

基于二重网格的定常 Navier-Stokes 方程的 局部和并行有限元算法*

马飞遥¹, 马逸尘¹, 沃维丰²

(1. 西安交通大学 理学院, 西安, 710049;

2. 西北大学 非线性研究中心, 西安, 710069)

(周哲玮推荐)

摘要: 对二维定常的不可压缩的 Navier-Stokes 方程的局部和并行算法进行了研究。给出的算法是多重网格和区域分解相结合的算法, 它是基于两个有限元空间: 粗网格上的函数空间和子区域的细网格上的函数空间。局部算法是在粗网格上求一个非线性问题, 然后在细网格上求一个线性问题, 并舍掉内部边界附近的误差相对较大的解。最后, 基于局部算法, 通过有重叠的区域分解而构造了并行算法, 并且做了算法的误差分析, 得到了比标准有限元方法更好的误差估计, 也对算法做了数值试验, 数值结果通过比较验证了本算法的高效性和合理性。

关键词: Navier-Stokes 方程; 有限元; 二重网格; 局部; 并行

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A

引 言

关于这种局部并行有限元算法, 源自许进超的文章^[1], 并已有很多研究成果^[2-5], 算法的思想就是对方程解的低频部分用整体的粗网格来逼近, 高频部分用局部的并行的细网格来逼近, 此方法已经被应用于求解一些半线性和非线性标量型偏微分方程中^[3,4], 并且已被应用到 Stokes 方程^[5], 本文可以看作是文献[5]的延续, 进一步将局部并行的算法推广到 N-S 方程上。本文的内容安排: 第 1 节给出一些关于所使用的空间和一些记号的说明, 以及 N-S 方程、有限元等相关的预备知识。第 2 节, 提出 N-S 方程的局部和并行有限元算法, 并给出其误差分析的结果和证明。第 3 节, 利用构造的有限元算法进行数值试验, 验证第 2 节的结论。

1 预备知识

本文牵涉的基础知识较多, 本节只列出将要用到的部分知识, 其中包括一些常用的定义和本文的一些特殊记号。我们先引入所需的 Sobolev 空间: $W^{s,p}(\Omega)^d$, $W^{s,p}(\Omega)^d$ 及相关的范数和半范的标准定义, 参见文献[6]。例如, $H^s(\Omega) = W^{s,2}$, $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$,

* 收稿日期: 2006_03_30; 修订日期: 2006_10_31

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371096)

作者简介: 马飞遥(1979—), 男, 湖南衡阳人, 博士(联系人, Tel: + 86_29_82673454; E_mail: feiyao@mail.gnail.com)。

$\|\cdot\|_{s, \Omega} = \|\cdot\|_{s, 2, \Omega}, |\cdot|_{s, \Omega} = |\cdot|_{s, 2, \Omega}$ (在本文的有些地方, 出于需要范数可被视为分片定义的). 另外, 我们记 $L_0^2(\Omega) = \left\{ p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p(x) dx = 0 \right\}, X = H_0^1(\Omega)^2, M = L_0^2(\Omega), V = \left\{ u \in X, \operatorname{div} u = 0, \text{在 } \Omega \text{ 中} \right\}, Y = H_0^1(\Omega)^2 \times L_0^2(\Omega)$. 乘积空间 $X \times M$ 的范数记为 $\|(u, p)\| = (\|u\|_1^2 + \|p\|_0^2)^{1/2}, D \subset\subset G$ 表示 $\operatorname{dist}(\partial D | \partial \Omega, \partial G | \partial \Omega) > 0$. 如无特殊声明, 本章以后一律用 c 表示与剖分无关的常数, 尽管在不同场合下它们可能表示的内容不同.

1.1 混合有限元空间

假设粗、细网格剖分都是拟一致剖分. J^h, J^H 是 Ω 的剖分. 速度-压力有限元空间 $(X_0^h(\Omega), M^h(\Omega)), (X_0^H(\Omega), M^H(\Omega))$ 都满足 LBB 条件(1) 以及包含关系 $X_0^H(\Omega) \subset X_0^h(\Omega) \subset X, M^H(\Omega) \subset M^h(\Omega) \subset M$.

$$\inf_{q^\mu \in M^\mu} \sup_{v^\mu \in X^\mu} \frac{(q^\mu, \operatorname{div} v^\mu)}{\|q^\mu\|_0 \|v^\mu\|_1} \geq c > 0, \tag{1}$$

其中 $\mu = h$ 或 H . $h(x)$ 是包含 x 点的有限元 τ 的直径 h_τ . 首先对剖分的要求是必须保证剖分不会局部过度细分.

A.0 存在 $r \geq 1$ 使得

$$h_\Omega \leq h(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{2}$$

其中 $h_\Omega = \max_{x \in \Omega} h(x)$, 这是一个非常宽松的假设, 许多实用的剖分都将满足这样的假设, 对于这样的剖分 $J^h(\Omega)$, 定义 $X^h(\Omega) \subset H^1(\Omega)^2$ 和 $Q^h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ 为 Ω 的两个有限元子空间, 且 $X_0^h(\Omega) = X^h(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)^2, M^h(\Omega) = Q^h(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$, 如果给定 $\Omega_0 \subset \Omega$, 我们定义 $J^h(\Omega_0), X^h(\Omega_0)$ 和 $Q^h(\Omega_0)$ 为 $J^h(\Omega), X^h(\Omega)$ 和 $Q^h(\Omega)$ 在 Ω_0 上的限制, 且 $X_0^h(\Omega_0) = \{v \in X_0^h(\Omega); \operatorname{supp} v \subset \Omega_0\}, M_0^h(\Omega_0) = \{q \in M^h(\Omega); \operatorname{supp} q \subset \Omega_0\}$, 下面给出混合元空间的基本假设^[3,5]:

A.1 逼近性: 如果 $r > 1$ 满足 $(u, p) \in H^{r+1}(\Omega)^2 \times H^r(\Omega)$, 那么有

$$\inf_{v \in X_0^h(\Omega)} (\|h^{-1}(u-v)\|_{0, \Omega} + \|u-v\|_{1, \Omega}) \leq C \|h^s u\|_{s+1, \Omega}, \quad 0 \leq s \leq r, \tag{3}$$

$$\inf_{q \in Q^h(\Omega)} (\|h^{-1}(p-q)\|_{-1, \Omega} + \|p-q\|_{0, \Omega}) \leq C \|h^s p\|_{s, \Omega}, \quad 0 \leq s \leq r; \tag{4}$$

A.2 反估计: 对于任意 $(v, q) \in X^h(\Omega_0) \times Q^h(\Omega_0)$,

$$\|v\|_{1, \Omega_0} \leq \|h^{-1}v\|_{0, \Omega_0}, \quad \|q\|_{0, \Omega_0} \leq \|h^{-1}q\|_{-1, \Omega_0}; \tag{5}$$

A.3 超收敛性: $G \subset\subset \Omega$, 设 $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ 且 $\operatorname{supp} \omega \subset\subset G$, 则对于 $(u, p) \in X^h(G) \times Q^h(G)$, 存在 $(v, q) \in X_0^h(G) \times Q_0^h(G)$ 使得

$$\|\omega u - v\|_{1, G} \leq ch \|u\|_{1, G}, \quad \|\omega p - q\|_{0, G} \leq ch \|p\|_{0, G}; \tag{6}$$

A.4 稳定性: 存在两个正的常数 h_0 和 β 使得对于所有 $h \in (0, h_0]$, 存在一个区域 G_h 满足 $D \subset\subset G_h \subset\subset \Omega_0$ 使得

$$\beta \|q\|_{0, G_h} \leq \sup_{v \in X_0^h(G_h)} \frac{(\operatorname{div} v, q)}{\|v\|_{1, G_h}}, \quad \forall q \in M^h(G_h). \tag{7}$$

1.2 Navier-Stokes 方程

本文研究的对象是二维不可压的定常的 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} -\lambda \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f, & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上,} \\ u = 0, & \text{在 } \partial \Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (8)$$

其中 $u \in X, p \in M$ 另外为简便起见, 本文中记

$$a_0(u, v) = \lambda (\nabla \cdot u, \nabla \cdot v), \quad b(v, q) = (\nabla \cdot v, q),$$

$$N(u, v, w) = \frac{1}{2} [((u \cdot \nabla) v, w) - ((u \cdot \nabla, v, w))],$$

$$a(u, p; v, q) = a_0(u, v) - b(v, p) + b(u, q) + N(u, u, v),$$

$$A(u, p; v, q) = a_0(u, v) - b(v, p) + b(u, q)$$

三线形式 $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ 满足以下不等式^[7,9]

$$|N(u, v, w)| \leq c \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1, \quad \forall u, v, w \in X, \quad (9)$$

$$|N(u, v, w)| \leq c \|u\|_2 \|v\|_0 \|w\|_1, \quad \forall w, v \in X, u \in H^2(\Omega)^2, \quad (10)$$

$$|N(u, v, w)| \leq c \|u\|_0 \|v\|_2 \|w\|_1, \quad \forall u, w \in X, v \in H^2(\Omega)^2. \quad (11)$$

下面给出(8)式的变分形式: 求 $(u, p) \in (X, M)$, 使得

$$\begin{aligned} a_0(u, v) + N(u, u, v) - b(v, p) + b(u, q) &= (f, v), \\ \forall (v, q) &\in (X, M). \end{aligned} \quad (12)$$

于是(12)式标准有限元问题为: 求 $(u_h, p_h) \in X_0^h(\Omega) \times M^h(\Omega)$, 使得

$$\begin{aligned} a_0(u_h, v) + N(u_h, u_h, v) - b(v, p_h) + b(u_h, q) &= (f, v), \\ \forall (v, q) &\in (X_0^h(\Omega), M^h(\Omega)). \end{aligned} \quad (13)$$

若 (u, p) 为(8)式的非奇异解, 则存在 $H_0 > 0$, 当 $h < H_0$ 时, (u_h, p_h) 为(13)式的非奇异解, 且有下面的估计^[7].

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} + \|p - p_h\|_{0, \Omega} \leq ch^s (\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega}), \quad (14)$$

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega} + \|p - p_h\|_{-1, \Omega} \leq ch^{s+1} (\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega}). \quad (15)$$

2 算法及其误差分析

讨论局部和并行算法的构造及其误差分析, 首先给出局部算法的构造和误差估计结果, 然后证明局部算法的误差估计式. 最后根据局部算法构造并行算法并证明其误差估计结果.

2.1 局部算法

1) 求粗网格的解: $(u_H, p_H) \in X_0^H(\Omega) \times M^H(\Omega)$ 满足

$$\begin{aligned} a_0(u_H, v) - b(v, p_H) + N(u_H, u_H, v) + b(u_H, q) &= (f, v), \\ \forall (v, q) &\in (X_0^H(\Omega), M^H(\Omega)); \end{aligned} \quad (16)$$

2) 求局部细网格的修正值: $(e^h, \Gamma^h) \in X_0^h(\Omega_0) \times M^h(\Omega_0)$ 使得

$$\begin{aligned} a_0(e^h, v) - b(v, \Gamma^h) + b(e^h, q) &= (f, v) - a_0(u_H, v) + b(v, p_H) - \\ &b(u_H, q) - N(u_H, u_H, v), \quad \forall v \in X_0^h(\Omega_0), q \in M^h(\Omega_0), \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\Omega_0 \subset \subset \Omega$ 且 $e^h|_{\partial \Omega_0} = 0$;

3) 修正:

$$u^h|_D = u_H + e^h, \quad p^h|_D = p_H + \Gamma^h, \quad (18)$$

其中 $D \subset \subset \Omega_0$ (图 1).

定理 1 设 $(u^h, p^h) \in X_0^h(\Omega) \times M^h(\Omega)$ 由局部算法得到, 则

$$\|u_h - u^h\|_{1,D} + \|p_h - p^h\|_{0,D} \leqslant cH^{s+1}(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}), \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \quad (19)$$

其中 $(u_h, p_h) \in X_0^h(\Omega) \times M^h(\Omega)$ 是(13)式的解, r 的定义见 A.1•

要证明定理 1, 需先给出几个引理•

引理 2.1 (见文献[7]和文献[9]) 假设 $\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} (b(v, q)) / (\|q\|_0 \|v\|_1) \geqslant \beta > 0$, 且双线性形式 $E(\cdot, \cdot)$ 满足

$$\inf_{u \in V} \sup_{v \in V} \frac{E(u, v)}{\|u\|_1 \|v\|_1} \geqslant \alpha_0 > 0, \quad \inf_{v \in V} \sup_{u \in V} \frac{E(u, v)}{\|u\|_1 \|v\|_1} \geqslant \alpha_0 > 0, \quad (20)$$

则存在 $\gamma = \gamma(\alpha_0, \beta, \|E\|_{L(X \times X, \mathbf{R})}) > 0$ 使得

$$\begin{cases} \inf_{(u,p) \in Y} \sup_{(v,q) \in Y} \frac{F(u, p; v, q)}{\|(u, p)\| \cdot \|(v, q)\|} \geqslant \gamma, \\ \inf_{(v,q) \in Y} \sup_{(u,p) \in Y} \frac{F(u, p; v, q)}{\|(u, p)\| \cdot \|(v, q)\|} \geqslant \gamma, \end{cases} \quad (21)$$

其中 $F: Y \times Y \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续双线性形式, 为

$$F(u, p; v, q) = E(u, v) - b(v, p) + b(u, q)•$$

由引理 2.1, 我们可以得到下面的推论•

推论 2.1 存在 $\gamma > 0$, 使得

$$\inf_{(v,q) \in Y^h} \sup_{(u,p) \in Y^h} \frac{B_H(u, p; v, q)}{\|(u, p)\| \cdot \|(v, q)\|} \geqslant \gamma, \quad (22)$$

$$\|(u, p)\| \leqslant c \sup_{(v,q) \in Y^h} \frac{B_H(u, p; v, q)}{\|(v, q)\|}, \quad (23)$$

其中 $B_H(u, p; v, q) = a_0(u, v) - b(v, p) + b(u, q) + N(u_H, u, v)•$

证明 在引理 2.1 中取 $E(u, v) = a_0(u, v) + N(u_H, u, v)$ 容易证明它满足强制条件(20)式• 于是有(22)式成立^[8], 由(22)式得到(23)式•

引理 2.2 假设 (u_h, p_h) 满足

$$B_H(u_h, p_h; v, q) = (f, v), \quad \forall v \in X^h(\Omega), q \in M^h(\Omega), \quad (24)$$

则有

$$\|u_h' - u_h\|_{1,\Omega} + \|p_h' - p_h\|_{0,\Omega} \leqslant cH^{s+1}(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}), \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \quad (25)$$

其中 c 只与 (u, p) 的范数有关, 而与剖分 h 无关•

证明 由(3)式、(5)式、(13)式、(14)式和(15)式, 可得

$$B_H(u_h - u_h', p_h - p_h'; v, q) = \begin{cases} N(u_H - u_h, u_h - u, v) + N(u_H - u_h, u, v), & (26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \|u_H - u_h\|_1 \|u_h - u\|_1 \|v\|_1 + c_2 \|u_H - u_h\|_0 \|u\|_2 \|v\|_1, & (27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} cH^{s+1}(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}) \|(v, q)\|, & (28) \end{cases}$$

再由(23)式, 得证•

注 2.1 (u_h, p_h) 是 N_S 方程的两重网格有限元解, 其中在细网格上求解的方程(24)式为定常 N_S 方程的线性化方程

引理 2.3(文献[5]) 假设 $f \in H^{-1}(\Omega)^2, h \leqslant h_0, D \subset\subset \Omega_0 \subset\subset \Omega, A.0 \sim A.4$ 也都成立, 且 $(w_h, q_h) \in X^h(\Omega) \times M^h(\Omega)$ 满足

$$\begin{cases} a(wh, v) - b(v, q_h) = (f, v), & \forall v \in X_0^h(\Omega_0), \\ b(wh, q) = 0, & \forall q \in M^h(\Omega_0), \end{cases} \quad (29)$$

则

$$\|wh\|_{1,D} + \|q_h\|_{0,D} \leq c(\|wh\|_{0,\Omega_0} + \|q_h\|_{-1,\Omega_0} + \|f\|_{-1,\Omega_0}). \quad (30)$$

下面开始定理 1 的证明. 首先我们考虑 (u^h, p^h) 与 (u_h', p_h') 的误差. 由算法以及 (u_h', p_h') 的定义, 我们得到对任意 $v \in X^h(\Omega_0)$, $q \in M^h(\Omega_0)$ 有

$$\begin{aligned} A(u^h - u_h', p^h - p_h'; v, q) = \\ N(u_H, u_h', v) - N(u_H, u_H, v) = N(u_H, u_h' - u_H, v). \end{aligned} \quad (31)$$

取 $(g, v) = N(u_H, u_h' - u_H, v)$, 可以将(31)式写为

$$\begin{cases} a_0(u^h - u_h', v) - b(v, p^h - p_h) = (g, v), & \forall v \in X_0^h(\Omega_0), \\ b(u^h - u_h', q) = 0, & \forall q \in M^h(\Omega_0). \end{cases} \quad (32)$$

由引理 2.3 及算法得到

$$\begin{aligned} \|u^h - u_h'\|_{1,D} + \|p^h - p_h'\|_{0,D} \leq c(\|u_h' - u_H\|_{0,\Omega_0} + \\ \|p_h' - p_H\|_{-1,\Omega_0} + \|e^h\|_{0,\Omega_0} + \|\tau^h\|_{-1,\Omega_0} + \|g\|_{-1,\Omega_0}). \end{aligned} \quad (33)$$

下面的工作主要就是(33)式右端的每一项进行估计. 首先前两项的估计由引理 2.2 比较容易得到.

$$\begin{aligned} \|u_h' - u_H\|_{0,\Omega_0} + \|p_h' - p_H\|_{-1,\Omega_0} \leq \\ \|u_h' - u_h\|_{0,\Omega_0} + \|u_h - u_H\|_{0,\Omega_0} + \|p_h' - p_h\|_{-1,\Omega_0} + \|p_h - p_H\|_{-1,\Omega_0} \leq \\ cH^{s+1}(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \|g\|_{-1,\Omega_0} = \sup_{v \in X^h(\Omega_0)} \frac{N(u_H, u_h' - u_H, v)}{\|v\|_1} \leq c\|u\|_{2,\Omega_0} \|u_h' - u_H\|_{0,\Omega_0} \leq \\ c\|u\|_{2,\Omega_0} (\|u_h' - u_h\|_{0,\Omega_0} + \|u_h - u\|_{0,\Omega_0} + \|u - u_H\|_{0,\Omega_0}) \leq \\ cH^{s+1}(\|u\|_{s+1,\Omega} + \|p\|_{s,\Omega}). \end{aligned} \quad (35)$$

接下来估计(33)式剩下的两项, 也就是 $\|e^h\|_{0,\Omega_0}$ 和 $\|\tau^h\|_{-1,\Omega_0}$. 我们通过 Aubin-Nitsche 对偶讨论来进行估计. 考虑 Stokes 方程的对偶问题:

$$\begin{cases} a_0(W, v) - b(v, Z) = (\phi, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega_0)^2, \\ b(W, q) = 0, & \forall q \in L_0^2(\Omega_0). \end{cases} \quad (36)$$

我们知道 $\forall \phi \in L^2(\Omega_0)$, 存在 $(W, Z) \in X(\Omega_0) \times M(\Omega_0)$ 满足(36)式并有 $\|W\|_{2,\Omega_0} + \|Z\|_{1,\Omega_0} \leq c\|\phi\|_{0,\Omega_0}$. 而且, 如果 $(W_h, Z_h) \in X^h(\Omega_0) \times M^h(\Omega_0)$ 满足(36)式, 则

$$\|W - W_h\|_{1,\Omega_0} + \|Z - Z_h\|_{0,\Omega_0} \leq ch\|\phi\|_{0,\Omega_0}. \quad (37)$$

取 $(v, q) = (e^h, \tau^h)$, 则

$$(e^h, \phi) = a_0(e^h, W_h) - b(W_h, \tau^h) + b(e^h, -Z_h). \quad (38)$$

由(17)式及 $a(\cdot, \cdot; \cdot, \cdot)$ 的定义, 得

$$\begin{aligned} (e^h, \phi) = (f, W_h) - a(u_H, p_H; W_h, -Z_h) = \\ a_0(u_h - u_H, W_h) - b(W_h, p_h - p_H) + b(u_h - u_H, -Z_h) + \\ N(u_h, u_h, W_h) - N(u_H, u_H, W_h). \end{aligned} \quad (39)$$

注意到

$$\begin{aligned} & a_0(u_h - u_H, W_H) - b(W_H, p_h - p_H) + b(u_h - u_H, -Z_h) + \\ & N(u_h, u_h, W_H) - N(u_H, u_H, W_H) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

结合(39)式,得到

$$\begin{aligned} (e^h, \phi) &= a_0(u_h - u_H, W_h - W) - b(W_h - W, p_h - p_H) + \\ & a_0(u_h - u_H, W - W_H) + b(W - W_H, p_h - p_H) + \\ & N(u_h - u_H, u_h, W_h - W_H) - N(u_H, u_H - u_h, W_h - W_H). \end{aligned} \quad (41)$$

由(37)和 $N(\cdot, \cdot, \cdot)$ 的估计式,得

$$\|e^h\|_{0, \Omega_0} \leqslant dH^{s+1}(\|u\|_{s+1, \Omega_0} + \|p\|_{s, \Omega_0}), \quad 0 \leqslant s \leqslant r. \quad (42)$$

最后,处理 $\|\eta^h\|_{-1, \Omega_0}$. 我们知道存在唯一解 $(\Psi, \Upsilon) \in H_0^1(\Omega_0)^2 \times L_0^2(\Omega_0)$ 满足

$$\begin{cases} a_0(\Psi, v) - b(v, \Upsilon) = 0, & \forall v \in H_0^1(\Omega_0)^2, \\ b(\Psi, q) = (\xi, q), & \forall q \in L_0^2(\Omega_0). \end{cases} \quad (43)$$

假设 (Ψ, Υ) 满足正则性假设 $\|\Psi\|_{2, \Omega_0} + \|\Upsilon\|_{1, \Omega_0} \leqslant c\|\xi\|_{1, \Omega_0}$, 而且如果 $(\Psi_h, \Upsilon_h) \in X_0^h(\Omega_0) \times M^h(\Omega_0)$ 为(43)式的有限元解,则有

$$\|\Psi - \Psi_h\|_{1, \Omega_0} + \|\Upsilon - \Upsilon_h\|_{0, \Omega_0} \leqslant ch\|\xi\|_{1, \Omega_0}. \quad (44)$$

于是由(43)式和(17)式,得

$$\begin{aligned} (\eta^h, \xi) &= b(\Psi_h, \eta^h) = a_0(e^h, \Psi_h) - (f, \Psi_h) + a_0(u_H, \Psi_h) - \\ & b(\Psi_h, p_H) + N(u_H, u_H, \Psi_h), \end{aligned} \quad (45)$$

$$a_0(e^h, \Psi_h) = b(e^h, \Upsilon_h) = -b(u_H, \Upsilon_h) = -b(u_H - u_h, \Upsilon_h). \quad (46)$$

注意到 (u_h, p_h) 的定义,则有

$$(f, \Psi_h) = a_0(u_h, \Psi_h) - b(\Psi_h, p_h) - N(u_h, u_h, \Psi_h). \quad (47)$$

结合(45)式、(46)式和(47)式,类似 e^h 的估计,得到

$$\begin{aligned} (\eta^h, \xi) &= N(u_H - u_h, u_H, \Psi_h) + N(u_h, u_H - u_h, \Psi_h) + a_0(u_H - u_h, \Psi_h - \Psi) + \\ & a_0(u_H - u_h, \Psi - \Psi_H) - b(\Psi_h - \Psi, p_H - p_h) - b(\Psi - \Psi_H, p_H - p_h) \leqslant \\ & cH^{s+1}(\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega})\|\xi\|_{1, \Omega}. \end{aligned}$$

因此

$$\|\eta^h\|_{-1, \Omega_0} \leqslant dH^{s+1}(\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega}), \quad 0 \leqslant s \leqslant r, \quad (48)$$

综上所述,由(33)式、(34)式、(35)式、(42)式和(48)式,定理1得证.

2.2 并行算法

由局部算法很容易得到新的并行算法,步骤如下

1) 求粗网格的解 $(u_H, p_H) \in X_0^H(\Omega) \times M^H(\Omega)$,

$$\begin{aligned} a_0(u_H, v) - b(v, p_H) + N(u_H, u_H, v) + b(u_H, q) &= (f, v), \\ \forall (v, q) \in X_0^H(\Omega) \times M^H(\Omega); \end{aligned} \quad (49)$$

2) 求局部细网格的修正值(并行) $(e_j^h, \eta_j^h) \in X_0^h(\Omega_j) \times M^h(\Omega_j)$, $(j = 1, 2, \dots, m)$ 使得

$\forall (v, q) \in X_0^h(\Omega_j) \times M^h(\Omega_j)$,

$$\begin{aligned} a_0(e_j^h, v) - b(v, \eta_j^h) + b(e_j^h, q) &= \\ (f, v) - a_0(u_H, v) + b(v, p_H) - b(u_H, q) - N(u_H, u_H, v); \end{aligned} \quad (50)$$

3) 校正

$$u^h \mid D_j = u_H + e_j^h, \quad p^h \mid D_j = p_H + \eta_j^h, \quad \text{在 } D_j \text{ 上}, \quad (51)$$

其中 $D_j \subset \subset \Omega_j \subset \subset \Omega, (j = 1, 2, \dots, m)$ 且 $\cup D_j = \Omega, D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$ (图 1)•

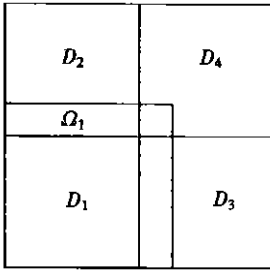


图 1 局部区域

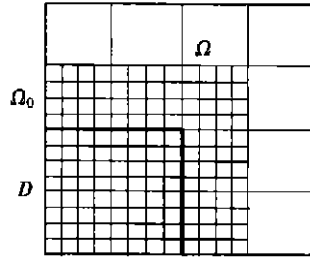


图 2 剖分

定理 2 假设 (u^h, p^h) 由并行算法得到, 则

$$\|u_h - u^h\|_{1, \Omega} + \|p_h - p^h\|_{0, \Omega} \leq cH^{s+1} (\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega}), \quad 0 \leq s \leq r, \quad (52)$$

$$\|u - u^h\|_{1, \Omega} + \|p - p^h\|_{0, \Omega} \leq c(h^s + H^{s+1}) (\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega}), \quad 0 \leq s \leq r, \quad (53)$$

其中式子左边的范数为对 D_j 分片定义•

证明 由定理 1, 得

$$\|u_h - u^h\|_{1, D_j} + \|p_h - p^h\|_{0, D_j} \leq cH^{s+1} (\|u\|_{s+1, \Omega} + \|p\|_{s, \Omega})$$

易得(52)式, 又由(14)式、(52)式得(53)式•

3 数值试验

本节给出局部算法的数值结果并进行分析, 下面是所用的算例• 区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, Navier-Stokes 方程的右端项为

$$\begin{aligned} f_1 &= -2\lambda y + 6\lambda x^2 + 12\lambda xy - 24\lambda x^2 y + 6\lambda y^2 - 36\lambda xy^2 + 36\lambda x^2 y^2 + 24\lambda xy^3 - \\ &\quad 24\lambda x^2 y^3 + 24\lambda x^3 y - 12\lambda x^4 y - 4\lambda y^3 - 12\lambda x^3 + 6\lambda x^4 + 1, \\ f_2 &= 2\lambda x - 6\lambda x^2 - 12\lambda xy + 36\lambda x^2 y - 6\lambda y^2 + 24\lambda xy^2 - 36\lambda x^2 y^2 - 24\lambda xy^3 - \\ &\quad 24\lambda x^3 y + 24\lambda x^3 y^2 + 12\lambda y^3 + 4\lambda x^3 + 12\lambda y^4 x - 6\lambda y^4, \end{aligned}$$

此方程对应真解为

$$\begin{cases} u_1 = x^2(1-x)^2 y(1-y)(1-2y), \\ u_2 = -y^2(1-y)^2 x(1-x)(1-2x), \\ p = x - 0.5, \end{cases} \quad (54)$$

真解当然满足 $\text{div} u = 0$ 和 $p \in M$ • 我们对速度 u 采用双二次八节点等参元, 对压力 p 采用双线性等参元• 区域剖分参见图 2, 其中 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $\Omega_0 = [0, 3/4] \times [0, 3/4]$, $D = [0, 1/2] \times [0, 1/2]$, $H = 1/4, h = 1/16$ 剖分满足 $h = H^2$, Ω_0 的边长为 $1/2 + H$, D 的边长为 $1/2$ • 在粗网格上, 采用 Newton 迭代法求解, 得到 Ω 的粗网格上的解 (u_H, p_H) • 再在 Ω_0 内的细网格上, 求 N_S 方程线性化问题在细网格上的修正值, 即残差的线性逼近, 局部修正便得到解•

首先验证局部算法对于 N_S 方程的适用程度 ($H = 1/4, h = 1/16$), 对不同的粘性系数分别进行计算, 得到的结果如下 (其他数值试验中粘性系数 λ 为 0.01)

下面实验,是对多种不同精度的网格剖分,计算所得区域 D 与 $\Omega_0 \setminus D$ 的相对误差(表 2)。

从表 2 中我们很容易发现区域 $\Omega_0 \setminus D$ 比 D 中的相对误差要大得多,也就是说区域 D 在整体区域中的边界附近的误差比较大,这正是算法的由来。

下面是局部并行算法与标准有限元法的计算时间的比较,局部并行算法在计算时间上有非常明显的优越性(见表 3)。

表 1 不同粘性系数下的计算

λ	误差 E	
	$\ u - u^h\ _{1, \Omega_0^+} + \ p - p^h\ _{0, \Omega_0}$	$\frac{\ u - u^h\ _{1, \Omega_0^+} + \ p - p^h\ _{0, \Omega_0}}{\ u\ _{1, \Omega_0^+} + \ p\ _{0, \Omega_0}}$
1	0.001 597 08	0.005 329 04
0.1	0.000 614 278	0.002 049 69
0.01	0.000 547 266	0.001 826 09
0.001	0.000 563 353	0.001 879 77
0.000 1	0.001 372 33	0.004 579 11
0.000 05	0.002 592 56	0.008 650 72
0.000 02	0.006 033 24	0.020 131 4

表 2 相对误差的比较

H	h	$\frac{\ u - u^h\ _{1, D^+} + \ p - p^h\ _{0, D}}{\ u\ _{1, D^+} + \ p\ _{0, D}}$	$\frac{\ u - u^h\ _{1, \Omega_0 \setminus D^+} + \ p - p^h\ _{0, \Omega_0 \setminus D}}{\ u\ _{1, \Omega_0 \setminus D^+} + \ p\ _{0, \Omega_0 \setminus D}}$
1/4	1/16	0.005 329 04	0.011 826 7
1/6	1/36	0.001 208 35	0.003 139 42
1/8	1/64	0.000 461 962	0.002 394 38
1/10	1/100	0.000 239 63	0.001 988 28

表 3 时间比较

h	时间 t / min	
	局部并行算法	标准有限元
1/16	0.033 333 3	1.66 67
1/36	1.166 67	114.83

表 4 误差相对网格精度的阶

H_2	H_1		
	1/6	1/8	1/10
1/4	3.726 7	3.574 7	3.422 1
1/6		3.360 4	3.180 4
1/8			2.948 3

为了验证误差与网格剖分密度 H 的关系,根据表 2 中的 D 区域的相对误差进行对数计算得

表 4 右下的 6 个数值为 $\lg((E_1/E_2)/(H_1/H_2))$,其中 E_1 和 E_2 为 H_1 和 H_2 对应的相对误差(表 2)。从表 4 可知误差 $\|u - u^h\| + \|p - p^h\|$ 关于 H 的阶数在 3 附近,要好于理论所得的 2。此种情况在 [5] 中也有出现。这里可能是由于采用的算例、区域形状或由于方程的一些其它性质引起的。即便如此,数值结果仍然支持我们误差分析的结果,只是在本文的误差分析中,误差相对 H 的阶可能还未达到理论上的极限。这可以作为以后进一步研究的问题。

[参 考 文 献]

[1] XU Jin_chao. A novel two-grid method for semilinear equations[J]. SIAM J Sci Comput, 1994, 15(1): 231_237.

- [2] XU Jin_chao. Two_Grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, **33**(5): 1759_1777.
- [3] XU Jin_chao, ZHOU Ai_hui. Local and parallel finite element algorithms based on two_grid discretizations[J]. Math Com p, 2000, **69**(231): 881_909.
- [4] XU Jin_chao, ZHOU Ai_hui. Local and parallel finite elment algorithms based on two_grid discretizations for nonlinear problems[J]. Adv Com p Math, 2001, **14**(4): 293_327.
- [5] HE Yin_nian, XU Jin_chao, ZHOU Ai_hui. Local and parallel finite element algorithms for the Stokes Problem[J]. Numerische Mathematik. (in Press)
- [6] Adams R. Sobolev Space[M]. New York: Academic Press Inc, 1975.
- [7] Girault V, Raviart P A. Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [8] 任春风, 马逸尘. Navier-Stokes 方程流函数形式两重网格算法的误差分析[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(7): 689_696.
- [9] REN Chun_feng, MA Yi_chen, YING Gen_jun. A two_grid method with backtracking technique for the Navier-Stokes equations[J]. Num Math J Chinese Uni, 2003, **25**(3): 193_204.

Local and Parallel Finite Element Algorithms Based on Two_Grid Discretization for Steady Navier-Stokes Equations

MA Fei_yao¹, MA Yi_chen¹, WO Wei_feng²

(1. College of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China;

2. Center for Nonlinear Studies, Northwest University, Xi'an 710069, P. R. China)

Abstract: Local and parallel finite element algorithms based on two_grid discretization for Navier-Stokes equations in two dimension are presented. Its basis is a coarse finite element space on the global domain and a fine finite element space on the subdomain. The local algorithm consists of finding a solution for a given nonlinear problem in the coarse finite element space and a solution for a linear problem in the fine finite element space, then it drops the coarse solution of the region near the boundary. At last, by overlapping domain decomposition, the parallel algorithms are obtained. The error of these algorithms are analyzed and some error estimates are got which are better than that of the standard finite element method. The numerical experiments are given too. By analyzing and comparing these results, it is shown that these algorithms are correct and highly efficient.

Key words: Navier-Stokes equation; finite element method; two_grid; local; parallel