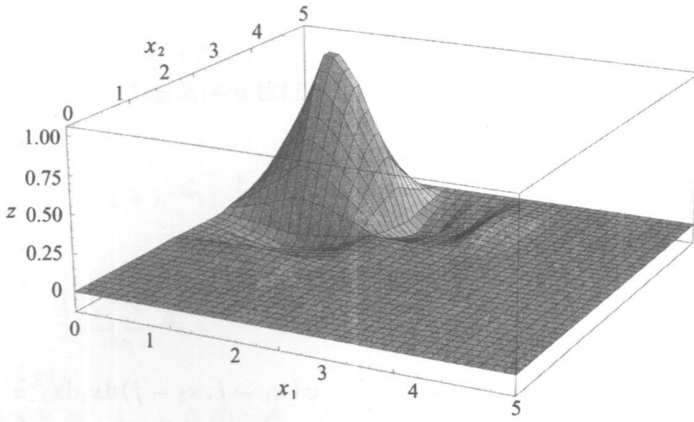
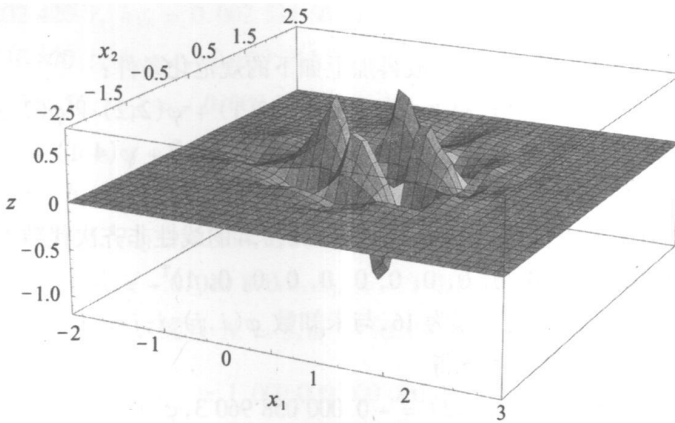
由于系数矩阵和增广矩阵的秩都为 16, 与未知数 $\varphi(i, j)$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ 的个数相同, 故此方程组存在唯一解. 经具体运算求得

$$\left\{ \begin{aligned} & \varphi(1, 1) = 0.000\ 950\ 936, \quad \varphi(1, 2) = -0.000\ 058\ 960\ 3, \quad \varphi(1, 3) = 0.000\ 032\ 101\ 1, \\ & \varphi(1, 4) = 0, \quad \varphi(2, 1) = 0.035\ 682\ 2, \quad \varphi(2, 2) = -0.002\ 212\ 38, \\ & \varphi(2, 3) = 0.001\ 204\ 54, \quad \varphi(2, 4) = 0.000\ 032\ 101\ 1, \quad \varphi(3, 1) = -0.065\ 537\ 7, \\ & \varphi(3, 2) = 0.004\ 063\ 49, \quad \varphi(3, 3) = -0.002\ 212\ 38, \\ & \varphi(3, 4) = -0.000\ 058\ 960\ 3, \quad \varphi(4, 1) = 1.057\ 02, \\ & \varphi(4, 2) = -0.065\ 537\ 7, \quad \varphi(4, 3) = 0.035\ 682\ 2, \quad \varphi(4, 4) = 0.000\ 950\ 936. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

对于小波函数利用(8)式可以求得

$$\left\{ \begin{aligned} & \phi(-1, -1.5) = 0.001\ 229\ 24, \quad \phi(-1, -0.5) = -0.009\ 161\ 23, \\ & \phi(-1, 0.5) = -0.006\ 538\ 19, \quad \phi(-1, 1.5) = -0.000\ 169\ 138, \\ & \phi(0, -1.5) = 0.047\ 517\ 4, \quad \phi(0, -0.5) = -0.354\ 136, \\ & \phi(0, 0.5) = -0.252\ 739, \quad \phi(0, 1.5) = -0.006\ 538\ 19, \\ & \phi(1, -1.5) = 0.066\ 580\ 9, \quad \phi(1, -0.5) = -0.496\ 211, \\ & \phi(1, 0.5) = -0.354\ 136, \quad \phi(1, 1.5) = -0.009\ 161\ 23, \\ & \phi(2, -1.5) = -0.008\ 933\ 74, \quad \phi(2, -0.5) = 0.066\ 580\ 9, \\ & \phi(2, 0.5) = 0.047\ 517\ 4, \quad \phi(2, 1.5) = 0.001\ 229\ 24. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

进一步利用式(2)和(8)还可以求得其他加细节点处尺度函数 $\varphi(x)$ 和小波函数 $\phi(x)$ 的值, 其中 $x = (x_1, x_2)$. 尺度函数与小波函数对应的图形如图 1 所示.

(a) 尺度函数 $\varphi(x_1, x_2)$ (b) 小波函数 $\phi(x_1, x_2)$ 图 1 尺度函数 $\varphi(x_1, x_2)$ 和小波函数 $\phi(x_1, x_2)$

由于 $\varphi(x_1, x_2)$ 的支集为 $[0, 5] \times [0, 5]$, 则 $\text{Supp } \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(x_1, x_2) \subset [0, 5] \times [0, 5]$, 经过分析计算, 类似可以得到以 $\varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(i, j)$, $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 为未知数的 16 阶齐次线性方程组 $\Phi H = B$, 其中 $\Phi = (\varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(1, 1), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(1, 2), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(1, 3), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(1, 4), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(2, 1), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(2, 2), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(2, 3), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(2, 4), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(3, 1), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(3, 2), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(3, 3), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(3, 4), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(4, 1), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(4, 2), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(4, 3), \varphi_{x_1 x_2}^{(\alpha+\beta)}(4, 4))^T$.

由式(13)可知, 不高于 $N-1$ 次的多项式可以由尺度函数表出, 即

$$x_1^\alpha x_2^\beta = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{ij} \varphi(x_1 - i, x_2 - j), \quad (18)$$

其中 C_{ij} 为

$$C_{ij} = \langle x_1^\alpha x_2^\beta, \varphi(x_1 - i, x_2 - j) \rangle = \int_0^5 \int_0^5 \sum_{\mu=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\mu} i^{\alpha-\mu} x_1^\mu \sum_{\nu=0}^{\beta} \binom{\beta}{\nu} j^{\beta-\nu} x_2^\nu \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \sum_{\mu=0}^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\beta} \binom{\alpha}{\mu} \binom{\beta}{\nu} i^{\alpha-\mu} j^{\beta-\nu} A_{\mu, \nu}$$

其中

$$A_{\mu, \nu} = \langle x_1^\mu x_2^\nu, \varphi(x_1, x_2) \rangle = \langle x_1^\mu x_2^\nu, 2 \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 h_{ij} \varphi(2x_1 - i, 2x_2 - j) \rangle =$$

$$\left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{m=0}^{\mu-1} \sum_{n=0}^{\nu-1} 2^{-\mu-\nu-1} h_{ij} \begin{pmatrix} \mu \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} i^{\mu-m} j^{\nu-n} A_{m, n+} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{n=0}^{\nu-1} 2^{-\mu-\nu-1} h_{ij} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} j^{\nu-n} A_{\mu, n+} \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^5 \sum_{m=0}^{\mu-1} 2^{-\mu-\nu-1} h_{ij} \begin{pmatrix} \mu \\ m \end{pmatrix} i^{\mu-m} A_{m, \nu} \right) \left| (1 - 2^{-\mu-\nu}) \right. \quad (\mu, \nu \geq 1),$$

$$A_{0,0} = \langle x_1^0 x_2^0, \varphi(x_1, x_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1,$$

$$A_{\mu,0} = \left(\sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^5 \sum_{m=0}^{\mu-1} 2^{-\mu-1} h_{ij} \begin{pmatrix} \mu \\ m \end{pmatrix} i^{\mu-m} A_{m,0} \right) \left| (1 - 2^{-\mu}) \right. \quad (\mu \geq 1),$$

$$A_{0,\nu} = \left(\sum_{i=0}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{n=0}^{\nu-1} 2^{-\nu-1} h_{ij} \begin{pmatrix} \nu \\ n \end{pmatrix} j^{\nu-n} A_{0,n} \right) \left| (1 - 2^{-\nu}) \right., \quad (\nu \geq 1).$$

同时对式(18)两边关于 x_1 求 α 阶偏导, 关于 x_2 求 β 阶偏导有

$$\alpha! \beta! = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} C_{ij} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \varphi(x_1 - i, x_2 - j).$$

不妨在上式中取 $x_1 = 5, x_2 = 5$ 便有

$$\alpha! \beta! = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 C_{ij} \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta} \varphi(5 - i, 5 - j). \tag{19}$$

将式(19)与齐次方程组 $\Phi H = B$ 联立, 得到了非齐次方程组 $\Phi H = B$, 其中 $B(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \alpha! \beta!)^T$.

由于系数矩阵和增广矩阵的秩都为 16, 与未知数 $\varphi_{x_1 x_2}^{\alpha+\beta}(i, j) (i, j = 1, 2, 3, 4)$ 的个数相同, 故此方程组存在唯一解.

以上我们求出了尺度函数 φ 及其 1 阶、2 阶偏导数在剖分节点处的函数值, 利用式(8) 可求出小波函数 ψ 及其 1 阶、2 阶偏导数在剖分节点处的函数值.

4 弹性薄板小挠度问题二维非张量积小波有限元解

现在取一矩形薄板 $R(0 \leq x_1 \leq a, 0 \leq x_2 \leq b)$, 各向同性均质等厚度, 变形前的中性面取为 $z = 0$, 坐标轴 x_1, x_2, z 成右手系, 令 $w = w(x_1, x_2)$ 表示中性面上点 (x_1, x_2) 的横向位移, $f(x_1, x_2)$ 表示作用在板面上的横向载荷.

在小变形情况下, 板的应变能为^[9~11]

$$J[w] = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right]^2 - 2(1 - \mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] \right\} dx_1 dx_2; \tag{20}$$

外功能为

$$F[w] = - \int_0^b \int_0^a f(x_1, x_2) w(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \tag{21}$$

其中 $D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)]$ 为板的抗弯刚度, h 为板厚, μ 为 Poisson 比. 板的总势能为

$$U[w] = J[w] + F[w]. \tag{22}$$

由最小势能原理, 平衡态位移是势能达到最小值

$$\min_{w \in H_E^2} U[w], \quad (23)$$

其中 H_E^2 是矩形板 R 上具有有限能量并满足强加边界条件的函数空间。

现在我们用二维 Daubechies 小波有限元求解变分问题(23), 也就是 Ritz_Galerkin 法中取二维 Daubechies 小波为基函数。

首先我们对区间进行剖分: $0 = x_{10} < x_{11} < \dots < x_{1M_{x_1}} = a, h_{x_1} = a/M_{x_1}, 0 = x_{20} < x_{21} < \dots < x_{2M_{x_2}} = b, h_{x_2} = b/M_{x_2}$ 其中 $x_{1i} = i \cdot h_{x_1}, x_{2j} = j \cdot h_{x_2}$ 。

这样矩形板 R 上二维 Daubechies 小波的基为

$$W = \text{span} \left\{ \phi \left(\frac{x_1}{h_{x_1}} - i, \frac{x_2}{h_{x_2}} - j \right) \mid i = -2, 0, 1, \dots, M_{x_1} + 1; j = -2, 0, 1, \dots, M_{x_2} + 2 \right\}, \quad (24)$$

显然 W 是完备的。

首先在四周不加约束的条件下将变分问题(23)离散化, 然后再加上相应的边界条件。令

$$w(x_1, x_2) = \sum_{i=-2}^{M_{x_1}+1} \sum_{j=-2}^{M_{x_2}+2} r_{ij} \phi_{ij}(x_1, x_2), \quad (25)$$

其中 $\phi_{ij}(x_1, x_2) = \phi(x_1/h_{x_1} - i, x_2/h_{x_2} - j)$ 。

代入式(23)得到代数方程组

$$D \sum_{i=-2}^{M_{x_1}+1} \sum_{j=-2}^{M_{x_2}+2} r_{ij} \left\{ \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_1 x_1}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_1 x_1}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_2 x_2}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_2 x_2}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \mu \left[\int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_1 x_1}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_2 x_2}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_2 x_2}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_1 x_1}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right] + 2(1 - \mu) \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_1 x_2}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_1 x_2}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\} = f_{kl}, \quad (26)$$

$$k = -2, -1, 0, 1, \dots, M_{x_1} + 1; l = -2, -1, 0, 1, \dots, M_{x_2} + 2,$$

其中 $f_{kl} = \int_0^a \int_0^b f(x_1, x_2) \phi_{kl}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$ 。

引入矩阵记号:

$$\begin{aligned} A_{j, l} &= \left\{ \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_1 x_1}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_1 x_1}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\}_{i, k}, \\ B_{j, l} &= \left\{ \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_2 x_2}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_2 x_2}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\}_{i, k}, \\ C_{j, l} &= \left\{ \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_1 x_1}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_2 x_2}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\}_{i, k}, \\ D_{j, l} &= \left\{ \int_0^a \int_0^b \phi_{ij, x_1 x_2}''(x_1, x_2) \phi_{kl, x_1 x_2}''(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \right\}_{i, k}, \end{aligned}$$

其中 $j, l = -2, -1, \dots, M_{x_2} + 2$; 向量记号:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\mathbf{r}_{-2}, \mathbf{r}_{-1}, \dots, \mathbf{r}_{M_{x_2}+2})^T, \quad \mathbf{r}_l = (\mathbf{r}_{-2, l}, \mathbf{r}_{-1, l}, \dots, \mathbf{r}_{M_{x_1}+1, l}), \\ \mathbf{f} &= (\mathbf{f}_{-2}, \mathbf{f}_{-1}, \dots, \mathbf{f}_{M_{x_2}+2})^T, \quad \mathbf{f}_l = (\mathbf{f}_{-2, l}, \mathbf{f}_{-1, l}, \dots, \mathbf{f}_{M_{x_1}+1, l}), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} w(0, x_2) = \sum_{i=-2}^{M_1+1M_2+2} \sum_{j=-2}^{x_2} r_{ij} \phi_{ij}(0, x_2) = 0, \\ w'_{x_1}(0, x_2) = \sum_{i=-2}^{M_1+1M_2+2} \sum_{j=-2}^{x_2} r_{ij} \phi'_{ij, x_1}(0, x_2) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

由于所取的基函数 $\text{supp } \Phi(x_1, x_2) \subset [-2, 3] \times [-2.5, 2.5]$, $\text{supp } \phi'_{x_1}(x_1, x_2) \subset [-2, 3] \times [-2.5, 2.5]$, 由 x_2 的任意性, 要使式(28)成立, 必须有 $r_{-2,j} = r_{-1,j} = r_{0,j} = r_{1,j} = r_{2,j} = 0$ ($j = -2, -1, 0, 1, \dots, M_{x_2} + 2$). 在方程组(27)中 G 的子块 G_{ij} 是与 r 相乘, $G_{ij}r$ 的形式可表示为 $G_{ij}r = (G_{ij}^l r_l)$, 而 r_l 中只有前 5 个 $r_{-2,l} = r_{-1,l} = r_{0,l} = r_{1,l} = r_{2,l} = 0$, 故在 G_{ij} 中划去前 5 行前 5 列, 亦即划去 $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}$ 的前 5 行前 5 列. 重新运算得到 G , 代入式(27)便可使 $w(x_1, x_2)$ 在 $x_1 = 0$ 边上满足固支边界条件.

2) 假设在 $x_1 = 0$ 边上是简支的, 即 $w|_{\partial\Omega} = 0, \partial^2 w / \partial x_1^2 |_{\partial\Omega} = 0$. 这时 $\partial^2 w / \partial x_1^2 |_{\partial\Omega} = 0$ 是自然边界条件, 由变分过程自然满足, 不需要进行处理. 只有 $w|_{\partial\Omega} = 0$ 是强加边界条件, 其处理与在边 $x_1 = 0$ 上固支时处理方法相同.

3) 若在 $x_1 = 0$ 边上是自由边界条件, 由变分过程知这是自然边界条件, 变分过程自然满足, 不需要进行处理.

类似地, 其它边上边界条件的处理与在 $x_1 = 0$ 边上是类似的, 只不过去掉相应矩阵的一些行和一些列便可满足边界条件, 处理过程是很简单的.

6 误差分析

本文的误差有两部分, 一部分为有限元法所产生的误差, 另一部分为数值积分所产生的误差. 由于我们所求得的是二维非张量积形式小波函数在剖分点处函数值, 一阶偏导数、二阶偏导数及混合偏导数值, 而不是小波函数 $\Phi(x_1, x_2)$ 自身, 故在二重积分中采用的是二重复化 Simpson 公式. 由于定积分中复化 Simpson 公式的误差是 $O(h^4)$, 因而经过简单推导易知二重复化 Simpson 公式所产生的误差为 $O(h^4)$ (见参考文献[12]).

设 w 是弹性薄板小挠度问题在简支边界条件下的真解, w_h 是有限元解, S_h 是有限元空间, 则由文献[10]可知, 当 $w \in \overset{\circ}{H}_2(\Omega) \cap H_4(\Omega)$ 时, 有误差估计式

$$\|w - w_h\|_{0,\Omega} = O(h^4). \quad (29)$$

7 数值例子

设四边简支均厚弹性方板作用有均匀分布荷载 $q = -1$, 弹性模量 $E = 1$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 设板的边长为 l 和板厚 h 都是 1. 计算结果与精确解比较见表 1.

表 1 本例的有限元解与精确解及弯矩对照表

网格	中心点绕度 w_0	点 $(x_1 = 0, x_2 = l/4)$ 弯矩 M_{x_1}
2×2	0.003 874 95 ql^4/D_0	0.021 927 2 ql^2
4×4	0.003 915 43 ql^4/D_0	0.031 534 64 ql^2
6×6	0.003 991 24 ql^4/D_0	0.032 515 14 ql^2
精确解	0.004 062 36 ql^4/D_0	0.035 7 ql^2

[参 考 文 献]

- [1] Daubechies Ingrid. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, **41**(7): 909—996.
- [2] Mallat Stephane G. Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1989, **315**(1): 69—87.
- [3] 金坚明. 二维小波函数中 g_n 的分析与具体计算[J]. 甘肃科学学报, 2002, **14**(3): 11—14.
- [4] 金坚明. 二维共轭滤波器相应定理的探讨[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2001, **37**(3): 12—18.
- [5] 金坚明. 二维共轭滤波器及其构造[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2002, **38**(1): 19—25.
- [6] DING Xuan_zhou. Construction of real_valued wavelets symmetry[J]. Journal of Approximation Theory, 1995, **81**(3): 323—331.
- [7] 梁学章, 何甲兴, 王新民, 等. 小波分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
- [8] 周又和, 王记增, 郑晓静. 小波伽辽金有限元法在梁板结构中的应用[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(8): 697—706.
- [9] 石钟慈. 样条有限元[J]. 计算数学, 1979, **1**(1): 50—72.
- [10] Strang G, Fix G J. An Analysis of the Element Method[M]. New York: Academic Press, 1973.
- [11] 金坚明. 线性板问题中的有限元法[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1997.
- [12] 清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会. 现代应用数学手册·计算方法分册[M]. 北京: 北京出版社, 1990.

Compactly Supported Non_Tensor Product Form Two Dimension Wavelet Finite Element

JIN Jian_ming, XUE Peng_xiang, XU Ying_xiang, ZHU Ya_li

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University,
Lanzhou 730070, P. R. China)

Abstract: Some theorems of compactly supported non_tensor product form two dimension Daubechies wavelet was analysed carefully. Compactly supported non_tensor product form two dimension wavelet was constructed, then non_tensor product form two dimension wavelet finite element was used to solve the deflection problem of elastic thin plate. The error order was researched. A numerical example was given at last.

Key words: compactly supported; non_tensor product; two dimension wavelet; interpolation function; elastic thin plate; deflection; finite element