文章编号: 1000_0887(2006) 12_1477_09　　c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

多_尺度加细函数及其性质的研究*

杨守志

(汕头大学 数学系,广东 汕头 515063)

(李继彬推荐)

摘要: 引入伸缩因子为 a 的多_尺度加细函数和平移不变子空间的概念. 研究了多_尺度加细方程解存在的条件. 特别地,给出这种方程的解是正交的充分必要条件. 建立了多_尺度加细函数与两尺度加细函数之间的关系. 并讨论了它们的一些性质. 最后给出相应的构造算例.

关 键 词: 多_尺度加细函数; 伸缩因子; 多_尺度加细方程

中图分类号: O174.42　　文献标识码: A

引 言

两尺度加细方程 $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p_k\phi(2x - k)$ 在小波分析理论研究中起着非常重要的作用. 其中系数 $\{p_k\}$ 称为面具. 两尺度加细方程解的存在性问题引起很多人的关注[1~7]. 当面具满足适当的条件时, 两尺度加细方程可以存在分布解, 甚至是连续解. 基于两尺度加细方程的细分算法收敛性的研究也是许多论文的研究课题[8~10]. 更有大量小波文献讨论两尺度加细方程解的性质[1~5].

两尺度加细方程是由一个面具 $\{p_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ 确定的, 而多_尺度加细方程是由多个面具 $\{p_{1,k}\}, \{p_{2,k}\}, \cdots, \{p_{M-1,k}\}$ 确定的. 即多_尺度加细方程具有如下的形式:

$$\phi(x) = \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}} p_{m,k}\phi(2^m x - k).$$

特别地, 这些面具在一定的条件下, 也可以存在紧支撑分布解, 甚至是连续的解. 在文献[11]和[12]中, 通过多_尺度加细方程构造出大量的多_尺度加细函数. 讨论了基于多_尺度加细方程的细分算法的收敛性质, 并与两尺度加细方程的细分算法进行比较. 当然两尺度加细方程拥有的很多性质都可以推广到多_尺度加细方程. 而多_尺度加细函数拥有许多有很好的性质而两尺度加细函数却未必具有(见文献[11]). 在文献[11]和[12]的基础上, 本文引入伸缩因子为 a 时多_尺度加细函数的概念. 给出相应的多_尺度加细方程存在紧支撑正交解的充分必要条件. 并建立多_尺度加细函数与两尺度加细函数之间的关系.

---

* 收稿日期: 2004_11_16; 修订日期: 2006_08_18

资金项目: 广东省自然科学基金资助项目(032038; 05008289; 06105648); 广东省自然科学博士基金资助项目(04300917)

作者简介: 杨守志(1963—), 男, 河南罗山人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: +86_754_2903742; Fax: +86_754_2903947; E_mail: szyang@stu.edu.cn).

1 平移不变空间

下面简单介绍平移不变空间的一些基本概念• 设 $\Phi(x)=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r]^{\mathrm{T}}$ 是平移不变空间的生成元• 如果存在一个生成元 $\Phi(x)$ 使得

$$S(\Phi)=\operatorname{clos}\langle\phi_l(x-k):l=1,2,\cdots,r;k\in\mathbf{Z}\rangle,$$

则称 $S(\Phi)$ 是一个平移不变空间(SI)• 如果 Φ 是一有限集合, 则空间 $S(\Phi)$ 称为有限平移不变空间(FSI)• 如果 Φ 中仅有一个元素, 则称空间 $S(\Phi)$ 为主要的平移不变空间(PSI)• 设 $S(\Phi)$ 是一个SI空间, 通过伸缩定义 $S(\Phi)^{a^k}$ 为

$$S(\Phi)^{a^k}=\left\{f(x/a^k)\mid f\in S(\Phi)\right\}•$$

定义 1 设 $\Phi(x)=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r]^{\mathrm{T}}$• 如果存在 $r\times r$ 矩阵序列$\left\{\boldsymbol{P}_k\right\}$ 使得下面两尺度关系成立

$$\Phi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{P}_k\Phi(ax-k),\tag{1}$$

则称 $\Phi(x)=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r]^{\mathrm{T}}$ 是伸缩因子为 a 的两尺度加细函数向量•

对(1)式两边作Fourier变换, 有

$$\hat{\Phi}(\omega)=\boldsymbol{P}(a^{-1}\omega)\hat{\Phi}\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad \boldsymbol{P}(\omega)=\frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{P}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}•\tag{2}$$

如果当 $N\to\infty$时, 乘积 $\prod_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)$ 收敛, 则方程(1)存在一个解 $\Phi(x)$, 其解的Fourier变换为

$$\hat{\Phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)\hat{\Phi}(0),\quad \boldsymbol{P}(\omega)=\frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\boldsymbol{P}_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}•\tag{3}$$

当 Φ 是由单个函数 ϕ 构成时, 两尺度关系有下列形式:

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k\phi(ax-k),\tag{4}$$

其中 $p_k\in\mathbf{R}$• 类似地, 我们有

$$\hat{\phi}(\omega)=\prod_{k=1}^{\infty}P(a^{-k}\omega)\hat{\phi}(0),\quad P(\omega)=\frac{1}{a}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}•\tag{5}$$

2 多_尺度加细函数

为了构造优化的平移不变空间的生成元(见文献[11]), 基于若干个面具, S. Dekel和N. Dyn[12]研究了多_尺度加细函数• 这种加细函数是两尺度加细函数的自然推广• 在此基础上, 本节将研究更一般的情形, 即伸缩因子为大于2的整数情形•

定义 2 设 $\Phi(x)=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r]^{\mathrm{T}}$• 如果存在 $M-1$ 个面具 $\boldsymbol{P}_m=\left\{\boldsymbol{p}_{m,k}\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$, $m=1,2,\cdots,M-1$, 使得下面多_尺度关系成立:

$$\Phi(x)=\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{m,k}\Phi(a^mx-k)•\tag{6}$$

则称 $\Phi(x)=[\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_r]^{\mathrm{T}}$ 是多_尺度加细函数向量, 更具体地, 称为 M_尺度加细函数向量(这里 $2\leqslant M\in\mathbf{N}$)•

根据(6)式, 可以得到下列关系:

$$S(\Phi)\subset S(\Phi)^{a^{-1}}+S(\Phi)^{a^{-2}}+\cdots+S(\Phi)^{a^{-(M-1)}}•\tag{7}$$

为了叙述的方便,更重要的是由于 PSI 情形可以很容易推广到 FSI 情形· 本文仅讨论 PSI 情形· 并假设多_尺度加细函数的面具也是有限的· 也就是说,多_尺度加细方程满足下面的方程:

$$\phi(x)=\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{k=N_1}^{N_2}p_{m,k}\phi(a^m x-k)\cdot \tag{8}$$

对(8)式两边实施 Fourier 变换,得到

$$\hat\phi(\omega)=\sum_{m=1}^{M-1}P_m(a^{-m}\omega)\hat\phi(a^{-m}\omega),\quad P_m(\omega)=a^{-m}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{m,k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega},$$
$$m=1,2,\cdots,M-1\cdot \tag{9}$$

定理 1 设 $\phi(x)$ 是满足加细方程(8)的多_尺度加细函数· 定义

$$\hat\Phi(\omega)=[\hat\phi(a^0\omega),\hat\phi(a^{-1}\omega),\hat\phi(a^{-2}\omega),\cdots,\hat\phi(a^{-(M-2)}\omega)]\cdot$$

则 $\phi(x)$ 的 Fourier 变换能用下式表示:

$$\hat\phi(\omega)=\boldsymbol{f}^{[j]}[\hat\Phi(a^{-j}\omega)]^{\mathrm{T}},\qquad j=0,1,2,\cdots, \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{f}^{[j]}(\omega)=[f^{j,1}(\omega),f^{j,2}(\omega),\cdots,f^{j,M-1}(\omega)]$ 可由下式通过递归定义:

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}^{[0]}(\omega)=[1,0,\cdots,0];\\ f^{j+1,m}(\omega)=\begin{cases}f^{j,m+1}(\omega)+P_m(a^{-(j+m)}\omega)f^{j,1}(\omega), & 1\leqslant m\leqslant M-2,\\ P_{M-1}(a^{-(j+M-1)}\omega)f^{j,1}(\omega), & m=M-1\cdot\end{cases}\end{cases} \tag{11}$$

证明 用归纳法证明· 当 $j=0$, (10) 式显然成立· 假设对于任意正整数 j, (10) 式也成立· 下面证明(10) 式对 $j+1$ 也成立· 应用(11)式,可以得到

$$\begin{aligned}\hat\phi(\omega)&=\boldsymbol{f}^{[j]}[\hat\Phi(a^{-j}\omega)]^{\mathrm{T}}=\\&f^{j,1}(\omega)\hat\phi(a^{-j}\omega)+f^{j,2}(\omega)\hat\phi(a^{-(j+1)}\omega)+\cdots+f^{j,M-1}(\omega)\hat\phi(a^{-(j+M-1)}\omega)=\\&[f^{j,2}(\omega)+P_1(a^{-(j+1)}\omega)f^{j,1},f^{j,3}(\omega)+P_2(a^{-(j+2)}\omega)f^{j,1},\cdots,\\&f^{j,M-1}(\omega)+P_{M-2}(a^{-(j+M-2)}\omega)f^{j,1},P_{M-1}(a^{-(j+M-1)})f^{j,1}]\times\\&[\hat\phi(a^{-(j+1)}\omega),\hat\phi(a^{-(j+2)}\omega),\hat\phi(a^{-(j+3)}\omega),\cdots,\hat\phi(a^{-(j+M-1)}\omega)]^{\mathrm{T}}=\\&[f^{j+1,1}(\omega),f^{j+1,2}(\omega),\cdots,f^{j+1,M-1}(\omega)]\times\\&[\hat\phi(a^{-(j+1)}\omega),\hat\phi(a^{-(j+2)}\omega),\hat\phi(a^{-(j+3)}\omega),\cdots,\hat\phi(a^{-(j+M-1)}\omega)]^{\mathrm{T}}=\\&\boldsymbol{f}^{[j+1]}[\hat\Phi(a^{-(j+1)}\omega)]^{\mathrm{T}}\cdot\end{aligned}$$

上式意味着完成归纳过程· 从而证明了定理 1·

利用(11)式,可以得到下面的关系:

$$\boldsymbol{f}^{[j+1]}(\omega)=\boldsymbol{f}^{[j]}(\omega)\boldsymbol{P}(a^{-(j+1)}\omega),\qquad j\in\mathbf{Z}, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{P}(\omega)$ 是 $(M-1)\times(M-1)$ 矩阵,且由下式定义

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\begin{bmatrix}P_1(a^{-0}\omega) & P_2(a^{-1}\omega) & \cdots & \cdots & P_2(a^{-(M-2)}\omega)\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot \tag{13}$$

重复应用(12)式,则

$$\boldsymbol{f}^{[j+1]}(\omega)=\boldsymbol{f}^{[j]}(\omega)\boldsymbol{P}(a^{-(j+1)}\omega)=$$

$$\boldsymbol{f}^{[0]}(\omega)\prod_{k=1}^{j+1}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)=[1,0,\cdots,0]\prod_{k=1}^{j+1}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega),\tag{14}$$

因此,

$$\hat{\phi}(\omega)=[1,0,\cdots,0]\lim_{j\to\infty}\prod_{k=1}^{j+1}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[\hat{\phi}(0),\hat{\phi}(0),\cdots,\hat{\phi}(0)]^{\mathrm{T}}.\tag{15}$$

根据(10)式和(15)式,得到 $\hat{\Phi}(\omega)$ 满足下面的'两尺度类型'的函数方程:

$$[\hat{\Phi}(\omega)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}(a^{-1}\omega)[\hat{\Phi}(a^{-1}\omega)]^{\mathrm{T}},\tag{16}$$

其中矩阵 $\boldsymbol{P}(\omega)$ 由(13)式确定. 容易知道它的每个元素都是以 $a^{M-1}\pi$ 为周期的函数.

设 $\Phi(x)=[\phi(a^0x),\phi(a^1x),\cdots,\phi(a^{(M-2)}x)]^{\mathrm{T}}$. 假设 ϕ 是M_尺度加细函数. 则由(16)式知,$S(\Phi)$ 是两尺度加细的有限平移不变空间(FSI),即,$S(\Phi)$ 满足下面的方程:

$$S(\Phi)\subset S(\Phi)^{a^{-1}}.\tag{17}$$

应用上面的"两尺度类型"的函数方程(16),分析方程(8)解的存在性,给出下面的定理:

定理 2 设 $P_m=\left\{p_{m,k}\right\}$, $m=1,2,\cdots,M-1$ 是有限支撑的面具. 定义 $C_m=a^{-m}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{m,k}$, $m=1,2,\cdots,M-1$. 如果 C_m, $m=1,2,\cdots,M-1$ 满足条件(A): $\sum_{m=1}^{M-1}C_m=1$; (B): 多项式 $q(\lambda)=\lambda^{M-2}+\sum_{m=2}^{M-1}\sum_{j=m}^{M-1}C_m\lambda^{M-m-1}$ 的所有根的绝对值小于 a, 则当 $N\to\infty$ 时, 乘积 $\prod_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 在紧支撑区间内一致收敛, 且方程(8)的解的Fourier变换具有下列形式:

$$\hat{\phi}(\omega)=[1,0,\cdots,0]\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}.\tag{18}$$

证明 条件(A)保证[1,1,…,1]是(13)式定义的矩阵 $(1/a)\boldsymbol{P}(0)$ 关于特征值1的特征向量. 可以看出矩阵 $\boldsymbol{P}(0)$ 的特征多项式为 $(\lambda-1)q(\lambda)$. 因此,矩阵 $\boldsymbol{P}(0)$ 的所有特征值(除特征值1外)均为多项式 $q(\lambda)$ 的根. 再由条件(B)知矩阵 $\boldsymbol{P}(0)$ 的谱半径小于等于 a, 即矩阵 $(1/a)\boldsymbol{P}(0)$ 的谱半径小于等于1.

应用文献[2]~[5],可以证明当 $N\to\infty$ 时,乘积 $\prod_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 在紧支撑区间内一致收敛. 下面证明(18)式定义的 $\hat{\phi}(\omega)$ 是多_尺度加细方程(8)的解的Fourier变换.

由于无穷乘积 $\prod_{k=1}^{\infty}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 一致收敛,则有

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}=$$
$$[\hat{\phi}(a^{0}\omega),\hat{\phi}(a^{-1}\omega),\hat{\phi}(a^{-2}\omega),\cdots,\hat{\phi}(a^{-(M-2)}\omega)],$$

因此,

$$\hat{\phi}(\omega)=[1,0,\cdots,0]\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}=$$
$$[1,0,\cdots,0]\boldsymbol{P}(a^{-1}\omega)\lim_{N\to\infty}\prod_{k=2}^{N}\boldsymbol{P}(a^{-k}\omega)[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}=$$
$$[1,0,\cdots,0]\boldsymbol{P}(a^{-1}\omega)[\hat{\phi}(a^{-1}\omega),\hat{\phi}(a^{-2}\omega),\cdots,\hat{\phi}(a^{-(M-1)}\omega)]^{\mathrm{T}}=$$
$$\sum_{m=1}^{M-1}P_m(a^{-m}\omega)\hat{\phi}(a^{-m}\omega),$$

这意味着 ϕ 是多_尺度加细方程(8)的解,从而完成定理2的证明.

应用定理 2, 可以得到下面的定理:

定理 3　假设多_尺度加细方程(8) 的解有一个可积解 $f(x)$. 设 $P_m = \{p_{m,k}\}$, $m = 1, 2, \ldots, M-1$ 是有限的加细面具. 定义 $C_m = a^{-m}\sum_{k\in\mathbf{Z}} p_{m,k}$, $m = 1, 2, \ldots, M-1$. 如果存在一个非负整数 n, 使得 $\sum_{m=1}^{M-1} C_m = a^n$, 则用 $\{a^{-mn}p_{m,k}\}$, $m = 1, 2, \ldots, M-1$ 代替 $\{p_{m,k}\}$ 得到新的 M_尺度加细方程

$$\phi(x) = \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{k=N_1}^{N_2} a^{-mn}p_{m,k}\phi(a^m x - k)$$

有非零的可积解 g, 且满足

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} g(x) = f(x), \qquad \text{a. e.}$$

根据文献[13], 可以得到

$$\mathrm{supp}(\phi) \subseteq \left\langle \bigcup_{m=1}^{M-1} \frac{1}{a^m - 1}\mathrm{supp}(P_m) \right\rangle, \tag{19}$$

其中 $\langle X\rangle$ 表示 $X \subset \mathbf{R}$ 的凸包.

3　正交的多_尺度加细函数

下面研究正交的多_尺度加细函数. 首先给出正交多_尺度加细函数的定义.

定义 3　如果 M_尺度加细函数 $\phi(x)$ 满足

$$\langle \phi(a^i x - k), \phi(a^j x - l)\rangle = \delta_{i,j}\,\delta_{k,l}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, M-2;\ k, l \in \mathbf{Z}, \tag{20}$$

则称 M_尺度加细函数 $\phi(x)$ 是正交的.

通过应用(9) 式定义的 $M-1$ 个面具 $P_m(\omega)$, 得到伸缩因子为 a 的多_尺度加细函数是正交的充分必要条件.

定理 4　设 ϕ 是满足(8) 式的 M_尺度加细函数, 它的 $M-1$ 个面具 $P_m(\omega)$, $m = 1, 2, \ldots, M-1$. 则下列叙述是等价的.

1) ϕ 是正交的多_尺度加细函数.

2) $\phi(\omega)$ 满足下方程:

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}} \phi\left(\frac{\omega + 2a\pi l}{a^i}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega + 2a\pi l}{a^j}\right)} = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{21}$$

3) 定义线性算子 Θ

$$(\Theta \boldsymbol{F})(\omega) = \sum_{j=0}^{a-1} \boldsymbol{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi j+\omega)/a})\boldsymbol{F}\left(\frac{\omega + 2\pi j}{a}\right)\boldsymbol{P}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\pi j+\omega)/a})^*, \tag{22}$$

其中 $(\Theta\boldsymbol{F})$ 是定义在 2π 周期的连续函数为元素构成全体矩阵上. 则 $\boldsymbol{I}_{M-1}$ 是算子 Θ 的唯一的不动点, 其中 $\boldsymbol{P}(\omega)$ 是由(13) 式定义的矩阵.

证明 1) $\Leftrightarrow$ 2): 由于 ϕ 是一个正交的多_尺度加细函数, 则向量函数 $\Phi(x) = [\phi(a^0x), \phi(a^1x), \ldots, \phi(a^{(M-2)}x)]^{\mathrm{T}}$ 是一个正交的两尺度加细函数. 因此, $\Phi(x)$ 是一个正交的向量多尺度函数的充分必要的条件是它的自相关符号满足

$$S_\Phi = \sum_{l\in\mathbf{Z}} \Phi\left(\frac{\omega}{a} + 2\pi l\right)\Phi\left(\frac{\omega}{a} + 2\pi l\right)^* = \boldsymbol{I}_{M-1}.$$

其中,

$$S_\Phi = \sum_{l\in\mathbf{Z}}\left[\phi\left(\frac{\omega+2\pi l}{a}\right), \phi\left(\frac{\omega+2\pi l}{a^2}\right), \cdots, \phi\left(\frac{\omega+2\pi l}{a^{M-1}}\right)\right]^{\mathrm{T}}\times$$
$$\left[\phi\left(\frac{\omega+2\pi l}{a}\right)^*, \phi\left(\frac{\omega+2\pi l}{a^2}\right)^*, \cdots, \phi\left(\frac{\omega+2\pi l}{a^{M-1}}\right)^*\right]=$$
$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\begin{bmatrix} \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a}\right)} & \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^2}\right)} & \cdots & \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^{M-1}}\right)} \\ \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^2}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a}\right)} & \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^2}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^2}\right)} & \cdots & \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^2}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^{M-1}}\right)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^{M-1}}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a}\right)} & \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^{M-1}}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^2}\right)} & \cdots & \phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^{M-1}}\right)\overline{\phi\left(\frac{\omega+2a\pi l}{a^{M-1}}\right)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_{M-1}\cdot$$

则比较上式两边的各项得到(21)式• 应用文献[4],可以证明其余的结论•

如果 ϕ 是一个正交的M_尺度加细函数,根据(22)式,则 $M-1$ 个面具 $P_m(\omega)$, $m=1,2,\cdots,M-1$ 一定满足下列方程:

$$\sum_{j=0}^{a-1}\sum_{k=1}^{M-1}\left|P_k(e^{-\mathrm{i}(a\omega+2j\pi)/a^k})\right|^2=1,\quad \sum_{j=0}^{a-1}P_k(e^{-\mathrm{i}(a\omega+2j\pi)/a^k})=0,$$
$$k=1,2,\cdots,M-2\cdot \tag{23}$$

由于 $S(\Phi)$ 是一个 FSI 空间,所以对任何$f(x)\in S(\Phi)$,有

$$f(x)=\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{m,k}\phi(a^m x-k)\cdot$$

如果 ϕ是一个正交的M_尺度加细函数,则 $c_{m,k}=\langle f(x),\phi(a^m x-k)\rangle$, $m=1,2,\cdots,M-1$; $k\in\mathbf{Z}$,即

$$f(x)=\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\langle f(x),\phi(a^m x-k)\rangle\phi(a^m x-k)\cdot$$

4 多_尺度加细函数的性质

显然任意两尺度加细函数可以满足很多不同的多_尺度函数方程• 换句话说,任意两尺度加细函数一定是一个多_尺度函数• 反之不真• 下面给出多_尺度加细函数具有两尺度关系的充分条件•

定理 5 设 $\phi\in L^1(\mathbf{R})$ 是一个满足(8)式的多_尺度加细函数,且具有 $M-1$ 个面具 $P_m(\omega)$, $m=1,2,\cdots,M-1$,其中$M\geqslant 3$• 如果ϕ也是一个两尺度加细函数,且满足两尺度关系 $\hat\phi(\omega)=\tau(a^{-1}\omega)\hat\phi(a^{-1}\omega)$,其中 τ 是一个$a\pi$_周期的函数• 则 τ 满足下面的方程

$$\prod_{m=1}^{M-1}\tau(a^{-m}\omega)=\sum_{m=1}^{M-1}\left(\prod_{j=m+1}^{M-1}\tau(a^{-j}\omega)P_m(a^{-j}\omega)\right)\cdot \tag{24}$$

证明　由于 ϕ 满足 $\hat{\phi}(\omega)=\tau(a^{-1}\omega)\hat{\phi}(a^{-1}\omega)$，则

$$\hat{\phi}(a^{-m}\omega)=\hat{\phi}(a^{-(M-1)}\omega)\prod_{j=m+1}^{M-1}\tau(a^{-j}\omega),\qquad m=0,1,\cdots,M-2. \tag{25}$$

特别地，

$$\hat{\phi}(\omega)=\hat{\phi}(a^{-(M-1)}\omega)\prod_{j=1}^{M-1}\tau(a^{-j}\omega). \tag{26}$$

考虑公式(9)、(25)和(26)．得到

$$\hat{\phi}(\omega)=\hat{\phi}(a^{-(M-1)}\omega)\prod_{j=1}^{M-1}\tau(a^{-j}\omega)=\hat{\phi}(a^{-(M-1)}\omega)\left(\prod_{j=m+1}^{M-1}\tau(a^{-j}\omega)P_m(a^{-j}\omega)\right).$$

又由于 ϕ 的 Fourier 变换是连续的且不恒等于零，这意味着公式(24)成立．

设 $\phi(x)$ 是伸缩因子为 a^n, $n\in\mathbf{Z}_+$ 的加细函数，满足下面方程

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k\phi(a^nx-k),\ H(\omega)=a^{-n}\sum_{k\in\mathbf{Z}}h_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}. \tag{27}$$

推论 1　设 $\phi(x)$ 是伸缩因子为 a^n, $n\in\mathbf{Z}_+$ 的加细函数，满足方程(27)．由(27)式定义的 $H(\omega)$ 是 ϕ 的面具．如果 ϕ 是伸缩因子为 a 的加细函数，满足方程

$$\hat{\phi}(\omega)=\tau(a^{-1}\omega)\hat{\phi}(a^{-1}\omega),$$

则 τ 满足下面的方程

$$\prod_{m=1}^{n-1}\tau(a^{-m}\omega)=\tau(a^{-(M-1)}\omega)H(a^{-(M-1)}\omega). \tag{28}$$

多_尺度加细函数可以拥有许多有很好的性质，而两尺度加细函数却未必具有．文献[11]通过不同的两尺度加细样条函数构造出一类多_尺度加细函数．下面我们给出多_尺度加细函数的卷积构造方法．即由一个多_尺度加细函数和一个两尺度加细函数的卷积构造出新的多_尺度加细函数．

定理 6　设 $\phi\in L^1(\mathbf{R})$ 是(8)式定义的 M_尺度加细函数，且具有面具 $\{P_m\}$, $m=1,2,\cdots,M-1$．设 $\rho\in L^1(\mathbf{R})$ 是(4)式定义的两尺度加细函数，(5)式定义的 $P(\omega)$ 为其对应的面具．则卷积 $\phi*\rho$ 是一个新的 M_尺度加细函数，具有的面具为

$$P_m(\omega)=P_m(\omega)\prod_{n=1}^{m-n}P(a^{m-n}\omega),\qquad m=1,2,\cdots,M-1. \tag{29}$$

证明　由于 $\widehat{\phi*\rho}=\hat{\phi}\hat{\rho}$，则

$$\widehat{\phi*\rho}(\omega)=\sum_{m=1}^{M-1}P_m(a^{-m}\omega)\hat{\phi}(a^{-m}\omega)P(a^{-1}\omega)\hat{\rho}(a^{-1}\omega)=$$

$$\sum_{m=1}^{M-1}P_m(a^{-m}\omega)\left(\prod_{n=1}^{m}P(a^{-n}\omega)\right)\hat{\phi}(a^{-m}\omega)\hat{\rho}(a^{-m}\omega)=$$

$$\sum_{m=1}^{M-1}P_m(a^{-m}\omega)\left(\prod_{n=1}^{m}P(a^{-n}\omega)\right)\widehat{\phi*\rho}(a^{-m}\omega).$$

上式意味着 $\phi*\rho$ 是一个 M_尺度加细函数，对应的面具满足(29)式．

推论 2　设 $\phi_i\in L^1(\mathbf{R})$, $i=1,2$ 是两个两尺度加细函数，分别具有面具为 $P^i(\omega)$, $i=1,2$．则卷积 $\phi_1*\phi_2$ 仍是两尺度加细函数，且对应的面具为

$$P(\omega)=P^1(\omega)P^2(\omega).$$

证明　由于两尺度加细函数是特殊的多_尺度加细函数．因此根据定理 6 可以完成推论 2

的证明•

由定理 6 和推论 2, 可以得到更一般的结果•

推论 3 设 $\phi\in L^1(\mathbf{R})$ 是(8) 式定义的 M_尺度加细函数, 且具有面具 $\{P_m\}$, $m=1,2,\cdots,M-1$• 设 $\rho_i\in L^1(\mathbf{R})$, $i=1,2,\cdots,k$ 是 k 个两尺度加细函数, 对应的面具分别为 $P^i(\omega)$, $i=1,2,\cdots,k$• 则卷积 $\phi*\rho_1*\rho_2*\cdots*\rho_k$ 仍是 M_尺度加细函数, 且对应的面具为

$$P_m(\omega)=P_m(\omega)\prod_{n=1}^{M-1}\prod_{i=1}^{k}P^i(a^{m-n}\omega),\qquad m=1,2,\cdots,M-1•$$

5 多_尺度加细函数的构造算例

下面给出一些构造算例•

例 1 设 $M=3$• 假设 $P_m=\{p_{m,k},k\in\mathbf{Z}\}$, $m=1,2$ 是有限支撑的面具• 如果

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{1,k}=1,\ \sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2,k}=6,$$

则通过计算得 $C_1=1/3$, $C_2=2/3$• 因此 C_m, $m=1,2$ 满足定理 2 中的条件(A) 和条件(B)• 根据定理 2, 方程

$$\phi(x)=\sum_{m=1}^{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{m,k}\phi(3^mx-k)$$

有一个紧支撑解, 其解为伸缩因子为 3 的 3_尺度加细函数•

例 2 文献[14] 构造出大量的伸缩因子为 3 的两尺度加细函数• 如两尺度方程

$$\rho(x)=\frac{2-\sqrt{6}}{4}\rho(3x)+\frac{1}{2}\rho(3x-1)+\frac{2+\sqrt{6}}{4}\rho(3x-2)+\frac{2+\sqrt{6}}{4}\rho(3x-3)+\frac{1}{2}\rho(3x-4)+\frac{2-\sqrt{6}}{4}\rho(3x-5)$$

的解是一个伸缩因子为 3 的两尺度加细函数• 在例 1 中, 我们构造出伸缩因子为 3 的 3_尺度加细函数 ϕ• 根据定理 6, 卷积 $\phi*\rho$ 构成一个新的 3_尺度加细函数, 其对应的面具可由(29) 式给出•

[参 考 文 献]

[1] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets[J]. Comm Pure Appl Math, 1988, **41**(7): 909—996.

[2] Daubechies I, Lagarias J C. Two_scale difference equations Ⅰ —Existence and global regularity of solutions[J]. SIAM J Math Anal, 1991, **22**(5): 1388—1410.

[3] Chui C K, LIAN Jian_ao. A study on orthonormal multiwavelets[J]. J Appl Numer Math, 1996, **20**(3): 273—298.

[4] Lian J. Orthogonal criteria for multiscaling functions[J]. Appl Comput Harmon Anal, 1998, **5**(3): 277—311.

[5] YANG Shou_zhi, CHENG Zheng_xing, WANG Hong_yong. Construction of biorthogonal multiwavelets [J]. J Math Anal Appl, 2002, **276**(1): 1—12.

[6] YANG Shou_zhi. A fast algorithm for constructing orthogonal multiwavelets[J]. ANZIAM Journal, 2004, **46**(2): 185—202.

[7] Cabrelli A C, Gordillo M L. Existence of multiwavelets in R^n[J]. Proc Amer Math Soc, 2002, **130**(5): 1413—1424.

[8] Dyn N, Levin D. Subdivision schemes in geometric modelling[J]. Acta Numer, 2002, **11**(1): 73—144.

[9] Cohen A, Dyn N, Matei B. Quasilinear subdivision schemes with applications to ENO interpolation [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2003, **15**(2): 89—116.

[10] Dekel S, Leviatan D. Wavelet decompositions of nonrefinable shift invariant spaces[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2002, **12**(2): 230—258.

[11] Blu T, Thvenaz P, Unser M. MOMS: Maximal_order interpolation of minimal support[J]. IEEE Trans Image Process, 2001, **10**(7): 1069—1080.

[12] Dekel S, Dyn N. Poly_scale refinablity and subdivision[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2002, **13**(1): 35—62.

[13] YANG Shou_zhi, YANG Xiao_zhong. Computation of the support of multiscaling functions[J]. Chinese J Numer Math Appl, 2005, **27**(2): 1—8.

[14] PENG Li_zhong, WANG Yong_ge. Parameterization and algebraic structure of 3_band orthogonal wavelet systems[J]. Sci China Ser A, 2001, **44**(12): 1531—1543.

Poly_Scale Refinable Function and Their Properties

YANG Shou_zhi

(Department of Mathematics, Shantou University, Shantou, Guangdong 515063, P. R. China)

Abstract: Poly_scale refinable function with dilation factor a was introduced. The existence of solutions of poly_scale refinable equation was investigated. Specially, necessary and sufficient conditions for the orthonormality of solution function phi of a poly_scale refinable equation with integer dilation factor a were established. Some properties of poly_scale refinable function were discussed. Several examples illustrating how to use the method to construct poly_scale refinable function were given.

Key words: poly_scale function; dilation factor; poly_scale refinable equation