

轴向变速运动粘弹性弦线横向振动的复模态 Galerkin 方法*

张能辉^{1,2}, 王建军¹, 程昌钧^{1,2}

(1. 上海大学 理学院 力学系, 上海 200444;

2. 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

摘要: 在考虑初始张力和轴向速度简谐涨落的情况下, 利用含预应力三维变形体的运动方程, 建立了轴向变速运动弦线横向振动的非线性控制方程, 材料的粘弹性行为由 Kelvin 模型描述. 利用匀速运动线性弦线的模态函数构造了变速运动非线性弦线复模态 Galerkin 方法的基底函数, 并借助构造出来的基底函数研究了复模态 Galerkin 方法在轴向变速运动粘弹性弦线非线性振动分析中的应用. 数值结果表明, 复模态 Galerkin 方法相比实模态 Galerkin 方法对变系数陀螺系统有较高的收敛速度.

关键词: 轴向变速运动弦线; 粘弹性; 横向非线性振动; 复模态 Galerkin 方法; 几何非线性

中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

轴向运动弦线是许多工程系统的重要组成部分. 自 1897 年 Skutch 的开创性工作以来, 许多文献对轴向运动弦线的横向振动作了研究^[1]. 近年来, 随着研究问题的日益复杂化和模型的非线性特征, 半解析法和数值方法成为重要的研究工具, 如多重尺度法^[2,3]、差分法^[4,5], 有限元法^[6], Laplace 变换法^[7]和 Galerkin 方法^[8,13]. 对于实模态 Galerkin 方法, 从本质上讲, 只要选取满足边界条件的基底函数即可, 但为了提高级数解的收敛速度, 往往选用静态线性弦线的模态函数作为基底函数; 对于复模态 Galerkin 方法来说, 基底函数通常选用运动线性弦线的模态函数, 不但要满足边界条件, 而且又要符合陀螺系统算子的特殊正交性要求. 数值结果表明, 利用复模态 Galerkin 方法可以获得低阶高精度的离散模型. 有关轴向匀速运动粘弹性弦线的实模态 Galerkin 方法^[8,9]和复模态 Galerkin 方法^[10,11]有了比较深入的研究. 但对于轴向变速运动弦线的非线性振动问题, 由于无法获得对应变系数线性微分系统特征根和特征向量, 所

* 收稿日期: 2005_10_21; 修订日期: 2006_10_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472060); 上海市重点学科建设项目资助项目(Y0103); 上海市自然科学基金资助项目(04ZR14058); 上海高校优秀青年教师后备人选科研资助项目(04YQHB088)

作者简介: 张能辉(1970—), 男, 河北人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_21_66134790; Fax: + 86_21_66134021; E_mail: nhzhang@shu.edu.cn).

以无法采用复模态 Galerkin 方法, 而目前只能采用实模态 Galerkin 方法^[12,13]。

本文致力于研究轴向变速运动粘弹性弦线横向振动的复模态 Galerkin 方法。首先在考虑初始张力和轴向速度简谐涨落的情况下, 利用含预应力三维变形体的运动平衡方程, 建立了轴向变速运动弦线非线性横向振动的控制方程, 材料的粘弹性行为由微分型 Kelvin 模型描述。其次, 利用匀速运动线性弦线的模态函数构造了变速运动非线性弦线复模态 Galerkin 方法的基底函数, 而该基底函数既满足边界条件, 又保持了对于变系数陀螺系统算子的正交性, 因为算子的正交性只与空间坐标有关, 与时间坐标无关。最后利用 Mathematica 软件对各阶 Galerkin 截断系统进行了推导和数值求解, 在轴向匀速运动弦线的线性横向振动分析中, 比较了复模态 Galerkin 数值解和已有复模态解析解的差别; 在轴向匀速或变速运动粘弹性弦线的非线性横向振动分析中, 比较了复模态 Galerkin 数值解和实模态 Galerkin 数值解的差别。

1 数学模型及其简化

考察轴向运动粘弹性弦线的横向振动问题。设均质弦密度为 ρ , 截面积为 A , 初始张力为 T , 在相距为 L 的两个边界间以速度 $x_{,t}$ 沿轴向运动。仅考虑 y 方向上的横向位移 $V(x, t)$, 其中 t 为时间, x 为轴向坐标。由含预应力三维变形体的运动方程^[14]得

$$\left(\frac{T}{A} + \sigma \right) V_{,xx} + V_{,x} \sigma_{,x} = \rho \frac{d^2 V}{dt^2}, \quad (1)$$

这里 x, y 为 Lagrange 坐标系, σ 为轴向应力。弦线材料的应力和应变的关系符合以下 Kelvin 模型

$$\sigma(x, t) = E_0 \varepsilon(x, t) + \eta \varepsilon_{,t}(x, t), \quad (2)$$

其中, E_0 为弹性模量, η 为动态粘度。轴向拉格朗日应变和横向位移的关系由下式给出

$$\varepsilon(x, t) = (1/2) V_{,x}^2(x, t). \quad (3)$$

将(2)式、(3)式代入(1)式可以得到控制方程为

$$\begin{aligned} \rho V_{,tt} + 2\alpha_{,t} V_{,xt}(x, t) + (\alpha_{,t}^2 - T/A) V_{,xx}(x, t) + x_{,t} V_{,x}(x, t) = \\ (3/2) E_0 V_{,x}^2(x, t) V_{,xx}(x, t) + (1/2) \eta [V_{,x}^2(x, t)]_{,t} V_{,xx}(x, t) + \\ \eta V_{,x}(x, t) [V_{,x}(x, t) V_{,xx}(x, t)]_{,t}, \end{aligned} \quad (4)$$

这里弦线的初始张力为 $T = T_0 + T_1 \cos \Omega t$, 轴向速度 $x_{,t} = c_0 + c_1 \cos \Psi t$, 其中, Ω, Ψ 分别为张力和轴向速度周期变化的频率。

若引入以下无量纲参数和变量

$$\begin{aligned} v = \frac{V}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \alpha = \frac{T_1}{T_0}, \quad E_e = \frac{E_0 A}{T_0}, \quad E_v = \frac{\eta}{L} \sqrt{\frac{A}{\rho T_0}}, \\ v_0 = c_0 \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}}, \quad v_1 = c_1 \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}}, \quad \omega = \Omega \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}}, \quad \phi = \Psi \sqrt{\frac{\rho A}{T_0}}, \quad v(\tau) = v_0 + v_1 \cos(\phi \tau), \end{aligned}$$

则(4)式可化为

$$\begin{aligned} v_{,\tau\tau} + 2(v_0 + v_1 \cos(\phi \tau)) v_{,\xi\tau} + [(v_0 + v_1 \cos(\phi \tau))^2 - 1 - \alpha \cos(\omega \tau)] v_{,\xi\xi} - \\ \phi v_1 \cos(\phi \tau) v_{,\xi} - (3/2) E_e v_{,\xi} v_{,\xi\xi} - (1/2) E_v (v_{,\xi}^2)_{,\tau} v_{,\xi\xi} - v_{,\xi} E_v (v_{,\xi} v_{,\xi\xi}), \quad \tau = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

若定义 $\mathbf{w} = \{u, v\}^T = \{v, \tau, v\}^T$, 则方程(5)可化为以下等价的算子方程

$$\mathbf{A}(\tau) \mathbf{w}_{,\tau} + \mathbf{B}(\tau) \mathbf{w} - \mathbf{C}(\tau) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}(\tau) &= \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [(y_0 + y_1 \cos(\phi\tau))^2 - 1] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{Bmatrix}, \\
 \mathbf{B}(\tau) &= \begin{Bmatrix} 2(y_0 + y_1 \cos(\phi\tau)) \frac{\partial}{\partial \xi} & [(y_0 + y_1 \cos(\phi\tau))^2 - 1] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ [1 - (y_0 + y_1 \cos(\phi\tau))^2] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & 0 \end{Bmatrix}, \\
 \mathbf{C}(\tau) &= \begin{Bmatrix} E_v \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} & \left[\alpha \cos(\omega\tau) + \frac{3}{2} E_e \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 + 2E_v \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \\ 0 & -\phi y_1 \sin(\phi\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \end{Bmatrix},
 \end{aligned}$$

显然 $\mathbf{A}(\tau)$ 是对称算子, $\mathbf{B}(\tau)$ 是反对称算子, $\mathbf{C}(\tau)$ 是非线性算子, 因此(6)式是一个变系数的陀螺系统. 当 $y_1 = 0$ 时, (6)式退化为匀速运动弦线横向振动的控制方程, 其对应的齐次线性化系统为

$$\mathbf{A}w_{,\tau} + \mathbf{B}w = \mathbf{0}, \quad (7)$$

这里 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是与时间变量无关的算子. 若定义内积 $\langle w_1, w_2 \rangle = \int_0^1 w_1^T w_2 dx$, Meirovitch 已证明(7)式的特征值 λ_n 和特征向量 Φ_n 具有以下性质^[15]: 首先, $\lambda_n = i\omega_n$, 其中 ω_n 为实的振动频率, $i = \sqrt{-1}$. 其次, 复数 Φ_n 具有如下结构

$$\Phi_n(\xi) = \Phi_n^R(\xi) + i\Phi_n^I(\xi), \quad \Phi_n^R(\xi) = \begin{Bmatrix} -\omega_n \Phi_n^I(\xi) \\ \Phi_n^R(\xi) \end{Bmatrix}, \quad \Phi_n^I(\xi) = \begin{Bmatrix} \omega_n \Phi_n^R(\xi) \\ \Phi_n^I(\xi) \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

这里, $\Phi_n(\xi) = \Phi_n^R(\xi) + i\Phi_n^I(\xi)$ 是与位移场 v 有关的法化标量形式的特征函数, $\Phi_n^R(\xi)$, $\Phi_n^I(\xi)$ 是实的. 第三, Φ_n 满足如下正交法化条件

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A} \Phi_n^R, \Phi_m^R \rangle = \delta_{nm}, & \langle \mathbf{A} \Phi_n^I, \Phi_m^I \rangle = \delta_{nm}, & \langle \mathbf{A} \Phi_n^R, \Phi_m^I \rangle = \langle \mathbf{A} \Phi_n^I, \Phi_m^R \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{B} \Phi_n^R, \Phi_m^R \rangle = 0, & \langle \mathbf{B} \Phi_n^I, \Phi_m^I \rangle = 0, & \langle \mathbf{B} \Phi_n^R, \Phi_m^I \rangle = -\langle \mathbf{B} \Phi_n^I, \Phi_m^R \rangle = \omega_n \delta_{nm}. \end{cases} \quad (9)$$

对于固定端边界条件, 线性化系统(7)的特征频率为 $\omega_n = n\pi(1 - y_0^2)$, 特征函数为

$$\begin{cases} \Phi_n^R(\xi) = \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - y_0^2}} \sin(n\pi\xi) \cos(y_n\pi\xi), \\ \Phi_n^I(\xi) = \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - y_0^2}} \sin(n\pi\xi) \sin(y_n\pi\xi). \end{cases} \quad (10)$$

现考察如下展开

$$w(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^R(\tau) \Phi_n^R(\xi, \tau) + q_n^I(\tau) \Phi_n^I(\xi, \tau)], \quad (11)$$

作为方程(6)的级数解. 分量 $q_n^R(\tau)$ 和 $q_n^I(\tau)$ 为广义实坐标, 基底函数取为

$$\begin{cases} \Phi_n^R(\xi, \tau) = \begin{Bmatrix} -\omega_n \Phi_n^I(\xi, \tau) \\ \Phi_n^R(\xi, \tau) \end{Bmatrix}, & \Phi_n^R(\xi, \tau) = \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - [y(\tau)]^2}} \sin(n\pi\xi) \cos(y_n\pi\xi), \\ \Phi_n^I(\xi, \tau) = \begin{Bmatrix} \omega_n(\tau) \Phi_n^R(\xi, \tau) \\ \Phi_n^I(\xi, \tau) \end{Bmatrix}, & \Phi_n^I(\xi, \tau) = \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{1 - [y(\tau)]^2}} \sin(n\pi\xi) \sin(y_n\pi\xi). \end{cases} \quad (12)$$

其中, $\omega_n(\tau) = n\pi \sqrt{1 - [y(\tau)]^2}$. 于是不难证明, 算子 $\mathbf{A}(\tau)$ 和 $\mathbf{B}(\tau)$ 具有如下性质

$$\begin{cases} \langle \mathbf{A}(\tau) \Phi_n^R(\tau), \Phi_m^R(\tau) \rangle = \delta_{nm}, \langle \mathbf{A}(\tau) \Phi_n^I(\tau), \Phi_m^I(\tau) \rangle = \delta_{nm}, \\ \langle \mathbf{A} \Phi_n^R(\tau), \Phi_m^I(\tau) \rangle = \langle \mathbf{A} \Phi_n^I(\tau), \Phi_m^R(\tau) \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{B}(\tau) \Phi_n^R(\tau), \Phi_m^R(\tau) \rangle = 0, \langle \mathbf{B}(\tau) \Phi_n^I(\tau), \Phi_m^I(\tau) \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{B} \Phi_n^R(\tau), \Phi_m^I(\tau) \rangle = - \langle \mathbf{B} \Phi_n^I(\tau), \Phi_m^R(\tau) \rangle = \omega_n(\tau) \delta_{nm}. \end{cases} \quad (13)$$

利用(11)式至(13)式对非线性方程(6)作 Galerkin 截断,得

$$\begin{cases} \dot{q}_n^R(\tau) = \omega_n(\tau) q_n^I(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^R(\tau) b_{ni}^{RR}(\tau) + q_n^I(\tau) b_{ni}^{IR}(\tau)], \\ \dot{q}_n^I(\tau) = - \omega_n(\tau) q_n^R(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^R(\tau) b_{ni}^{RI}(\tau) + q_n^I(\tau) b_{ni}^{II}(\tau)], \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} b_{ni}^{ab}(\tau) &= \langle \mathbf{C}(\tau) \Phi_n^a(\xi, \tau), \Phi_n^b(\xi, \tau) \rangle, \quad a, b = R, I, \\ \mathbf{C}(\tau) \Phi_n^R(\xi, \tau) &= \left\{ - \omega_n(\tau) E_v \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \right]^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^R(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \left[\alpha \cos \omega \tau + \frac{3}{2} E_e \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \right]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2E_v \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2 \Phi_n^R(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \phi_{V1} \sin(\phi \tau) \frac{\partial \Phi_n^R(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right\}, \\ \mathbf{C}(\tau) \Phi_n^I(\xi, \tau) &= \left\{ \omega_n(\tau) E_v \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \right]^2 \frac{\partial^2 \Phi_n^I(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \left[\alpha \cos \omega \tau + \frac{3}{2} E_e \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} \right]^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2E_v \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right] \frac{\partial^2 \Phi_n^I(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \phi_{V1} \sin(\phi \tau) \frac{\partial \Phi_n^I(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right\}, \end{aligned}$$

这里需要指出的是,本文利用匀速运动线性弦线模态函数构造了变速运动粘弹性弦线复模态 Galerkin 方法的基底函数,与目前常用的实模态 Galerkin 方法^[12,13]相比,该基底函数既满足边界条件,又保持了关于变系数陀螺系统算子的正交性,因为算子 $\mathbf{A}(\tau)$ 和 $\mathbf{B}(\tau)$ 的正交性只与空间坐标有关,与时间坐标无关. 通过这种性质的基底函数近似求解轴向变速运动弦线横向振动响应的方法,称之为复模态 Galerkin 方法.

Meirovitch 已给出了轴向匀速运动弦线线性振动的复模态解析解^[15]

$$w(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^R(\tau) \Phi_n^R(\xi) + \xi_n^I(\tau) \Phi_n^I(\xi), \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} \xi_n^R(\tau) = \xi_n^R(0) \cos(\omega_n \tau) + \xi_n^I(\tau) \sin(\omega_n \tau), \\ \xi_n^I(\tau) = \xi_n^I(0) \cos(\omega_n \tau) - \xi_n^R(\tau) \sin(\omega_n \tau), \end{cases} \quad (16)$$

而系统(6)的实模态 Galerkin 数值解可取为

$$v(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^R(\tau) \Phi_n^R(\xi), \quad u(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^I(\tau) \Phi_n^I(\xi), \quad \Phi_n(\xi) = \sin(n\pi\xi). \quad (17)$$

2 数值结果

首先,为了验证本文提出方法和求解程序的可靠性,表1和图1及图2中比较复模态数值解(11)式和解析解(15)式的差别. 计算时截断初值均为 $\xi_n^R(0) = 0.01$, $\xi_n^I(0) = 0.01$, $n = 1, 2, \dots, \max$, 弦的速度参数 $v_0 = 0.25$, $v_1 = 0$. 表1和图1及图2表明,复模态数值解(11)式的误差较小,显然低阶截断只能捕捉到弦线运动的基本特征,若要捕捉到更多运动细节必须采

用高阶截断

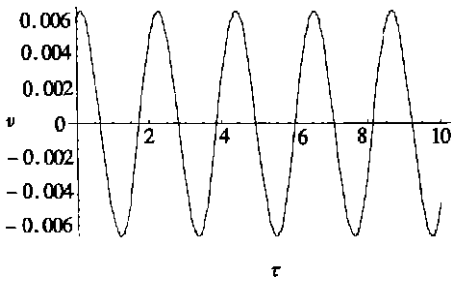
其次, 将分匀速、变速两种情况比较复模态 Galerkin 数值方法(11)式和实模态 Galerkin 数值方法(17)式对于陀螺系统非线性振动响应预测的差别。利用实模态 Galerkin 方法计算时初值取为

$$q_1[0] = 1, q_n[0] = 0, \quad n \geq 2; \quad \dot{q}_n[0] = 0, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

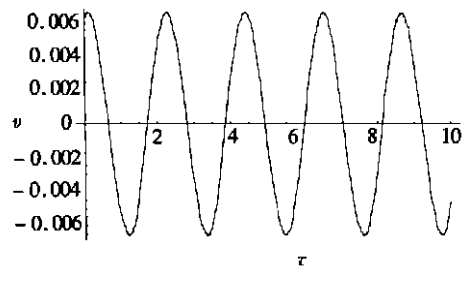
为保证两种数值解的可比性, 复模态 Galerkin 方法的初值必须利用内积定义和(18)式获得。计算中初始张力参数 $\alpha = 0$, 材料的粘弹性参数 $E_e = 400, E_v = 120$, 速度参数 $v_0 = 0.5$, 在匀速和变速运动弦线响应计算中, 速度参数分别取为 $v_1 = 0$ 和 $v_1 = 0.1$, 速度周期变化的频率 $\phi = 0.125$ 。

表 1 轴向匀速运动弦线线性振动位移值比较

	0	1	2	3	4	5
一阶解析解	0.006 074 99	- 0.005 466 9	0.004 649 21	- 0.003 652 86	0.002 516 14	- 0.001 282 72
一阶数值解	0.006 074 49	- 0.005 466 72	0.004 648 93	- 0.003 653 56	0.002 518 91	- 0.001 288 71
一阶误差 e/%	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.00
四阶解析解	0.004 049 66	- 0.003 317 35	0.003 099 48	- 0.003 225 29	0.003 354 85	- 0.003 105 01
四阶数值解	0.004 049 66	- 0.003 317 77	0.003 099 84	- 0.003 224 81	0.003 353	- 0.003 101 96
四阶误差 e/%	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.10

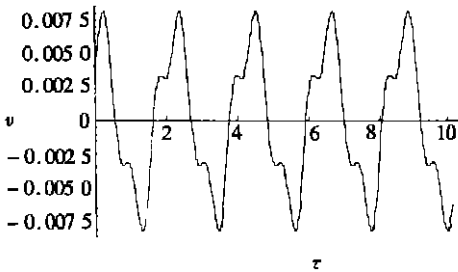


(a) 位移解析解

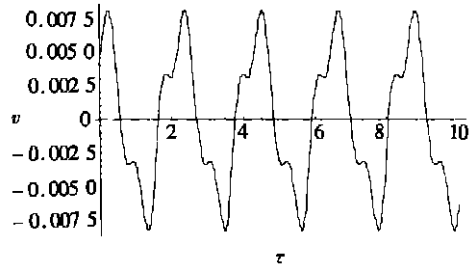


(b) 位移数值解

图 1 轴向匀速运动弦线线性振动响应的一阶截断



(a) 位移解析解



(b) 位移数值解

图 2 轴向匀速运动弦线线性振动响应的四阶截断

图 3 和图 4 表明, 对于匀速运动弦线非线性振动的实模态 Galerkin 方法, 即使是截断初值(18)式有一定的优越性, 其一阶响应与高阶的二阶、三阶、四阶响应之间还是存在着一定的差别, 例如, 当 $\tau = 10$ 时, 一阶响应的位置在初始位置 ($v = 0$) 的上方, 但二阶、三阶、四阶响应的位置却在初始位置的下方。事实上即使是高阶截断系统的初值取为 0, 也会由于系统的非线性而激励起高阶模态的响应。对于匀速运动弦线非线性振动的复模态 Galerkin 方法, 其

一阶响应与二阶响应非常接近,且低阶复模态响应逼近高阶实模态响应,例如,一阶和二阶复模态系统第一次返回初始位置的时间分别为 2.2 和 2,这与四阶实模态系统第一次返回初始位置的时间 2.1 已非常接近。因此,与实模态 Galerkin 方法比较,复模态 Galerkin 方法的收敛速度较快。

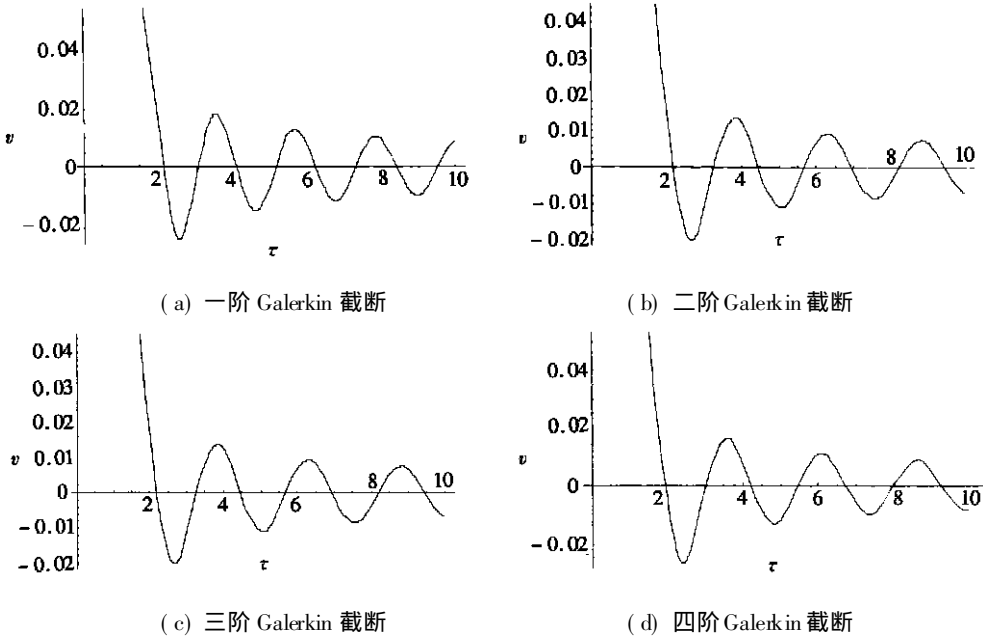


图 3 轴向匀速运动弦线非线性振动响应的实模态 Galerkin 截断

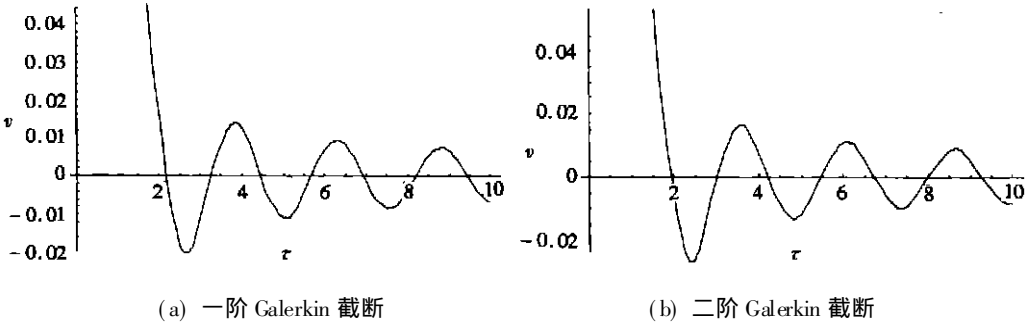


图 4 轴向匀速运动弦线非线性振动的响应复模态 Galerkin 截断

从图 5 可以看到图 3 中类似的现象,对于变速运动弦线非线性振动的实模态 Galerkin 解法,尽管高阶截断系统的初值为 0,但由于系统的高度非线性也会激励起高阶模态的响应,造成其一阶截断系统响应与高阶截断系统响应之间差别较大,例如,当 $\tau = 10$ 时,一阶响应的位置在初始位置 ($v = 0$) 的上方,但二阶、三阶、四阶响应的位置却在初始位置的下方。图 6 给出了轴向变速运动弦线非线性振动响应的一阶复模态 Galerkin 数值解,显然它已逼近实模态三阶和四阶系统的响应,例如,一阶复模态系统第一次返回初始位置的时间 2.1 与三阶、四阶实模态系统第一次返回初始位置的时间 2.1, 2 非常接近。

3 结 论

首先在考虑初始张力和轴向速度简谐涨落的情况下,本文利用含预应力三维变形体的运动平衡方程,建立了轴向变速运动弦线非线性横向振动的控制方程(4),材料的本构关系由

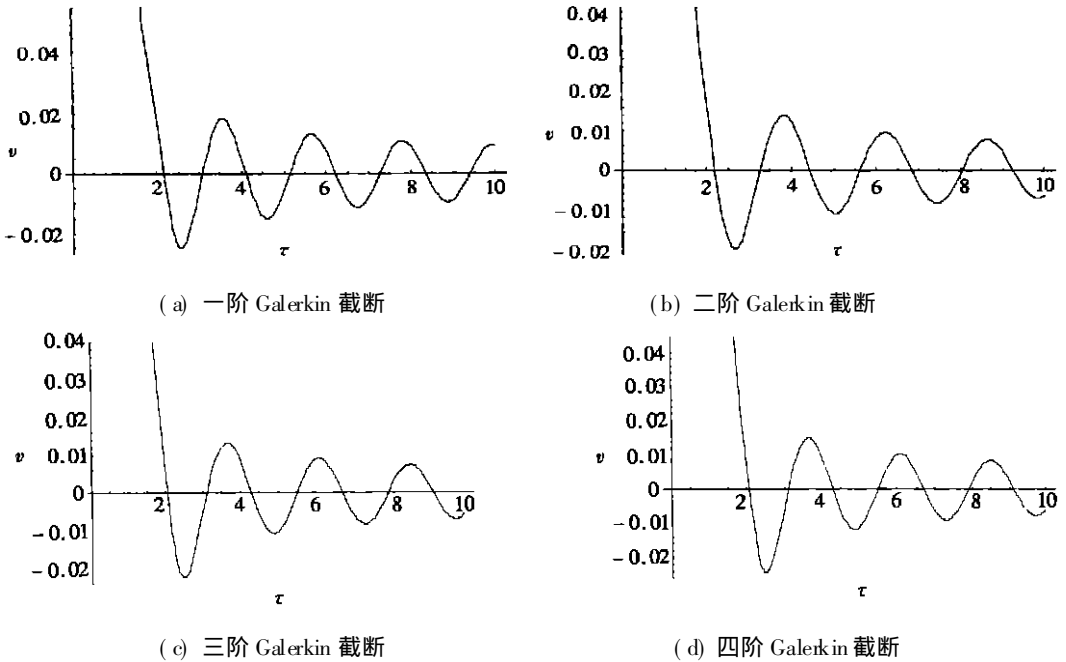


图5 轴向变速运动弦线非线性振动响应的实模态 Galerkin 截断

粘弹性 Kelvin 模型(2)式描述。其次,利用匀速运动线性弦线的模态函数(10)式构造了变速运动非线性弦线复模态 Galerkin 方法的基底函数(12)式,并采用该基底函数研究了复模态 Galerkin 方法在轴向变速运动粘弹性弦线的非线性横向振动分析中的应用。最后,利用 Mathematica 软件对各阶 Galerkin 截断系统进行了推导和数值求解。在轴向匀速运动弦线线性振动分析中,比较了复模态 Galerkin 数值解(11)式和已有复模态解析解(17)

式的差别,两者结果吻合良好;在轴向匀速或变速运动弦线的非线性振动分析中,比较了复模态 Galerkin 数值解(11)式和实模态 Galerkin 数值解(15)式的差别。数值结果表明,复模态 Galerkin 方法相比实模态 Galerkin 方法对变速度陀螺系统有较高的收敛速度,低阶复模态 Galerkin 数值解可以逼近高阶实模态 Galerkin 数值解。

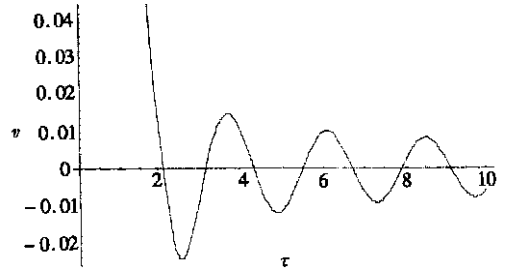


图6 轴向变速运动弦线非线性振动响应的一阶复模态 Galerkin 截断

[参 考 文 献]

- [1] 陈立群, Zu J W. 轴向运动弦线的纵向振动及其控制[J]. 力学进展, 2001, 31(4): 535_546.
- [2] Pakdemirli M, Ulsoy A G. Stability analysis of an axially accelerating string[J]. J Sound Vib, 1997, 203(5): 815_832.
- [3] 吴俊, 陈立群. 轴向变速运动弦线的非线性振动的稳态响应及其稳定性[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(9): 917_926.
- [4] 周洪刚, 朱凌, 郭乙木. 轴向加速度运动弦线横向振动的数值计算方法[J]. 机械强度, 2004, 26(1): 16_19.
- [5] CHEN Li_qun, ZHAO Wei_jia, Zu J W. Simulations of transverse vibrations of an axially moving string: A modified difference approach [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 166(3):

- 596_607.
- [6] Chen T M. The hybrid Laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams[J]. *Int J Numerical Method Eng*, 1995, **38**(3): 509_522.
- [7] Ni Y Q, Lou W J, Ko J M. A hybrid pseudo force/Laplace transform method for nonlinear transient response of a suspended cable[J]. *J Sound Vib*, 2000, **238**(2): 189_124.
- [8] CHEN Li_qun, ZHANG Neng_hui, Zu J W. The regular and chaotic vibrations of an axially moving viscoelastic string based on 4_order Galerkin truncation[J]. *J Sound Vib*, 2003, **261**(4): 764_773.
- [9] CHEN Li_qun, ZHANG Neng_hui, Zu J W. Bifurcation and chaos in nonlinear vibrations of a moving viscoelastic string[J]. *Mechanics Research Communications*, 2002, **29**(2/3): 81_90.
- [10] CHEN Li_qun, ZHANG Neng_hui. Nonlinear dynamics of axially moving viscoelastic strings based on translating eigenfunctions [A]. In: Gutkowski W, Kowalewski T A Eds. *The 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (IUTAM-ICTAM04)* [C]. Warszawa: IPPT PAN, 2004, 390_391.
- [11] ZHANG Neng_hui, CHEN Li_qun. Nonlinear dynamical analysis of axially moving viscoelastic strings [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **24**(4): 1065_1074.
- [12] CHEN Li_qun, Zu J W, WU Ju, et al. Transverse vibrations of an axially accelerating viscoelastic string with geometric nonlinearity[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 2004, **48**(2): 171_182.
- [13] CHEN Li_qun, WU Jun, Zu J W. Asymptotic nonlinear behaviors in transverse vibration of an axially accelerating viscoelastic string[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, **35**(4): 347_360.
- [14] Bolotin V V. *Non Conservation Problems of the Theory of Elastic Stability* [M]. New York: Macmillan, 1963.
- [15] Wickert J A, Mote C D Jr. Classical vibration analysis of axially moving continua[J]. *ASME J Appl Mech*, 1990, **57**(3): 738_744.

Complex Mode Galerkin Approach in Transverse Vibration of an Axially Accelerating Viscoelastic String

ZHANG Neng_hui^{1,2}, WANG Jian_jun¹, CHENG Chang_jun^{1,2}

(1. Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: Under the consideration of harmonic fluctuations of initial tension and axially velocity, a nonlinear governing equation for transverse vibration of an axially accelerating string is set up by using the equation of motion for a 3-dimensional deformable body with initial stresses. The Kelvin model was used to describe viscoelastic behaviors of the material. The basis function of the complex mode Galerkin method for axially accelerating nonlinear strings was constructed by using the modal function of linear moving strings with constant axially transport velocity. By the constructed basis functions, the application of the complex mode Galerkin method in nonlinear vibration analysis of an axially accelerating viscoelastic string was investigated. Numerical results show that the convergence velocity of the complex mode Galerkin method is higher than that of the real mode Galerkin method for a variable coefficient gyroscopic system.

Key words: axially accelerating string; viscoelasticity; transverse nonlinear vibration; complex mode Galerkin method; geometry nonlinearity