

基于 Novozhilov 理论连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计

张 剑¹, 叶见曙¹, 赵新铭²

(1. 东南大学 交通学院, 南京 210096;
2. 南京航空航天大学 土木工程研究所, 南京 210016)

(傅衣铭推荐)

摘要: 推导了基于 Novozhilov 理论的简支弯箱有限曲条控制方程, 并结合柔度法解决了连续弯箱的求解问题。建立了连续弯箱位移参数的动态 Bayes 误差函数, 推导了相应的动态 Bayes 均值和方差表达式, 提出步长的一维自动寻优方案后, 结合共轭梯度法研究了连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计方法, 同时给出了连续弯箱位移参数具体估计步骤。通过典型算例分析, 总结了连续弯箱位移参数先验信息准确性判定方法及位移参数动态 Bayes 随机估计的其它重要结论。

关键词: 位移参数; Bayes 估计; Novozhilov 理论; 连续弯箱

中图分类号: O221.2; U448.27 **文献标识码:** A

引 言

箱截面因为具有抗扭刚度大、自重轻等优点, 在实际工程中有了广泛应用。且随着土木工程、桥梁工程的发展和施工技术的先进, 大跨径弯箱梁应用的越来越多^[1]。对于连续弯箱而言, 作精确空间分析是复杂的^[2,4], 而有限曲条法在分析弯箱时稳定性、计算精度都能满足要求, 且要求输入的参数少, 成为弯箱的有力计算工具^[5,6]。即便如此, 弯箱位移参数必须输入, 否则无法进行结构分析。然而, 要适时准确把握连续弯箱位移参数并非易事, 其往往由实验得出, 难以考虑随机因素的影响, 有时不能准确地反映实际情况。因此, 如能根据不同测量次数及不同空间位置的弯箱位移实测值动态地估计位移参数, 则有助于更准确地进行结构预测分析。参数估计理论在实际工程中已有一些应用, 但主要集中在参数的静态估计研究^[7-9], 且估计规律还有待进一步探讨。在现有的研究成果中, 尚未有连续弯箱位移参数的动态估计成果出现。

为此, 本文针对连续弯箱结构, 研究有限曲条法和柔度法联合求解方法。并建立连续弯箱位移参数的动态 Bayes 误差函数, 推导相应的动态 Bayes 均值和方差公式。提出步长的自动寻优方案, 并结合共轭梯度法, 研究连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计问题, 总结出连续弯箱位移参数的动态估计规律。

收稿日期: 2005_09_20; 修订日期: 2006_10_30

作者简介: 张剑(1978), 男, 安徽青阳人, 博士(联系人: Tel: + 86_25_85159871; E_mail: jianzhang78@126.com)

1 连续弯箱有限曲条柔度法求解

1.1 Novozhilov 理论^[5]

Novozhilov 理论通过锥顶角 α 的变化描述不同几何形状壳体的应变与位移关系(如图 1 所示) 当 $\alpha = 0$ 时为柱壳;当 $\alpha = 90^\circ$ 时为扇形板;当 $0 < \alpha < 90^\circ$ 时为截头锥壳

Novozhilov 理论应变_位移关系式为

$$\begin{aligned} x &= \frac{u}{x'}, & \epsilon &= \frac{1}{r} \frac{v}{x'} + \frac{w \cos \alpha + u \sin \alpha}{r}, & x &= \frac{1}{r} \frac{u}{x'} + \frac{v}{x} - \frac{v \sin \alpha}{r}, \\ X_x &= -\frac{2w}{x'^2}, & X &= -\frac{1}{r^2} \frac{2w}{2} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{v}{x} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{w}{x}, \\ X_x &= 2 \left[-\frac{1}{r} \frac{2w}{x} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{w}{x} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{v}{x} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} v \right] \end{aligned} \quad (1)$$

1.2 简支弯箱的有限曲条控制方程

对于简支弯箱结构, 曲条元(如图 2 所示) 位移插值函数为

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^r [N_m] \{m\}, \quad (2)$$

式中 u_m 、 v_m 、 w_m 分别为第 m 级 x 、 y 、 z 方向的位移, $[N_m]$ 为谐函数 $Y_m = \sin K_m$ 的函数, 其中 $K_m = m / b$, b 为图 1 简支弯箱圆心角, θ 为角坐标, b 为条元宽度

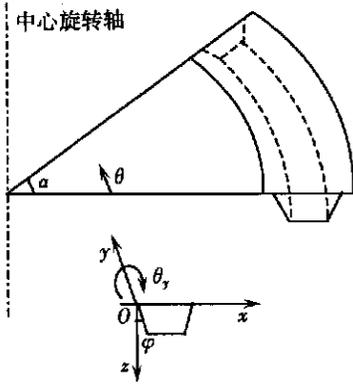


图 1 弯箱结构及描述

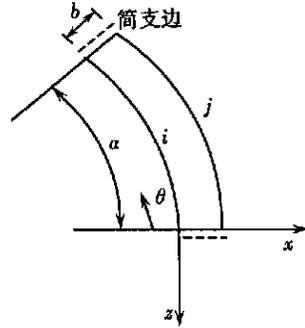


图 2 弯箱曲条元

由弹性理论, 曲条元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} K_e &= \int_V B^T D B dV = \int_V \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_r \end{bmatrix}^T D \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_r \end{bmatrix} dV = \\ &= \begin{bmatrix} B_1^T D B_1 & B_1^T D B_2 & B_1^T D B_r \\ B_2^T D B_1 & B_2^T D B_2 & B_2^T D B_r \\ B_r^T D B_1 & B_r^T D B_2 & B_r^T D B_r \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} K_{e11} & K_{e12} & K_{e1r} \\ K_{e21} & K_{e22} & K_{e2r} \\ K_{er1} & K_{er2} & K_{err} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 D 为弹性矩阵, 应变矩阵 B 由式(2)代入 Novozhilov 理论式(1)推求 式(3)中

$$K_{emn} = \int_V B_m^T D B_n dV \quad (4)$$

利用谐函数 $Y_m = \sin(m \theta / b)$ 的正交性, 式(3)成为主对角块阵

$$K_e = \text{diag}[K_{e11} \quad K_{e22} \quad K_{err}], \quad (5)$$

则简支弯箱的第 m 项有限曲条法控制方程为

$$K_{mm}U_m = R_m, \quad (6)$$

其中 $K_{mm} = T^T K_{emm} T$, T 为整体坐标系到局部坐标系的旋转矩阵, U_m 和 R_m 分别为简支弯箱的第 m 项整体节线位移列阵和节线荷载列阵 简支弯箱位移列阵 U 为

$$U = \begin{matrix} r \\ m=1 \end{matrix} U_m \quad (7)$$

1.3 连续弯箱柔度法求解

由于式(2)有限曲条位移模式中的谐函数 $Y_m = \sin K_m$ 不能表达弯箱梁中间支承约束, 故对连续弯箱考虑用柔度法联合求解 连续弯箱为外部赘余力的超静定结构, 将支承解除形成简支弯箱基本体系 弯箱变形协调方程为

$$FR + = 0, \quad (8)$$

式中 F 为连续弯箱柔度矩阵, R 为弯箱外部赘余力列阵, 为荷载作用在基本简支弯箱体系上的位移列阵 将赘余力列阵 R 也作为节线荷载作用在基本简支弯箱体系上, 由式(6)、式(7)即可计算连续弯箱的位移场 U

2 连续弯箱位移参数的动态 Bayes 误差函数

在连续弯箱位移参数的 Bayes 估计中, 将弯箱上翼板、腹板和下翼板弹性模量均视为随机变量, 记成随机向量 $E = [E_1 \quad E_2 \quad E_3]$ 进行多参数估计 在充分考虑参数 E 的先验均值和方差前提下, 根据实测位移资料 U^* 这一后验信息, 对系统参数 E 进行估计 假定连续弯箱位移参数 E 服从正态分布, 且均值和方差已知, 即已知位移参数 E 的验前分布概率密度 $f(E)$ Bayes 参数估计就是在已知位移实测值条件分布 $f(U^* | E)$ 和验前分布 $f(E)$ 的前提下, 使得验后分布 $f(E | U^*)$ 取值最大时的系统参数的统计特性即为待求的连续弯箱位移参数统计特性 根据 Bayes 定理, 有

$$f(E | U^*) = \frac{f(U^* | E)f(E)}{f(U^*)}, \quad (9)$$

式中验前分布 $f(E)$, 服从高斯分布, 表达式为

$$f(E) = (2)^{-m/2} |C_E|^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(E - E_0)^T C_E^{-1}(E - E_0)\right], \quad (10)$$

式中 m 为连续弯箱位移参数 E 的维数; C_E 、 E_0 分别为弯箱位移参数 E 的协方差矩阵和均值列阵

在实际工程中, 已布测点的位移需测量多次, 每次位移实测值 U_i^* 都是来自 U^* 的样本, 如果建立常规 Bayes 误差函数^[9]进行参数估计, 重复工作量大 为此, 考虑建立连续弯箱位移参数的动态 Bayes 误差函数 U_i^* 的联合密度为: $f(U_i^* | E)$, 其中 n 为位移测量次数 由极大似然理论得

$$L(U^* | E) = f(U^* | E) = (2)^{-mn/2} |C_{U_i^*}|^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (U_i^* - U_i)^T C_{U_i^*}^{-1} (U_i^* - U_i)\right] \quad (11)$$

将式(10)和式(11)代入式(9), 为使验后分布 $f(E | U^*)$ 取值最大, 即需研究

$$J = \sum_{i=1}^n (U_i^* - U_i)^T C_U^{-1} (U_i^* - U_i) + (E - E_0)^T C_E^{-1} (E - E_0), \quad (12)$$

式中 J 称为连续弯箱位移参数的动态 Bayes 误差函数(因位移测量次数 n 可变化, 故拟称为 动态) 动态目标函数 J 对位移参数 E 的偏导数为

$$\frac{J}{E} = \sum_{i=1}^n 2 \left[\frac{U_i}{E} \right]^T C_U^{-1} (U_i - U_i^*) + 2 C_E^{-1} (E - E_0), \quad (13)$$

其中: $U_i = U_i(E)$ 将 $U_i(E)$ 在 E 均值点 E 处 Taylor 展开, 并忽略二阶以上微量, 可得

$$U_i(E) = U_i(E) + S_i(E)(E - E), \quad (14)$$

其中: 敏感性矩阵 $S_i(E) = U_i / E |_{E=E}$, 将式(14)代入式(13), 可得

$$\frac{J}{E} = \sum_{i=1}^n 2 S_i^T C_U^{-1} (U_i + S_i E - S_i E - U_i^*) + 2 C_E^{-1} (E - E_0), \quad (15)$$

其中: $U_i = U_i(E)$ 当误差函数 J 达到极小值时, 式(15)取值为零, 则可得:

$$\left[\sum_{i=1}^n S_i^T C_U^{-1} S_i + C_E^{-1} \right] E = \sum_{i=1}^n S_i^T C_U^{-1} (U_i^* - U_i + S_i E) + C_E^{-1} E_0 \quad (16)$$

设 $H = \sum_{i=1}^n S_i^T C_U^{-1} S_i + C_E^{-1}$, $M = H^{-1} [S_1^T C_U^{-1}, S_2^T C_U^{-1}, \dots, S_n^T C_U^{-1}]$, 由式(16) 即可推得连续弯箱位移参数 E 的估计值 E 为

$$E = (I - MS) E_0 + MU^* - M(U - SE), \quad (17)$$

式中 I 为单位矩阵; $U^* = [U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*]^T$, 其中 U_i^* 为第 i 次位移实测值列阵; $U = [U_1, U_2, \dots, U_n]^T$, 其中 U_i 为参数均值点 E 处第 i 次理论计算位移值列阵; $S = [S_1, S_2, \dots, S_n]^T$, 其中 S_i 为第 i 次位移敏感性矩阵 假定连续弯箱位移参数先验信息 E_0 与位移实测资料 U^* 不相关, 由式(17) 知 E 的方差为

$$C_E = (I - MS) C_E [I - MS]^T + M C_U^* M^T, \quad (18)$$

式中 C_U^* 为对角块阵 $C_U^* = \text{diag}(C_{U_1}^*, C_{U_2}^*, \dots, C_{U_n}^*)$, 其中 $C_{U_i}^*$ 为第 i 次位移测量值协方差矩阵 利用 C_E 、 C_U^* 的对称非奇异性, 式(18) 可推成

$$C_E = [C_E^{-1} + S^T C_U^{-1} S]^{-1} \quad (19)$$

3 优化方法和连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计步骤

3.1 共轭梯度法

现有的优化方法总体可分为直接搜索法(如单纯型法、复合型法等)和梯度分析法(如共轭梯度法、变尺度法等) 梯度分析法的一大优点是在估计出参数的同时可以获得参数的灵敏度, 可方便地进行结构的可靠度计算等 在梯度分析法中, 共轭梯度法是一种有效的优化方法, 它在优化的过程中不断地改变空间尺度(矩阵), 产生新的共轭搜索方向, 有效地优化误差函数

3.2 连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计步骤

应用共轭梯度法, 连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计步骤为

- 1) 取待估连续弯箱位移参数 E 的初始值 E_0 , 并置迭代次数为 $i = 0$;
- 2) 式(13) 计算弯箱位移参数的动态 Bayes 误差函数 J 在 E_i 处的梯度 $J_i = G_i$, 并计算 G_i 的 2 范数

3) 若 $G_i \frac{2}{2} < 1$ 或 $E_i - E_{i-1} 1 < 2$, 则连续弯箱位移参数 E_i 已满足收敛标准; 否则进行下一步;

4) 若 $i = 0$, 则置 $P_i = -G_i$; 否则置 $P_i = -G_i + ((G_i \frac{2}{2}) / (G_{i-1} \frac{2}{2})) P_{i-1}$, 其中 P_i 为 G_i 的共轭梯度;

5) 一维搜索最优步长 h , 使得 (12) 式 $J(E_{i+1}) = \min_h J(E_i + hP_i)$, 并置 $i = i + 1$;

6) 若 $i > m$, 将连续弯箱位移参数迭代值 E_{i+1} 重新置为初始值 E_0 , 转入步骤 1) 继续优化, 若 $i = m$, 转入步骤 2) 继续优化, 其中 m 为待估位移参数 E 的维数(本文 m 等于 3);

7) 根据动态 Bayes 方差式(19) 计算出连续弯箱位移参数 E 的方差 C_E

3.3 步长 h 的一维搜索

在连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计步骤第 5) 步中需进行步长 h 的一维搜索, 这在参数估计中是一个比较复杂的问题。在已有的参数估计研究成果中, 一维搜索基本都采用黄金分割法等^[8,9], 因为这些方法能保证计算精度且编程比较方便, 但它们事先都需设定步长 h 所在的区间。而估计步长 h 所在的区间并不容易(通常需试算确定区间), 特别对于多参数估计来说, 要准确地估计步长 h 所在的区间更为困难。而本文采用文献[10]中的一维外推内插法, 能自动寻找步长 h 所在的区间并进行优化, 无需事先设定区间, 成功地解决了步长 h 的自动寻优问题。

4 程序的研制及算例分析

本文对一连续混凝土弯箱的位移参数 $E = [E_1 \ E_2 \ E_3]$ (箱上翼板、腹板和下翼板弹性模量分别为 E_1 、 E_2 和 E_3) 进行多参数动态 Bayes 估计。弯箱曲条元和节线编号如图 3 所示, 弯曲半径 $R = 300$ cm, 圆心角 $\theta = 0.4$ rad, 中轴线长 120 cm。泊松比 ν 为 0.17, 待估位移参数 E 的实际值和箱截面厚度如表 1 所示, 参数变异系数取为 0.1。在 1/4 跨和 3/4 跨的节线 3 和节线 12 处分别作用图 4 所示的垂直向集中节线荷载 $P_1 = 9$ kN 和 $P_2 = 8$ kN。为进行连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计, 笔者编制了相应的 INVCCB 计算程序。

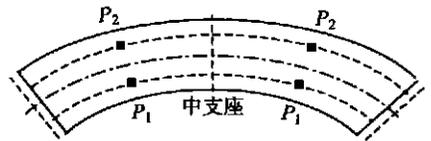
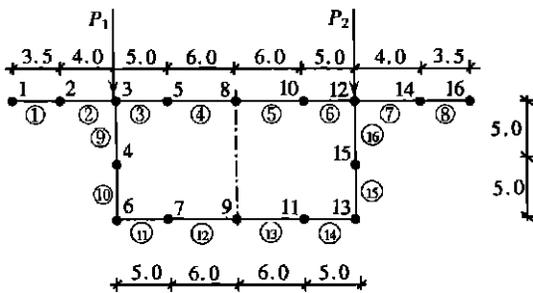


图 3 弯箱曲条元和相应节线编号(单位: cm)

图 4 连续弯箱偏心加载

表 1 连续弯箱位移参数实际值及截面厚度

参数名称	上翼板弹模 $E_1 / (N/cm^2)$	腹板弹模 $E_2 / (N/cm^2)$	下翼板弹模 $E_3 / (N/cm^2)$	上翼板厚度 d_1 / cm	下翼板厚度 d_2 / cm	腹板厚度 d_3 / cm
取值	2.8E+ 6	2.0E+ 6	2.4E+ 6	0.6	0.6	0.4

选择 1/4 跨箱截面 2、5、10、14 为 4 个位移考察点, 每个考察点位移测量了 5 次, 测点位移均值和标准差分别如表 2 所示。

表 2 考察点位移均值和标准差 (cm)

考察点	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2	0.949	0.946	0.943	0.951	0.953	0.158	0.157	0.158	0.153	0.154
5	0.884	0.883	0.887	0.886	0.881	0.144	0.146	0.141	0.143	0.145
10	0.642	0.648	0.641	0.642	0.647	0.094	0.095	0.091	0.096	0.094
14	0.582	0.580	0.584	0.586	0.585	0.080	0.079	0.076	0.082	0.084

4.1 先验信息满足准确性要求时连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计

取先验信息 $E_0 = [2.9, 2.1, 2.5]$ 分别取初始值 $E_{1ini} = [1.5, 3.8, 1.2]$ 和 $E_{2ini} = [5.0, 4.0, 1.0]$, 连同表 2 数据代入连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计 INVCCB 程序, 并取收敛准则 $\epsilon_1 = 0.001, \epsilon_2 = 0.001$ 参数迭代结果如表 3 和图 5、图 6 所示

表 3 先验信息准确时连续弯箱位移参数动态 Bayes 估计结果 (10^6 N/cm^2)

弯箱位移参数	上翼板 E_1	腹板 E_2	下翼板 E_3	上翼板 E_1	腹板 E_2	下翼板 E_3
初值	1.500	3.800	1.200	5.000	4.000	1.000
终值	2.861	2.038	2.423	2.820	2.059	2.396
迭代次数	10	10	10	8	8	8
相对误差 $e/\%$	2.179	1.900	0.958	0.714	2.950	0.167
收敛准则	1	1	1	2	2	2

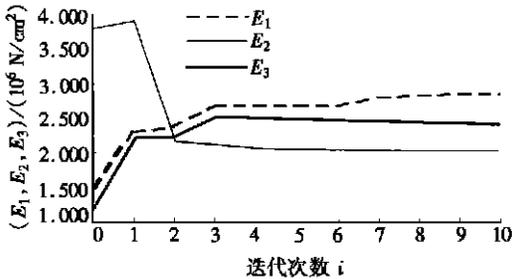


图 5 取第一种初始值参数迭代结果

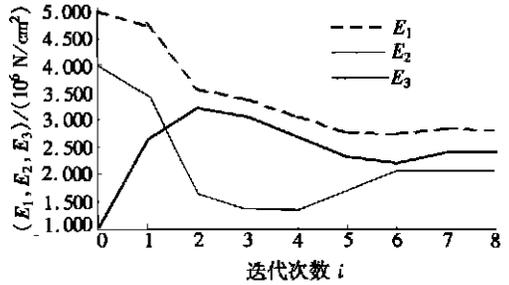


图 6 取第二种初始值参数迭代结果

由计算过程知: 动态 Bayes 估计能将表 2 中 5 个时刻的位移实测值同时考虑, 计算效率高由图 5、图 6 可知: 在先验信息准确时, 连续弯箱位移参数 E 的动态 Bayes 估计过程是稳定的, 且无论初始值偏离实际值远近, 迭代过程都能收敛于实际值

作为理论研究, 文中视弯箱上翼板、腹板和下翼板弹性模量为随机变量 实际上, 腹板等还可能由不同的材料组成, 则进行位移参数估计时需增加随机变量的个数 只要随机变量均值为同一数量级, 则应用本文的动态 Bayes 估计方法仍能正确地估计弯箱位移参数, 即位移参数的收敛性不受随机变量个数影响; 若不为同一数量级, 则可根据待估参数对系统响应的敏感性^[9], 进行参数数量级的处理

4.2 先验信息不满足准确性要求时连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计

取位移参数先验信息 $E_0 = [2.0, 3.0, 1.5]$ 为便于比较, 仍取初始值 $E_{1ini} = [1.5, 3.8, 1.2]$ 和 $E_{2ini} = [5.0, 4.0, 1.0]$ 位移参数的动态 Bayes 估计结果如表 4 所示

表 4 先验信息不准确时连续弯箱位移参数动态 Bayes 估计结果 $(10^6/cm^2)$

弯箱位移参数	上翼板 E_1	腹板 E_2	下翼板 E_3	上翼板 E_1	腹板 E_2	下翼板 E_3
初值	1.500	3.800	1.200	5.000	4.000	1.000
终值	2.356	3.642	1.784	2.384	3.592	1.694
迭代次数	30	30	30	30	30	30
相对误差 $e/\%$	15.857	82.100	25.667	14.857	79.600	29.417
收敛准则	不收敛	不收敛	不收敛	不收敛	不收敛	不收敛

由表 4 知: 当先验信息不准确时, 位移参数迭代 30 次时仍不能按给定的 δ_1 或 δ_2 收敛, 且此时参数相对误差均远大于 5%。而对于实际工程, 连续弯箱位移参数实际值事先并不知道, 没有参数实际值这一衡量标准, 现在的问题是怎样判断先验信息是否给得合理, 否则会对工程造成错误的指导。本文通过研究分析, 知道: 连续弯箱位移参数先验信息给得比较准确时, 参数迭代过程就能按 δ_1 或 δ_2 收敛; 当先验信息给得不准确时, 即使增加迭代次数, 迭代过程也很难收敛。

5 结 语

本文基于 Novozhilov 理论对连续弯箱位移参数进行了动态 Bayes 估计, 从理论研究和算例分析可得: 连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计方法考虑了位移参数随机性和位移实测资料随机性, 并可各次测量的位移场同时考虑, 计算效率高; 文中采用一维外推内插法, 自动寻找步长 h 所在的区间并进行优化, 无需像传统的黄金分割法等要事先设定步长 h 所在区间, 成功地解决了优化过程步长 h 的自动寻优问题; 在先验信息满足准确性要求时, 连续弯箱位移参数的动态 Bayes 估计过程是稳定的, 都是收敛于实际值, 且参数的动态 Bayes 估计方法的收敛性不受随机变量个数影响; 反之易发散。

[参 考 文 献]

- [1] 项海帆. 高等桥梁结构理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2001.
- [2] 肖汝诚. 桥梁结构分析及程序系统[M]. 北京: 人民交通出版社, 2002.
- [3] Ghani R A, Hangang U. Thin_walled multicell box girder finite element[J]. Structure Engineering, ASCE, 1991, 117(10): 2953_2971.
- [4] Luo Q Z, Li Q S, Tang J. Shear lag in box girder bridges[J]. Journal of Bridge Engineering, 2002, 7(5): 308_313.
- [5] 赵振铭, 陈宝春. 杆系与箱型梁桥结构分析及程序设计[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1997.
- [6] 张佑启. 箱形梁桥的有限条分析[M]. 北京: 人民交通出版社, 1978.
- [7] Lee S H, Kim S I, Lee J H, et al. Two_parameter beam_column model and back analysis for flexible earth retaining walls[J]. Computers and Geotechnics, 2004, 31(6): 457_472.
- [8] Chi S Y, Chern J C, Lin C C. Optimized back_analysis for tunneling induced ground movement using equivalent ground loss mode[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2001, 16(3): 159_165.
- [9] 束善杭. 参数的随机反演方法及其面向对象的程序设计[D]. 硕士学位论文. 南京: 河海大学, 2000.
- [10] 范鸣玉, 张莹. 最优化技术基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.

Dynamic Bayesian Estimation of Displacement Parameters of Continuous Curve Box Based on Novozhilov Theory

ZHANG Jian¹, YE Jian_shu¹, ZHAO Xin_ming²

(1. College of Transportation, Southeast University,
Nanjing 210096, P. R. China ;

2. Civil Engineering Institute, Nanjing University of Aeronautics and
Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China)

Abstract: The finite strip controlling equation of pinned curve box was deduced on the basis of Novozhilov theory and with flexibility method, the problem of continuous curve box was resolved. Dynamic Bayesian error function of displacement parameters of continuous curve box was founded for the first time. The corresponding formulas of dynamic Bayesian expectation and variance were derived. After the method of solving the automatic search of step length was put forward, the optimization estimation computing formulas were also obtained by adapting conjugate gradient method. Then the steps of dynamic Bayesian estimation were given in detail. Through analysis of a classic example, the criterion of judging the precision of the known information is gained as well as some other important conclusions about dynamic Bayesian estimation of displacement parameters of continuous curve box.

Key words: displacement parameter; Bayesian estimation; Novozhilov theory; continuous curve box