

# 功能梯度材料杆的热后屈曲分析<sup>\*</sup>

赵凤群<sup>1,2</sup>, 王忠民<sup>1</sup>, 刘宏昭<sup>2</sup>

(1. 西安理工大学 理学院, 西安 710048;

2. 西安理工大学 机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

(沈惠申推荐)

**摘要:** 对两端不可移简支陶瓷-金属功能梯度材料(FGM)杆建立了在热载荷作用下的非线性控制微分方程, 采用打靶法分析了由二氧化锆和 Ti-6Al-4V 两种材料组成的 FGM 杆的热后屈曲行为。首先给出了在均匀温度场中不同梯度指标的 FGM 杆的热后屈曲平衡路径, 并与二氧化锆和 Ti-6Al-4V 两种均质材料杆的相应特性进行了比较, 同时讨论了不同端部转角下梯度指标对 FGM 杆稳定性的影响; 然后分别研究了在温差一定、下表面温度变化时和在下表面温度一定、温差变化时 FGM 杆的热后屈曲特性, 也与两种均质材料杆的后屈曲特性进行了比较。

**关键词:** 功能梯度材料杆; 热后屈曲; 打靶法

**中图分类号:** O343      **文献标识码:** A

## 引 言

梁、板、壳是工程应用中常用的基本结构, 对这些结构在机械载荷和热载荷作用下的非线性稳定性研究受到了人们的广泛关注。在机械载荷作用下可伸长均质杆的后屈曲特性已有许多学者进行了研究, 如 Stemple<sup>[1]</sup>, Par<sup>[2]</sup>, Cummadi<sup>[3]</sup>, Sampaio<sup>[4]</sup>, Filipich<sup>[5]</sup>。李世荣<sup>[6-7]</sup>、Coffin<sup>[8]</sup>分别研究了在热载荷作用下均质杆的后屈曲问题。功能梯度材料(functionally graded material, FGM)是一种非均质复合材料<sup>[9]</sup>, 在航空航天、汽车、生物及核工业等领域有广阔的应用前景。对 FGM 结构热后屈曲特性研究的成果主要集中在 FGM 板、壳方面<sup>[10]</sup>, 如 Wu<sup>[11]</sup>研究了简支中厚矩形板的热后屈曲问题, Shen<sup>[12]</sup>研究了 FGM 薄圆柱壳在均匀热载荷作用下的热后屈曲行为, Chakraborty 和 Gopalakrishnan<sup>[13]</sup>用应力函数形式给出了 FGM 梁在热载荷作用下的控制方程, Liviu<sup>[14]</sup>等人研究了 FGM 梁在高温环境下的振动与稳定性问题。本文基于 Kirchhoff 大变形理论, 对两端不可移简支 FGM 杆建立了在热载荷作用下的非线性控制微分方程, 采用打靶法对杆的热后屈曲特性进行了研究, 得到了不同温度状态下各种热后屈曲平衡路径, 并与各均质材料杆的相应性态进行了比较, 同时分析了当梯度指标变化时, FGM 杆在一定的变形状态下的热后屈曲特性。

\* 收稿日期: 2005\_11\_03; 修订日期: 2006\_10\_13

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50575180); 陕西省自然科学基金基础研究计划资助项目(2005A18)

作者简介: 赵凤群(1963—), 女, 陕西淳化人, 教授, 硕士(联系人, Tel: + 86\_29\_82313690; E\_mail: zhaofq@xaut.edu.cn)。

# 1 功能梯度材料及其物性参数

功能梯度材料是一种新型非均匀复合材料,与一般的复合材料相比,其显著特点是,在宏观尺度上各组份材料的体积含量在空间位置上是连续变化的,其物理性能没有突变,因而可较好的避免或降低应力集中现象。要对功能梯度材料梁、板、壳等结构进行研究,首先必须知道其等效的物性参数(如弹性模量,热膨胀系数,热传导系数等)。通常的做法是借用细观力学的已有成果来预测功能梯度材料的等效物性参数。最简单的是基于 Voigt 等应变假设的线性混合率,即

$$X = \sum_{j=1}^k X_j V_j, \tag{1}$$

其中  $X_j$  和  $V_j$  分别是第  $j$  种材料的物性参数和体积分数,  $k$  是组份材料的数目,且满足

$$\sum_{j=1}^k V_j = 1. \tag{2}$$

假设  $k = 2$ , 即 FGM 是由两种材料组成,如陶瓷和金属。 $x$  为沿杆的轴线方向坐标,  $y$  为沿厚度方向坐标,如图 1 所示,杆上表面是陶瓷,下层是金属。

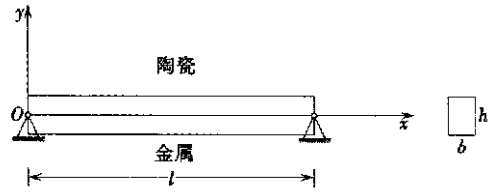


图 1 两端不可移简支 FGM 杆

假设陶瓷材料的体积分数为<sup>[10]</sup>

$$V_c = \left[ \frac{y + h/2}{h} \right]^n, \quad \left[ -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2} \right], \tag{3}$$

其中  $h$  为杆截面的高度,  $n$  称为 FGM 的梯度指标。由式(1)、式(2)及式(3)得到 FGM 的等效物性参数

$$X = X_c V_c + X_m (1 - V_c) = X_c \left[ \frac{y + h/2}{h} \right]^n + X_m \left[ 1 - \left[ \frac{y + h/2}{h} \right]^n \right], \tag{4}$$

其中  $X_c$  及  $X_m$  分别表示陶瓷和金属材料的物性参数。

FGM 杆通常处于非均匀温度场中,且陶瓷侧温度高于金属侧温度。这里假设两侧温度都是均匀分布的,分别记为  $T_c$  和  $T_m$ , 这时杆内温度仅沿厚度方向变化,且满足如下热传导方程及边界条件

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[ k(y) \frac{dT}{dy} \right] = 0 & \left[ -\frac{h}{2} < y < \frac{h}{2} \right], \\ T \left[ \frac{h}{2} \right] = T_c, T \left[ -\frac{h}{2} \right] = T_m, \end{cases} \tag{5}$$

其中  $T(y)$  是温度分布函数,  $k(y)$  是 FGM 的热传导系数,由式(4)得

$$k(y) = k_c \left[ \frac{y + h/2}{h} \right]^n + k_m \left[ 1 - \left[ \frac{y + h/2}{h} \right]^n \right], \tag{6}$$

其中  $k_c$  和  $k_m$  分别是陶瓷和金属的热传导系数。

用幂级数法得式(5)的解为

$$T(y) = T_m + T_d G(y), \tag{7}$$

其中

$$T_d = T_c - T_m, \quad G(y) = \frac{1}{C} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(k_c - k_m)^i}{(i \times n + 1) k_m^i} \left[ \frac{y + h/2}{h} \right]^{i \times n + 1},$$

$$C = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(k_c - k_m)^i}{(i \times n + 1) k_m^i}$$

## 2 控制微分方程组

设杆长为  $l$ , 记杆在未变形时轴线上点为  $(x, 0)$ ,  $x \in [0, l]$ , 变形后轴线上点为  $(x + u, w)$ , 其中  $u(x), w(x)$  分别为点  $(x, 0)$  在  $x, y$  方向的位移, 假设杆变形后轴线仍在  $xOy$  面内, 且变形服从 Kirchhoff 直法线假设, 又设  $s(x)$  为变形后的轴线弧长,  $R(x)$  为轴线的伸长率,  $\theta(x)$  为弹性曲线的切线与  $x$  轴正向夹角, 则由轴线可伸长杆的大变形理论<sup>[12]</sup>, 可得下列几何关系

$$\frac{ds}{dx} = R(x), \quad \frac{du}{dx} = R(x) \cos \theta - 1, \quad \frac{dw}{dx} = R(x) \sin \theta, \quad (8)$$

$$R = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}$$

由 Kirchhoff 平截面假设, 横截面上任意一点的正应变为

$$\varepsilon(x, y) = R - 1 - \frac{d\theta}{dx}y \quad \left[-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}\right]. \quad (9)$$

FGM 杆的热应力-应变关系为

$$\sigma(x, y) = E(y) [\varepsilon(x, y) - \alpha(y)T(y)], \quad (10)$$

其中  $E(y), \alpha(y)$  分别为 FGM 杆的弹性模量和热膨胀系数, 由式(4)知

$$E(y) = E_c \left(\frac{y + h/2}{h}\right)^n + E_m \left[1 - \left(\frac{y + h/2}{h}\right)^n\right],$$

$$\alpha(y) = \alpha_c \left(\frac{y + h/2}{h}\right)^n + \alpha_m \left[1 - \left(\frac{y + h/2}{h}\right)^n\right],$$

其中  $E_c, \alpha_c$  和  $E_m, \alpha_m$  分别为陶瓷材料和金属材料的弹性模量和热膨胀系数。

轴力  $N$  和弯矩  $M$  为

$$N = \iint_A \sigma dA = \iint_A E(y) \left[ R - 1 - \frac{d\theta}{dx}y - \alpha(y)(T_m + T_d G(y)) \right] dA, \quad (11)$$

$$M = \iint_A \sigma y dA = \iint_A E(y) y \left[ R - 1 - \frac{d\theta}{dx}y - \alpha(y)(T_m + T_d G(y)) \right] dA. \quad (12)$$

记

$$e_1 = E_m/E_c, \quad e_2 = \alpha_m/\alpha_c, \quad e_3 = k_m/k_c,$$

$$A_1 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) dt, \quad A_2 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) t dt, \quad A_3 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) f(t, n, e_2) dt,$$

$$A_4 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) f(t, n, e_2) t dt, \quad A_5 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) t^2 dt,$$

$$A_6 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) f(t, n, e_2) t^2 dt, \quad A_7 = \int_{-1}^1 f(t, n, e_1) f(t, n, e_2) g(t, n, e_3) dt,$$

其中函数

$$f(t, n, e_i) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^n + e_i \left[1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^n\right], \quad i = 1, 2 \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

$$g(t, n, e_3) = \frac{1}{C} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(1-e_3)^i}{(i \times n + 1) e_3^i} \left(\frac{t+1}{2}\right)^{i \times n + 1}.$$

这时式(11)、式(12)可分别写成

$$N = \frac{bE_c h A_1}{2}(R-1) - \frac{bE_c h^2 A_2}{4} \frac{d\theta}{dx} - \frac{bE_c h A_3 \alpha_c}{2} T_m - \frac{bE_c h A_4 \alpha_c}{2} T_d, \quad (13)$$

$$M = \frac{bE_c h^2 A_2}{4}(R-1) - \frac{bE_c h^3 A_5}{8} \frac{d\theta}{dx} - \frac{bE_c h^2 A_6 \alpha_c}{4} T_m - \frac{bE_c h^2 A_7 \alpha_c}{4} T_d. \quad (14)$$

轴力  $N$  和弯矩  $M$  满足平衡方程

$$N + p \cos \theta = 0, \quad (15)$$

$$M - pw = 0, \quad (16)$$

其中  $p$  为杆端部水平约束反力。将式(13)、式(14)代入式(15)、式(16),得

$$R = 1 + \frac{1}{A_2^2 - A_1 A_5} \left[ (A_2 A_6 - A_3 A_5) \alpha_c T_m + (A_2 A_7 - A_4 A_5) \alpha_c T_d + \frac{2A_5}{E_c b h^2} p \cos \theta + \frac{4A_2}{E_c b h^2} p w \right], \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{A_2^2 - A_1 A_5} \left[ \frac{2(A_1 A_6 - A_3 A_2)}{h} \alpha_c T_m + \frac{2(A_1 A_7 - A_4 A_2)}{h} \alpha_c T_d + \frac{8A_1}{E_c b h^3} p w + \frac{4A_2}{E_c b h^2} p \cos \theta \right]. \quad (18)$$

引入无量纲量

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad s = \frac{s}{l}, \quad u = \frac{u}{l}, \quad w = \frac{w}{l}, \quad \delta = \frac{l}{h},$$

$$p = \frac{12l^2 p}{h^3 b E_c}, \quad \tau_m = 12\delta^2 \alpha_c T_m, \quad \tau_d = 12\delta^2 \alpha_c T_d,$$

则由方程(8)、方程(18)得该问题的无量纲形式的非线性控制微分方程组

$$\begin{cases} \frac{ds}{d\xi} = R, \quad \frac{du}{d\xi} = R \cos \theta - 1, \quad \frac{dw}{d\xi} = R \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{1}{A_2^2 - A_1 A_5} \left[ \frac{A_1 A_6 - A_2 A_3}{6\delta} \tau_m + \frac{A_1 A_7 - A_2 A_4}{6\delta} \tau_d + \frac{2A_1}{3} p w + \frac{A_2}{3\delta} p \cos \theta \right], \end{cases} \quad (19)$$

再由式(17)得

$$R = 1 + \frac{1}{A_2^2 - A_1 A_5} \left[ \frac{A_2 A_6 - A_3 A_5}{12\delta^2} \tau_m + \frac{A_2 A_7 - A_4 A_5}{12\delta^2} \tau_d + \frac{A_2}{3\delta} p w + \frac{A_5}{6\delta^2} p \cos \theta \right].$$

对于两端不可移简支杆,利用变形的对称性可得无量纲形式的边界条件

$$s(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad w(0) = 0, \quad (20a)$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad (20b)$$

上面的边值问题有3个参数:无量纲下表面温度  $\tau_m$ 、温差  $\tau_d$  和端部水平约束反力  $p$ 。

### 3 数值结果及讨论

记  $\theta(0) = \beta$ , 为端部横截面转角。可采用这样的方法求解上述边值问题:对给定的  $\beta$  及3个参数  $\tau_m$ 、 $\tau_d$ 、 $p$  中的一个,首先用 Runge-Kutta 法求解初值问题(19)和(20a),然后让其满足边界条件(20b),即满足

$$u\left(\frac{1}{2}, \beta, \tau_m, \tau_d, p\right) = 0, \quad \theta\left(\frac{1}{2}, \beta, \tau_m, \tau_d, p\right) = 0, \quad (21)$$

求解非线性方程组(21),即可得到  $\beta$ 、 $\tau_m$ 、 $\tau_d$ 、 $p$  之间的关系。

本文以陶瓷  $ZrO_2$  和金属  $Ti_6Al_4V$  组成的 FGM 杆为分析算例。  $ZrO_2$  和  $Ti_6Al_4V$  的物性参数为<sup>[15]</sup>:  $E_c = 151.0 \text{ GPa}$ ,  $E_m = 116.7 \text{ GPa}$ ,  $\alpha_c = 10.0 \times 10^{-6}/\text{K}$ ,  $\alpha_m = 9.5 \times 10^{-6}/\text{K}$ ,  $k_c = 2.09 \text{ W/mK}$ ,  $k_m = 7.50 \text{ W/mK}$ 。 则  $e_1 = E_m/E_c = 0.7728$ ,  $e_2 = \alpha_m/\alpha_c = 0.95$ ,  $e_3 = k_m/k_c = 3.5885$ , 杆中点挠度为  $f = w(1/2) \cdot \delta$ 。

从前面讨论我们知道,梯度指标  $n = 0$  对应陶瓷材料杆,  $n \rightarrow \infty$  对应金属材料杆。 为叙述简单起见,记  $\beta$ 、 $p$ 、 $f$  分别为 FGM 杆的端部横截面转角,无量纲端部水平约束反力和中点挠度,  $\beta_c$ 、 $p_c$ 、 $f_c$  分别为陶瓷材料杆的相应数值,  $\beta_m$ 、 $p_m$ 、 $f_m$  分别为金属材料杆的相应数值。

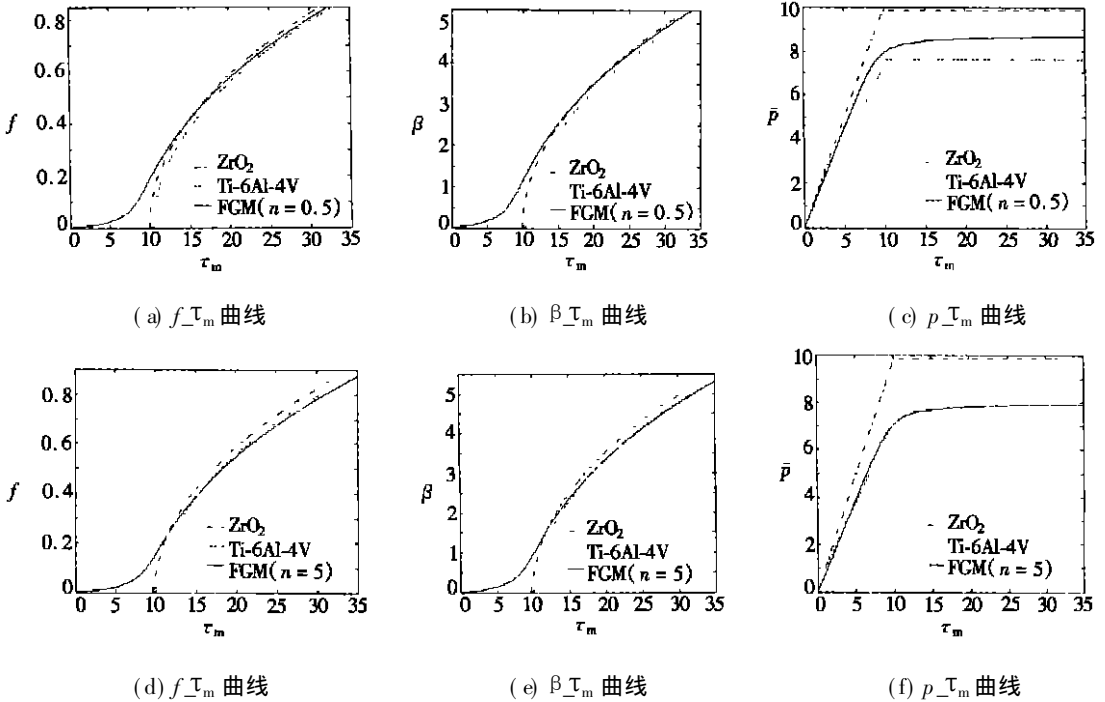
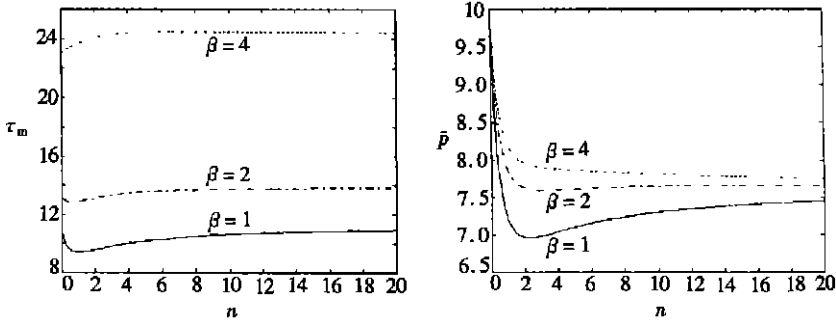


图2  $\tau_d = 0$  时,不可移简支  $ZrO_2$  杆,  $Ti_6Al_4V$  杆及 FGM 杆的后屈曲平衡路径

图2给出了当杆上、下表面温度相等,即无量纲温差  $\tau_d = 0$  时,不可移简支陶瓷、金属材料均质杆和 FGM 杆随无量纲温度  $\tau_m$  变化的各种后屈曲平衡路径。图2(a)至图2(c)中 FGM 杆的梯度指标为  $n = 0.5$ ,图2(d)至图2(f)中  $n = 5$ 。  $\beta$  的单位是度,所有无量纲量均是以陶瓷材料为基准来表示的,陶瓷材料杆的热后屈曲特性与文献[6]中均质弹性杆的结论一致,其失稳的临界温度为  $(\tau_m)_{cr} = 9.8696$ 。从图2(a)至图2(b)和图2(d)至图2(e)可以看出,对于均质材料杆,当  $\tau_m > (\tau_m)_{cr}$  时,杆才发生屈曲变形,而对于 FGM 杆,即使上、下表面无温差,当无量纲温度  $\tau_m > 0$  时,杆即发生屈曲变形。从图2(a)可以看出,当  $\tau_m < 15.014$  时,FGM 杆( $n = 0.5$ )的中点挠度  $f$  均大于  $f_c$  和  $f_m$ ,当  $\tau_m > 15.014$  时  $f$  介于  $f_c$  和  $f_m$  之间;从图2(d)可以看出,当  $\tau_m$  大约在  $[11.578, 15.771]$  变化时,FGM 杆( $n = 5$ )中点挠度  $f$  介于  $f_c$  和  $f_m$  之间,当温度继续升高,即当  $\tau_m > 15.771$  时,  $f$  小于  $f_c$  和  $f_m$ 。从图2(b)可以看出,当  $\tau_m < 17.665$  时,FGM 杆( $n = 0.5$ )的端部转角  $\beta$  大于  $\beta_c$  和  $\beta_m$ ,当  $\tau_m > 17.665$  时  $\beta$  介于  $\beta_c$  和  $\beta_m$  之间;从图2(e)可以看出,当  $\tau_m$  大约在  $[11.913, 19.812]$  变化时,FGM 杆( $n = 5$ )的端部转角  $\beta$  介于  $\beta_c$  和  $\beta_m$  之间,当温度继续升高,即当  $\tau_m > 19.812$  时,  $\beta$  几乎与  $\beta_m$  重合。从图2(c)、图2(f)可以看出,FGM 杆

的端部水平约束反力  $p$  基本上介于两种均质材料之间。

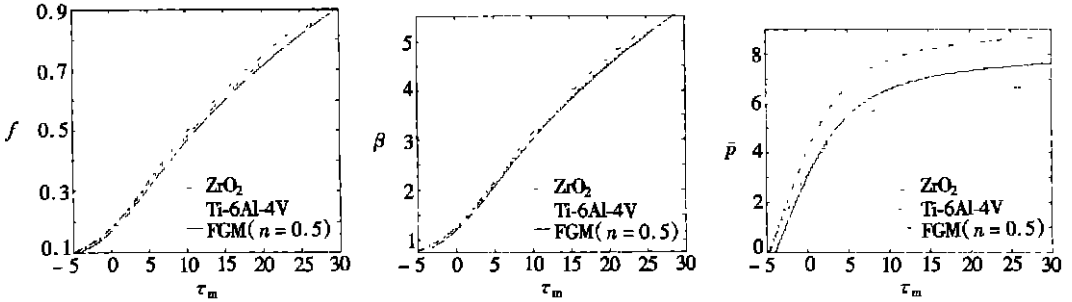
从以上讨论可以看出,不同梯度指标的 FGM 杆其热后屈曲特性有所不同。图 3(a) 至图 3(b) 给出了当  $\tau_d = 0, \beta = 1^\circ, \beta = 2^\circ, \beta = 4^\circ$  时,  $n_p$  和  $n_{\tau_m}$  变化曲线。从图 3 可以看出,在均匀温度场中,对于较小的变形(如  $\beta = 1^\circ$ ),FGM 杆的温度参数  $\tau_m$  和端部约束力参数  $p$  随  $n$  的取值不同可以在两种均质材料杆的相应数值左右摆动,当  $n \rightarrow \infty$  达到极限值;而  $\beta$  较大时(如  $\beta = 4^\circ$ ),FGM 杆的  $\tau_m$  和  $p$  一定在两种均质材料之间,并随  $n$  的增大从陶瓷材料趋向于金属材料。



(a)  $n_{\tau_m}$  曲线 (b)  $n_p$  曲线

图 3 当  $\tau_d = 0, \beta = 1^\circ, \beta = 2^\circ, \beta = 4^\circ$  时,  $n_p, n_{\tau_m}$  变化曲线

图 4(a) 至图 4(c) 给出了温差  $\tau_d = 10$  时,两种均质材料杆和 FGM 杆( $n = 0.5$ ) 随  $\tau_m$  变化的各种屈曲平衡路径,这时均质材料杆已无失稳临界值。从图 4 中可以看出,在同一温度  $\tau_m$  下,FGM 杆的变形均小于两种均质材料杆(如图 4(a), 图 4(b));当  $\tau_m < 1.133$  时, $p$  均小于  $p_c$  和  $p_m$ ,当  $\tau_m > 1.133$  时, $p$  介于  $p_c$  和  $p_m$  之间(如图 4(c))。同时可以看出,在同一温差下,下表面温度越大,变形也越大。



(a)  $f_{\tau_m}$  曲线 (b)  $\beta_{\tau_m}$  曲线 (c)  $p_{\tau_m}$  曲线

图 4  $\tau_d = 10$  时,不可移简支  $ZrO_2$  杆,  $Ti_6Al_4V$  杆及 FGM 杆的后屈曲平衡路径

图 5(a) 至图 5(c) 给出了下表面温度  $\tau_m$  一定( $\tau_m = 0, \tau_m = 5, \tau_m = 10$ ),温差  $\tau_d$  变化时简支 FGM 杆( $n = 0.5$ ) 的各种后屈曲平衡路径。计算结果表明,上、下表面温差越大,发生屈曲变形越大。从图 5(c) 可以看出,当  $\tau_m = 0, \tau_d \in [0, 20.0442]$  时,随着温差的升高, $p$  越大,当  $\tau_d$  超过 20.0442 时,随着温差的升高, $p$  反而越小。当  $\tau_m = 5$  时有类似情况。但当  $\tau_m = 10$  时,随着温差的增大, $p$  一直都在减小。

## 4 结 论

1) 当上、下表面无温差时,分析了两种均质材料杆及 FGM 杆随温度变化的各种热后屈曲

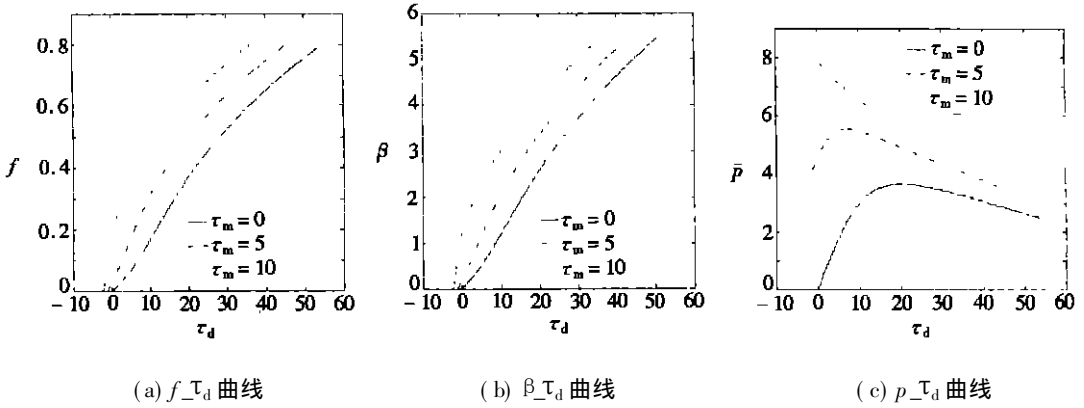


图5 下表面温度一定时不可移简支 FGM 杆的后屈曲平衡路径

平衡路径。可以看出,当变形较大时,FGM 杆的屈曲温度、杆端纵向反力和中点挠度均在两种均质材料杆之间,并随着梯度指标的增大向金属材料无限靠近。

2) 当上、下表面有温差时,分析了两种均质材料杆及 FGM 杆随温度变化的各种热后屈曲平衡路径。在同样的温度条件下,FGM 杆的变形均小于相同条件下的均质材料杆的变形,杆端纵向反力在小变形下也小于均质材料杆的相应数值。从而可以看出在有温差情形下 FGM 杆的稳定性比相应均质材料杆的好。

3) 在下表面温度一定,而温差发生变化时分析了 FGM 杆的热后屈曲特性,考察了不可移简支 FGM 杆对不同温差的热承载能力,可见温差对其屈曲特性影响显著。

### [参 考 文 献]

- [1] Stemple T. Extensible beam-columns: an exact theory[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1990, 25(6): 615-623.
- [2] Pai P F, Palazotto A N, Greer Jr J M. Polar decomposition and appropriate strains and stresses for nonlinear structural analysis[J]. Comput Struct, 1998, 66(6): 823-840.
- [3] Gummadi L N B, Palazotto A N. Large strain analysis of beams and arches undergoing large rotations[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1998, 33(4): 615-645.
- [4] Sampaio R, Almeida M P. Buckling of extensible rods[J]. Revista Brasileira de Ciencias Mecanicas, 1985, 7(3): 373-385. (in Portuguese)
- [5] Filipich C P, Rosales M B. A further study on the post-buckling of extensible elastic rods[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2000, 35(6): 997-1022.
- [6] 李世荣, 程昌钧. 加热弹性杆的热后屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(2): 119-125.
- [7] 李世荣, 程昌钧, 周又和. 横向非均升温下弹性梁的热后屈曲[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(5): 455-460.
- [8] Coffin D W, Bloom F. Elastica solution for the hygrothermal buckling of beam[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1999, 34(6): 934-947.
- [9] Koizumi M. The concept of FGM. Ceramic transitions[J]. Functionally Graded Materials, 1993, 34: 3-10.
- [10] 沈惠申. 功能梯度复合材料板壳结构的弯曲、屈曲和振动[J]. 力学进展, 2004, 34(1): 53-60.
- [11] WU Lan-he. Thermal buckling of simply supported moderately thick rectangular FGM plate[J]. Composite Structures, 2004, 64(2): 211-218.
- [12] SHEN Hui-shen. Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temper-

- ature\_dependent properties[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, **41**: 1961\_1974.
- [13] Chakraborty A, Gopalakrishnan S. A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(10): 2421\_2448.
- [14] Liviu Librescu, Sang\_Yong Oh, Ohseop Song. Thin\_walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability[J]. Journal of Thermal Stresses, 2005, **28**(6): 649\_712.
- [15] Obata Y, Noda N. Unsteady thermal stresses in a functionally gradient material plate(Analysis of one\_dimensional unsteady heat transfer problem) [J]. Trans J SME, 1993, **59**(560): 1090\_1096.

## Thermal Post\_buckling Analyses of Functionally Graded Material Rod

ZHAO Feng\_qun<sup>1,2</sup>, WANG Zhong\_min<sup>1</sup>, LIU Hong\_zhao<sup>2</sup>

(1. School of Science, Xi'an University of Technology,  
Xi'an 710048, P. R. China;

2. School of Mechanical and Instrument Engineering,  
Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P. R. China)

**Abstract:** The non\_linear governing differential equations of immovably simply supported functionally graded material (FGM) rod subjected to thermal loads were derived. The thermal post\_buckling behaviors of FGM rod made of ZrO<sub>2</sub> and Ti\_6Al\_4V were analyzed by shooting method. Firstly, the thermal post\_buckling equilibrium paths of the FGM rod with different gradient index in the uniform temperature field were plotted, and compared with the behaviors of the homogeneous rods made of ZrO<sub>2</sub> and Ti\_6Al\_4V materials respectively. For given value of end rotation angles, the influence of gradient index on the thermal post\_buckling behaviors of FGM rod was discussed. Secondly, the thermal post\_buckling characteristics of the FGM rod were analyzed when the temperature difference parameter is changing while the bottom temperature parameter remains constant, and when the bottom temperature parameter is changing while the temperature difference parameter remains constant, and compared with the characteristics of the two homogeneous material rods.

**Key words:** functionally graded material rod; thermal post\_buckling; shooting method