文章编号: 1000_0887(2007) 01_0009_08 c 应用数学和力学编委会, ISSN 1000_0887

g_Eta_单调映像和解广义隐似变分包含的预解算子技巧*

张清邦[1,2], 丁协平[2]

(1. 北京工业大学 应用数理学院, 北京 100022;
2. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 引入一类新的 g_Eta_单调映像和一类涉及 g_Eta_单调映像的广义隐似变分包含; 定义了 g_Eta_单调映像的预解算子, 并证明了其 Lipschitz 连续性; 分析和给出了这类涉及 g_Eta_单调映像的广义隐似变分包含的迭代算法, 并证明了其收敛性•

关 键 词: g_η_单调映像; 预解算子; 广义隐似变分包含; 迭代算法
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

随着计算广义变分不等式、广义拟变分不等式、广义变分包含、广义拟变分包含的近似解的迭代算法的发展, 在 Hilbert 空间, 预解算子技巧已越来越重要和有效[1_12]• 丁协平[3,9], 丁和罗[11] 和 Lee 等[8] 已在 Hilbert 空间利用真泛函的 η_次微分和 η_近似映像研究了一般和广义拟似变分包含问题• 黄和方[12] 已利用极大 η_单调映像研究了一类新的一般变分包含问题• 最近, 方和黄[7] 引入了 h_单调算子和 h_单调算子的预解算子的概念, 并利用这些概念研究了一般变分包含的解的存在性和迭代算法•

在上面研究工作的激发下, 我们引入了一类新的 g_η_单调映像并定义了 g_η_单调映像的预解算子; 研究了 g_η_单调映像的性质; 利用 g_η_单调映像的预解算子和不动点技巧, 给出了逼近涉及 g_η_单调映像的广义隐似变分包含的解的迭代算法; 也给出了由该算法生成的迭代序列的收敛准则• 这些结果改进和推广了近期文献的已知结论•

1 预备知识

假设 H 是实 Hilbert 空间, 其范数和内积分别为 $\|\cdot\|$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$• 2^H 表示 H 的非空子集簇, $CB(H)$ 表示 H 的一切非空有界闭子集的簇•

定义 1.1[10] 映像 $\eta: H\times H \to H$ 称为

(i) 单调的, 若 $\langle \eta(x,y), x-y\rangle \geqslant 0$, 对一切 $x, y \in H$ 成立;

* 收稿日期: 2003_12_17; 修订日期: 2006_10_11
基金项目: 四川省教育厅重点科研基金资助项目(2003A081)
作者简介: 张清邦(1972—), 男, 四川南江人, 博士(联系人. E_mail: q.b.zhang@emails.bjut.edu.cn)•

(ii) 严格单调的, 若仅当 $x = y$ 时, 本定义(i) 中的等号成立;

(iii) 强单调的, 若存在常数 $\sigma > 0$ 使得

$$\langle \eta(x, y), x - y \rangle \geqslant \sigma \| x - y \|^2,$$

对一切 $x, y \in H$ 成立;

(iv) Lipschitz 连续的, 若存在常数 $\delta > 0$ 使得 $\| \eta(x, y) \| \leqslant \delta \| x - y \|$, 对一切 $x, y \in H$ 成立•

定义 1. 2 设映像 $\eta: H \times H \to H$• 映像 $g: H \to H$ 称为

(i) η_单调的, 若 $\langle g(x) - g(y), \eta(x, y) \rangle \geqslant 0$, 对一切 $x, y \in H$ 成立;

(ii) 严格 η_单调的, 若仅当 $x = y$ 时, 本定义(i) 中的等号成立;

(iii) η_强单调的, 若存在常数 $r > 0$ 使得

$$\langle g(x) - g(y), \eta(x, y) \rangle \geqslant r \| x - y \|^2,$$

对一切 $x, y \in H$ 成立;

(iv)[9] Lipschitz 连续的, 若存在常数 $t > 0$, 使得

$$\| g(x) - g(y) \| \leqslant t \| x - y \|,$$

对一切 $x, y \in H$ 成立;

(v)[9] 强单调的, 若存在常数 $a > 0$ 使得

$$\langle g(x) - g(y), x - y \rangle \geqslant r \| x - y \|^2,$$

对一切 $x, y \in H$ 成立•

定义 1. 3[8] 设映像 $\eta: H \times H \to H$• 映像 $M: H \to 2^H$ 称为

(i) η_单调的, 若对一切 $x, y \in H, u \in M(x), v \in M(y)$ 都有 $\langle u - v, \eta(x, y) \rangle \geqslant 0$;

(ii) 极大 η_单调的, 若它是 η_单调的且没有其它的 η_单调映像满足它的 Graph 严格包含咱 M 的 Graph 中•

若 $g = I$ (恒等映像), 则定义 1. 2 (i)、(ii)、(iii) 分别退化为定义 1. 1 (i)、(ii)、(iii)• 若对一切 $x, y \in H$ 都有 $\eta(x, y) = x - y$, 则定义 1. 3 分别退化为多值映像 M 的单调和极大单调映像且定义 1. 2(iii) 退化为定义 1. 2 (v)•

定义 1. 4[13] 设 $A, T: H \to CB(H)$ 是集值映像和 $N, \eta: H \times H \to H$ 是单值映像•

(i) 称 $N(\cdot, \cdot)$ 在第一变元关于 A 是 η_强单调的, 若存在常数 $\alpha > 0$ 使得

$$\langle N(w_1, \cdot) - N(w_2, \cdot), \eta(x_1, x_2) \rangle \geqslant \alpha \| x_1 - x_2 \|^2,$$

$\forall x_1, x_2 \in H, w_1 \in A(x_1), w_2 \in A(x_2)$;

(ii) 称 $N(\cdot, \cdot)$ 在第一变元关于 A 是 η_余强制的, 若存在常数 $\tau > 0$ 使得

$$\langle N(w_1, \cdot) - N(w_2, \cdot), \eta(x_1, x_2) \rangle \geqslant \tau \| N(w_1, \cdot) - N(w_2, \cdot) \|^2,$$

$\forall x_1, x_2 \in H, w_1 \in A(x_1), w_2 \in A(x_2)$;

(iii) 称 $N(\cdot, \cdot)$ 关于第一变元是 ε_1_Lipschitz 的, 若存在常数 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\| N(w_1, \cdot) - N(w_2, \cdot) \| \leqslant \varepsilon_1 \| w_1 - w_2 \|, \qquad \forall w_1, w_2 \in H,$$

类似的, 我们定义 $N(\cdot, \cdot)$ 关于第二变元是 ε_2_Lipschitz 的;

(iv) 称 A 是 l_1_H_Lipschitz 连续的, 若存在常数 $l_1 > 0$ 使得

$$H(A(x), A(y)) \leqslant l_1 \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in H,$$

其中 $H(\cdot, \cdot)$ 表示 $CB(H)$ 上的 Hausdorff 距离•

类似的, 定义 T 的 l_2_H_Lipschitz 连续性•

2 g_η_单调映像

我们引入 g_η_调映像的概念并讨论其相关性质•

定义 2.1 设映像 $g: H \to H$ 和映像 $\eta: H \times H \to H$ 是单值映像, $M: H \to 2^H$ 是多值映像• 称 M 是 g_η_单调的, 若 M 是 η_单调的且对一切 $\lambda > 0$ 都有 $(g + \lambda M)(H) = H$•

注 2.1 1) 若 $g = I$(恒等映像), 则 g_η_单调映像退化为文献[8] 和文献[12] 中的单调映像•

2) 若对一切 $x, y \in H$ 都有 $\eta(x, y) = x - y$ 且 $g = h$, 则 g_η_单调映像退化为文献[7] 中的 h_单调算子;

命题 2.1 设 $g: H \to H$ 是严格 η_单调的单值映像且 $M: H \to 2^H$ 是 g_η_单调映像, 则 M 是极大 η_单调的•

证明 因为 M 是 η_单调的, 由文献[8] 的命题 1 知, 只需证明下面性质: 对一切 $(y, v) \in \mathrm{Graph}(M)$, $\langle u - v, \eta(x, y)\rangle \geqslant 0$, 蕴含着 $u \in M(x)$ 成立, 其中 $\mathrm{Graph}(M) = \{(y, v) \in H \times H: v \in M(y)\}$ 为 M 的 Graph•

假设存在 $(x_0, u_0) \notin \mathrm{Graph}(M)$ 使得

$$\langle u_0 - v, \eta(x_0, y)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall (y, v) \in \mathrm{Graph}(M)• \tag{1}$$

因为 M 是 g_η_单调映像, 对一切 $\lambda > 0$ 都有 $(g + \lambda M)(H) = H$, 则存在 $(x_1, u_1) \in \mathrm{Graph}(M)$ 使得

$$g(x_1) + \lambda u_1 = g(x_0) + \lambda u_0• \tag{2}$$

由(1) 式和(2) 式可得

$$\lambda\langle u_0 - u_1, \eta(x_0, x_1)\rangle = -\langle g(x_0) - g(x_1), \eta(x_0, x_1)\rangle \geqslant 0,$$

由 g 的 η_严格单调性, 可知 $x_0 = x_1$• 由(2) 式则有 $u_0 = u_1$• 因此 $(x_0, u_0) \in \mathrm{Graph}(M)$, 这与假设矛盾• 因此 M 是极大 η_单调的• □

下面两个例子说明 M 是 g_η_单调的, 但不是 η_单调的(见例 1); M 是极大 η_单调的, 但不是 g_η_单调的(见例 2)•

例 1 设 $H = R$• g, M 和 η 分别定义如下

$$g(x) = x^3, M(x) = x^2, \eta(x, y) = x^2 - y^2,$$

则 M 是 g_η_单调的, 但不是 η_单调的•

证明 因为对一切 $x, y \in R$ 都有

$$\langle M(x) - M(y), \eta(x, y)\rangle = (x^2 - y^2)^2 \geqslant 0•$$

因此 M 是 η_单调的• 又因为对一切 $x, y \in R$ 都有

$$(g + M)(x) = x^3 + x^2 = x^2(x + 1) \in R,$$

即 $(g + M)(R) = R$• 因此 M 是 g_η_单调的•

但因为对一切 $x, y \in R$ 都有 $(I + M)(x) = x + x^2 \in [-1/4, +\infty)$; 即 $(I + M)(R) \neq R$• 因此由文献[8] 中命题 2 知, M 不是极大 η_单调的• □

例 2 设 $H = R$• g, M 和 η 分别定义如下: $g(x) = x^2$, $M(x) = x$ 和 $\eta(x, y) = |xy|(x - y)$, 则 M 是极大 η_单调的, 但不是 g_η_单调的•

证明 因为对一切 $x, y \in R$ 都有 $\langle M(x) - M(y), \eta(x, y)\rangle = |xy|(x - y)^2 \geqslant 0$, 因此 M 是 η_单调的• 又因为对一切 $x, y \in R$ 都有 $(I + M)(x) = 2x \in R$, 即 $(I + M)(R) = R$• 因此由文献[8] 中命题 2 知, M 是极大 η_单调的•

但因为对一切 $x, y \in R$ 都有 $(g+M)(x)=x^2+x\in[-1/4,+\infty)$，即 $(g+M)(R)\neq R$。因此 M 不是 $g_\eta_$单调的。 □

定理 2.1 设 $g: H\to H$ 是严格 $\eta_$单调的单值映像且 $M: H\to 2^H$ 是 $g_\eta_$单调映像，则算子 $(g+\lambda M)^{-1}$ 是单值的。

证明 对任意给定的 $u\in H$，设 $x, y\in(g+\lambda M)^{-1}(u)$，则有

$$-g(x)+u\in\lambda M(x),\ -g(y)+u\in\lambda M(y).$$

由 M 的 $\eta_$单调性可知

$$0\leqslant\langle(-g(x)+u)-(-g(y)+u), \eta(x,y)\rangle=-\langle g(x)-g(y), \eta(x,y)\rangle.$$

又由 g 的严格 $\eta_$单调性得 $x=y$。因此 $(g+\lambda M)^{-1}$ 是单值的。 □

定义 2.2 设 $g: H\to H$ 是严格 $\eta_$单调映像且 $M: H\to 2^H$ 是 $g_\eta_$单调映像。预解算子 $R^g_{M,\lambda}: H\to H$ 定义如下

$$R^g_{M,\lambda}(x)=(g+\lambda M)^{-1}(x),\qquad \forall x\in H. \tag{3}$$

定理 2.2 设 $g: H\to H$ 是 $\eta_$强单调映像，其系数为 r；$\eta: H\times H\to H$ 是 Lipschitz 连续映像，其系数为 δ；$M: H\to 2^H$ 是 $g_\eta_$单调映像。则预解算子 $R^g_{M,\lambda}: H\to H$ 是 Lipschitz 连续的且系数为 δ/r，即

$$\|R^g_{M,\lambda}(x)-R^g_{M,\lambda}(y)\|\leqslant\frac{\delta}{r}\|x-y\|,\qquad \forall x, y\in H. \tag{4}$$

证明 设任意给定的 $x, y\in H$，由(3)可得

$$R^g_{M,\lambda}(x)=(g+\lambda M)^{-1}(x),$$

$$R^g_{M,\lambda}(y)=(g+\lambda M)^{-1}(y),$$

于是有

$$\frac{1}{\lambda}(x-g(R^g_{M,\lambda}(x)))\in M(R^g_{M,\lambda}(x)),\quad \frac{1}{\lambda}(y-g(R^g_{M,\lambda}(y)))\in M(R^g_{M,\lambda}(y)).$$

因为 M 是 $\eta_$单调的，所以

$$\frac{1}{\lambda}\langle[x-g(R^g_{M,\lambda}(x))]-[y-g(R^g_{M,\lambda}(y))], \eta(R^g_{M,\lambda}(x), R^g_{M,\lambda}(y))\rangle\geqslant 0.$$

于是有

$$\begin{aligned}\|x-y\|\cdot\|\eta(R^g_{M,\lambda}(x), R^g_{M,\lambda}(y))\| &\geqslant\langle x-y, \eta(R^g_{M,\lambda}(x), R^g_{M,\lambda}(y))\rangle\geqslant\\ &\langle g(R^g_{M,\lambda}(x))-g(R^g_{M,\lambda}(y)), \eta(R^g_{M,\lambda}(x), R^g_{M,\lambda}(y))\rangle\geqslant\\ &r\|R^g_{M,\lambda}(x)-R^g_{M,\lambda}(y)\|^2.\end{aligned}$$

因为 η 是 Lipschitz 连续的，于是对一切 $x, y\in H$ 都有

$$\|R^g_{M,\lambda}(x)-R^g_{M,\lambda}(y)\|\leqslant\frac{\delta}{r}\|x-y\|.$$

注 2.2 若 $g=I$，则命题 2.1 和定理 2.1 退化为文献[8]中命题 2 和文献[12]中定理 2.1；定理 2.2 退化为文献[12]中定理 2.2；其中 I 是恒等映像。若 $\eta(x,y)=x-y$，$\forall x, y\in H$ 且 $g=h$，则定义 2.2 即为文献[7]中 $h_$单调算子的定义。

3 广义隐似变分包含

我们在 Hilbert 空间引入一类新的与 $g_\eta_$单调映像有关的广义隐似变分包含问题。通过

利用预解算子技巧给出并分析了逼近广义隐似变分包含的解的新的迭代算法,并证明了该算法的收敛性•

设 $M:H \to 2^H$ 是 g_η_单调映像,$A,T:H \to CB(H)$ 是集值映像且 η,$N(\cdot,\cdot):H\times H \to H$ 是单值映像• 考虑下列广义隐似变分包含问题:求 $x\in H$,$w\in A(x)$ 且 $v\in T(x)$ 使得

$$0\in N(w,v)+M(x)• \tag{5}$$

特例

1) 若 $g=I$(恒等映像),$\eta(x,y)+\eta(y,x)=0$,$\forall x,y\in H$ 且 $M(x)=\partial_\eta\phi(x)$ 是 ϕ 在 $x\in\mathrm{dom}\,\phi$ 的η_次微分,使得对一切 $\lambda>0$ 都有 $R(I+\lambda\partial_\eta\phi)=H$,则问题(5)等价于求 $x\in H$,$w\in A(x)$,$v\in T(x)$ 使得

$$\langle N(w,v),\eta(y,x)\rangle\geqslant\phi(y)-\phi(x),\qquad\forall y\in H, \tag{6}$$

其中 $\phi:H\to R\cup\{+\infty\}$ 且 ϕ 在 $x\in\mathrm{dom}\,\phi$ 的η_次微分的定义为文献[8]、文献[9]和文献[11]中相关定义;

2) 若对一切 $x\in H$ 都有 $A,T:H\to H$,$N(A(x),T(x))=T(x)-A(x)$ 且 $\Phi(x)=-\phi(x)$,则问题(6)等价于文献[8]中已研究过的问题:求 $x\in H$ 使得 $x\in\mathrm{dom}\,\phi$ 且

$$\langle T(x)-A(x),\eta(y,x)\rangle\geqslant\Phi(x)-\Phi(y),\qquad\forall y\in H; \tag{7}$$

3) 若 $\eta(x,y)=x-y$,$\forall x,y\in H$,$g=h$ 且 M 是 h_单调算子,$A,T:H\to H$,$N(A(x),T(x))=A(x)$• 则问题(5)退化为文献[7]中已研究过的问题:求 $x\in H$ 使得

$$0\in A(x)+M(x)•$$

适当选取 M、A、T、η和 $N(\cdot,\cdot)$ 的形式,我们可获得作为问题(5)特殊情况的已研究过或新的变分不等式和变分包含问题•

引理3.1 设 $g:H\to H$ 是严格η_单调映像且 $M:H\to 2^H$ 是 g_η_单调映像,则 $x\in H$,$w\in A(x)$,$v\in T(x)$ 是问题(5)的解当且仅当

$$x\in R^g_{M,\lambda}(g(x)-\lambda N(w,v)),$$

其中 $R^g_{M,\lambda}=(g+\lambda M)^{-1}$,常数 $\lambda>0$•

由引理3.1,我们可构造逼近问题(5)解的迭代算法•

算法3.1 对任意 $x_0\in H$,$w_0\in A(x_0)$,$v_0\in T(x_0)$,根据Nadler[14],我们定义迭代序列 $\{x_n\}$、$\{w_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 满足

$$\begin{aligned}
&x_{n+1}=R^g_{M,\lambda}(g(x_n)-\lambda N(w_n,v_n)),\\
&w_n\in A(x_n),\ \ \|w_n-w_{n+1}\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)H(A(x_n),A(x_{n+1})),\\
&v_n\in T(x_n),\ \ \|v_n-v_{n+1}\|\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)H(T(x_n),T(x_{n+1})),\\
&\qquad\qquad n=0,1,2,\cdots,
\end{aligned}$$

其中 $\lambda>0$ 是常数•

定理3.1 设 $g:H\to H$ 是η_强单调映像,其系数为 r 且是Lipschitz连续的,其系数为 t;设映像 $\eta:H\times H\to H$ 是Lipschitz连续的,其系数为 δ;$M:H\to 2^H$ 是 g_η_单调映像;$N(\cdot,\cdot)$ 在第一变元关于 A 是τ_η_余强制的,关于第一变元是 ε_1_Lipschitz连续的且关于第二变元是 ε_2_Lipschitz连续的;A 是 l_1_H_Lipschitz连续的;T 是 l_2_H_Lipschitz连续的• 假设存在常数 $\lambda>0$ 满足

$$\begin{cases} 0 < m = r - \delta\sqrt{t^2 - 2r + \delta^2} < r\delta, \\ 2r < t^2 + \delta^2,\ l_1\varepsilon_1 > l_2\varepsilon_2, \\ r^2 l_1^2 \varepsilon_1^2 \tau \geqslant mrl_2\varepsilon_2 + \sqrt{(r^2\delta^2 - m^2)(r^2 l_1^2\varepsilon_1^2 - r^2 l_2^2\varepsilon_2^2)}, \\ \left|\lambda - \dfrac{r^2 l_1^2\varepsilon_1^2\tau - mrl_2\varepsilon_2}{r^2 l_1^2\varepsilon_1^2 - r^2 l_2^2\varepsilon_2^2}\right| < \\ \qquad \dfrac{\sqrt{(r^2 l_1^2\varepsilon_1^2\tau - mrl_2\varepsilon_2)^2 - (r^2\delta^2 - m^2)(r^2 l_1^2\varepsilon_1^2 - r^2 l_2^2\varepsilon_2^2)}}{r^2 l_1^2\varepsilon_1^2 - r^2 l_2^2\varepsilon_2^2} \end{cases} \tag{8}$$

则由算法 3. 1 生成的迭代序列$\{x_n\}$、$\{w_n\}$和$\{v_n\}$分别强收敛于x、w 和v 且(x, w, v) 是问题(5) 的解•

证明 由算法 3. 1, 引理 3. 1 和定理 2. 2, 有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - n_n\| &= \|R^g_{M,\lambda}(g(x_n) - \lambda N(w_n, v_n)) - R^g_{M,\lambda}(g(x_{n-1}) - \lambda N(w_{n-1}, v_{n-1}))\| \leqslant \\ &\frac{\delta}{r}\|g(x_n) - g(x_{n-1}) - \lambda(N(w_n, v_n) - N(w_{n-1}, v_{n-1}))\| \leqslant \\ &\frac{\delta}{r}\Big\{\|g(x_n) - g(x_{n-1}) - \eta(x_n, x_{n-1})\| + \\ &\|\eta(x_n, x_{n-1}) - \lambda(N(w_n, v_n) - N(w_{n-1}, v_n))\| + \\ &\lambda\|N(w_{n-1}, v_n) - N(w_{n-1}, v_{n-1})\|\Big\}• \end{aligned} \tag{9}$$

由g 的η_强单调性和 Lipschitz 连续性, 及η的 Lipschitz 连续性可得

$$\|g(x_n) - g(x_{n-1}) - \eta(x_n, x_{n-1})\| \leqslant \sqrt{t^2 - 2r + \delta^2}\|x_n - x_{n-1}\|• \tag{10}$$

由$N(•, •)$ 在第一变元关于A 的τ_η_余强制性, 关于第一变元的ε_1_Lipschitz 连续性, 关于第二变元的ε_2_Lipschitz 连续性; A 的l_1_H_Lipschitz 连续性及T 的l_2_H_Lipschitz 连续性, 可得

$$\begin{aligned} &\|\eta(x_n, x_{n-1}) - \lambda(N(w_n, v_n) - N(w_{n-1}, v_n))\|^2 = \\ &\quad \lambda^2\|N(w_n, v_n) - N(w_{n-1}, v_n)\|^2 - \\ &\quad 2\lambda\langle N(w_n, v_n) - N(w_{n-1}, v_n), \eta(x_n, x_{n-1})\rangle + \|\eta(x_n, x_{n-1})\|^2 \leqslant \\ &\quad \left(\lambda^2 l_1^2\varepsilon_1^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \delta^2\right)\|x_n - x_{n-1}\|^2, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\|N(w_{n-1}, v_n) - N(w_{n-1}, v_{n-1})\| \leqslant l_2\varepsilon_2\left(1 + \frac{1}{n}\right)\|x_n - x_{n-1}\|• \tag{12}$$

由(9) 式、(10) 式、(11) 式和(12) 式, 可得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - n_n\| \leqslant \frac{\delta}{r}\Bigg\{&\sqrt{t^2 - 2r + \delta^2} + \lambda l_2\varepsilon_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \\ &\sqrt{\lambda^2 l_1^2\varepsilon_1^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \delta^2}\Bigg\}\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \\ &\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\theta_n = \frac{\delta}{r}\Bigg\{\sqrt{t^2 - 2r + \delta^2} + \lambda l_2\varepsilon_2\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sqrt{\lambda^2 l_1^2\varepsilon_1^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 2\tau\lambda l_1^2\varepsilon_1^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \delta^2}\Bigg\}•$$

令

$$\theta = \frac{\delta}{r}\left\{\sqrt{t^2 - 2r + \delta^2} + \lambda l_2 \varepsilon_2 + \sqrt{\lambda^2 l_1^2 \varepsilon_1^2 - 2\tau\lambda_1^2\varepsilon_1^2 + \delta^2}\right\},$$

则当 $n \to +\infty$ 时, 有 $\theta_n \to \theta$•

由条件(8)可知 $0 < \theta < 1$, 因此当 n 充分大时, 有 $\theta_n < 1$• 由(13)式知 $\{x_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列• 设当 $n \to +\infty$ 时 $x_n \to x \in H$, 由算法 3.1 和 A, T 的 Lipschitz 连续性, 可知

$$\| w_n - w_{n-1} \| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) H(A(x_n), A(x_{n-1})) \leqslant l_1 \varepsilon_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \| x_n - x_{n-1} \|,$$

$$\| v_n - v_{n-1} \| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) H(T(x_n), T(x_{n-1})) \leqslant l_2 \varepsilon_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \| x_n - x_{n-1} \|•$$

从而可知 $\{w_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是 H 中的 Cauchy 序列• 当 $n \to +\infty$ 时, 令 $w_n \to w$ 和 $v_n \to v$•

因为当 $n \to +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned} d(w, A(x)) &\leqslant \| w - w_n \| + d(w_n, A(x_{n-1})) \leqslant \\ &\| w - w_n \| + H(A(x_n, A(x_{n-1})) \leqslant \\ &\| w - w_n \| + l_1 \| x_n - x_{n-1} \| \to 0, \end{aligned}$$

所以 $w \in A(x)$• 同样可得 $v \in T(x)$•

令 $n \to +\infty$, 由算法 3.1 及 A、T、g 和 N 的 Lipschitz 连续性, 可得

$$x = R^g_{M,\lambda}(g(x) - \lambda N(w, v)), \tag{14}$$

所以, 由引理 3.1 知, (x, w, v) 是问题(5)的解•

感谢 本文作者感谢北京工业大学研究生科技基金的资助(YJK_2005_307)•

[参 考 文 献]

[1] Noor M A. Generalized set_valued variational inclusions and resolvent equations[J]. J Math Anal Appl, 1998, **228**(1): 206_220.

[2] DING Xie_ping. Generalized implicit quasivariational inclusions with fuzzy set_valued mapping[J]. Comput Math Applic, 1999, **38**(1): 71_79.

[3] DING Xie_ping. Generalized quasi_variational_like inclusions with fuzzy mapping and nonconvex functionals[J]. Adv Nonlinear Var Inequal, 1999, **2**(2): 13_29.

[4] DING Xie_ping, Park J Y. A new class of generalized nonlinear implicit quasivariational inclusions with fuzzy mapping[J]. J Comput Appl Math, 2002, **138**(2): 243_257.

[5] DING Xie_ping. Algorithms of solutions for completely generalized mixed implicit quasi_variational inclusions[J]. Appl Math Comput, 2004, **148**(1): 47_66.

[6] Liu L W, Li Y Q. On generalized set_valued variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 2001, **261**(1): 231_240.

[7] FANG Ya_ping, HUANG Nan_jing. H_monotone operator and resolvent operator technique for variational inclusions[J]. Appl Math Comput, 2003, **145**(2/3): 795_803.

[8] Lee C H, Ansari Q H, Yao J C. A perturbed algorithms for strongly nonlinear variational_like inclusion[J]. Bull Austral Math Soc, 2000, **62**(3): 417_426.

[9] DING Xie_ping. Generalized quasi_variational_like inclusions with nonconvex functionals[J]. Appl Math Comput, 2001, **122**(3): 267_282.

[10] Noor M A. Nonconvex functions and variational inequalities[J]. J Optim Theory Appl, 1995, **87**(3): 615_630.

[11] DING Xie_ping, LOU Chung_lin. Perturbed proximal point algorithms for general quasi_variational_like

inclusions[J]. J Comput Appl Math, 2000, **113**(1/2): 153_165.

[12] HUANG Nan_jing, FANG Ya_ping. A new class of general variational inclusions involving maximal η_monotone mappings[J]. Publ Math Debrecen, 2003, **62**(1/2): 83_98.

[13] DING Xie_ping. Predictor_corrector iterative algorithms for solving generalized mixed variational_like inequalities[J]. Appl Math Comput, 2004, **152**(3): 855_865.

[14] Nadler S B. Mutivalued contraction mapping[J]. Pacific J Math, 1969, **30**(3): 457_488.

*g*_Eta_Monotone Mapping and Resolvent Operator Technique for Solving Generalized Implicit Variational_Like Inclusions

ZHANG Qing_bang[1,2], DING Xie_ping[2]

(1. College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100022, P.R. China;

2. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R. China)

Abstract: A new class of g_Eta_monotone mappings and a class of generalized implicit variational_like inclusions involving g_Eta_monotone mappings are introduced. The resolvent operator of g_Eta_monotone mappings is defined and its Lipschitz continuity is presented. An iterative algorithm for approximating the solutions of generalized implicit variational_like inclusions is suggested and analyzed. The convergence of iterative sequence generated by the algorithm is also proved.

Key words: g_η_monotone mapping; resolvent operator; generalized implicit variational_like inclusion; iterative algorithm