

各向异性网格下 Wilson 元的超收敛性分析*

石东洋¹, 梁 慧²

(1. 郑州大学 数学系, 郑州 450052;

2. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001)

(钟万勰推荐)

摘要: 在各向异性网格下研究了二阶椭圆边值问题的 Wilson 有限元方法, 利用单元构造的特殊性和一些新的技巧得到相应的超逼近和超收敛结果. 数值算例的结果与理论分析是相吻合的.

关键词: 各向异性网格; Wilson 元; 超逼近; 超收敛

中图分类号: O242.21 文献标识码: A

引 言

Wilson 元是工程计算中具有很好的数值效果的单元, 其收敛性和超收敛性分析一直是有限元领域中最热门的课题之一(参看文献[1]至文献[6]). 特别的, 石钟慈^[2]院士等在一类特殊网格剖分下(即: 所有沿 x 轴方向的边长都相等, 沿 y 轴方向的边长也相等)研究了其在单元顶点和边中点的点态超收敛性质. 林群^[4]院士等利用积分恒等式技巧也对该单元进行了研究, 并得到了很好的结果. 但迄今为止几乎所有关于 Wilson 元的超收敛性结果都要求网格满足正则性假设 $h_K/\rho_K \leq c$ 和拟一致假设 $h/h \leq c$, 这里 K 为单元, h_K 和 ρ_K 分别是 K 的直径和最大内切圆直径, c 是一不依赖于 $h = \max_K h_K$ 和 $h = \min_K h_K$ 及所考虑的函数(参看文献[1])的正常数. 这就限制了其应用范围.

另一方面, 因为有些椭圆边值问题的解具有各向异性, 即沿某个方向解变化非常剧烈, 而沿另外方向解变化平缓. 例如: 奇异摄动问题、对流扩散问题等(其解出现边界层). 因此, 从理论分析和实际应用的观点来说, 正则性假设和拟一致假设成为有限元方法的一个基本的制约条件. 在这种情况下, 一个明显反映这种各向异性和克服上述限制的思想是采用各向异性剖分单元, 此时, 上述比值可以非常大甚至趋于无穷. 各向异性有限元方法可以在较小的自由度下得到与传统正则网格下完全相同的精度并且最近已有一些文章涉及到了此方面的研究^[6,9]. 然而, 到目前为止, 关于各向异性网格剖分下非协调元的超逼近和整体超收敛分析的文献却很少见到.

本文的主要目的是利用一些新的技巧和 Wilson 元的一些独特的优点, 在各向异性网格剖分下研究其超逼近和超收敛性质. 数值结果与我们的理论分析是相吻合的. 该文的结果可以

* 收稿日期: 2005_03_01; 修订日期: 2006_09_18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371113)

作者简介: 石东洋(1961—), 男, 河南鲁山人, 教授, 博士(联系人, E-mail: shi_dy@zzu.edu.cn).

看作是文献[4]的一般化。而且,对进一步发展一些二阶问题数值解的后验误差估计方法和设计自适应算法是很有帮助的。

考虑如下二阶椭圆边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中} \\ u|_{\Gamma} = 0, & \text{在 } \Gamma = \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (1)$$

这里 $\Omega \subset R^2$ 是矩形区域, $f \in L^2(\Omega)$ 。

(1)式的弱形式为:找 $u \in H_0^1(\Omega) = V$, 使得

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V, \quad (2)$$

其中 $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy$, $f(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \, dy$ 。

1 Wilson 元的超逼近性质

为简单起见,令 $\Omega \subset R^2$ 为 $x-y$ 平面上的有界矩形区域,其边界 $\partial\Omega$ 分别平行于 x -轴和 y -轴, J_h 为 Ω 的矩形剖分。 $\forall K \in J_h$, 设其中心点为 (x_K, y_K) , 4个顶点为

$$\begin{aligned} d_1 &= (x_K - h_x, y_K - h_y), & d_2 &= (x_K + h_x, y_K - h_y), \\ d_3 &= (x_K + h_x, y_K + h_y), & d_4 &= (x_K - h_x, y_K + h_y). \end{aligned}$$

$2h_{x,K}$ 和 $2h_{y,K}$ 分别为沿 x 方向和 y 方向的 K 的两条边的长度。令

$$h_x = \max_{K \in J_h} h_{x,K}, \quad h_y = \max_{K \in J_h} h_{y,K}, \quad h_{\max} = \max(h_x, h_y)$$

$K = [-1, 1] \times [-1, 1]$ 为 $\xi-\eta$ 平面的参考单元,其顶点为 $d_1 = (-1, -1)$, $d_2 = (1, -1)$, $d_3 = (1, 1)$ 和 $d_4 = (-1, 1)$ 。设 V_h^0 为 Wilson 元的有限元空间^[2,4]。

(2)式的变分问题为:求 $R_h u \in V_h^0$, 使得 $\forall v_h \in V_h^0$,

$$a_h(R_h u, v_h) = f(v_h), \quad (3)$$

其中

$$a_h(u, v) = \sum_K \int_K \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dy$$

记 $V_h^0 = \left\{ \overline{R_h u} \mid \overline{R_h u} \in Q_1(K) \text{ 由 } K \text{ 的 } 4 \text{ 个顶点的函数值来决定, } \overline{R_h u}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$, 则其有限元解 $\overline{R_h u} \in V_h^0$ 满足

$$a_h(\overline{R_h u}, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0, \quad (4)$$

显然有

$$a_h(R_h u - \overline{R_h u}, v_h) = a_h(u - \overline{R_h u}, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h^0, \quad (5)$$

在接下来的收敛性分析中,下面引理所建立的逆不等式将起着非常重要的作用。

引理 1 $\forall v \in V_0^h$ 及 $\forall K \in \Gamma_h$,

$$\|v_{xx}\|_{0,K} \leq ch_x^{-1} \|v_x\|_{0,K}, \quad \|v_{yy}\|_{0,K} \leq ch_y^{-1} \|v_y\|_{0,K}. \quad (6)$$

证明 我们仅证明(6)式的第1式,第2式同理可得

$$\begin{aligned} \|v_{xx}\|_{0,K}^2 &= \int_K v_{xx}^2 \, dx \, dy = c \int_K \hat{v}_{\xi\xi}^2 h_x^{-4} h_x h_y \, d\xi \, d\eta \\ &\leq ch_x^{-3} h_y \|\hat{v}_{\xi\xi}\|_{0,K}^2 \leq ch_x^{-3} h_y \|\hat{v}_{\xi}\|_{1,K}^2 \leq \\ &ch_x^{-3} h_y \|\hat{v}_{\xi}\|_{0,K}^2 = ch_x^{-3} h_y \|v_x\|_{0,K}^2 h_x^2 (h_x h_y)^{-1} = ch_x^{-2} \|v_x\|_{0,K}^2. \end{aligned}$$

引理 2 假设 $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $i_h u$ 为 u 的双线性插值, $w = u - i_h u$, 于是

$$\int_{\Omega} w_x v_x dx dy = ch_y^2 |u|_3 |v|_1, \quad \int_{\Omega} w_y v_y dx dy = ch_x^2 |u|_3 |v|_1, \\ v \in V_0^h. \quad (7)$$

证明 由引理 1 及文献[4]中提出的技巧我们易得上述结论

由引理 1 和引理 2, 我们可导出下面的超逼近性质

定理 3 令 $u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 和 $\overline{R_{hu}}$ 分别为(1) 式和(4) 式的解, i_{hu} 为 u 的双线性插值, 我们有

$$\|\overline{R_{hu}} - i_{hu}\|_h \leq ch_{\max}^2 |u|_3, \quad (8)$$

这里, $\|\cdot\|_h^2 = \sum_K |\cdot|_{1,K}^2$.

证明 由引理 2 和(5) 式, 对任意 $v \in V_0^h$ 我们得到

$$a(\|\overline{R_{hu}} - i_{hu}, v) = a(u - i_{hu}, v) + a(\overline{R_{hu}} - u, v) \leq ch_{\max}^2 |u|_3 |v|_1,$$

在上述不等式中取 $v = \overline{R_{hu}} - i_{hu}$ 并利用 $a(\cdot, \cdot)$ 的强制性即得(8) 式

引理 4 设 R_{hu} 为(3) 式的 Wilson 元解, 在定理 3 的条件下有

$$i_h R_{hu} = \overline{R_{hu}}. \quad (9)$$

证明 因为 $V_0^h \subset V_0^h$, 所以 $\forall v \in V_0^h$, 注意到 $|R_{hu}|_{3,K} = 0$, 由定理 3 得到

$$a(i_h R_{hu} - \overline{R_{hu}}, v) = a(i_h R_{hu} - R_{hu}, v) = \\ \sum_K \int_K (i_h R_{hu} - R_{hu}) \cdot \nabla v dx dy = \\ O(h^2) \sum_K |R_{hu}|_{3,K} \|v\|_{1,K} = 0. \quad (10)$$

在(10) 式中取 $v = i_h R_{hu} - \overline{R_{hu}} \in V_0^h$, 即可得证引理.

由定理 3 和引理 4, 我们得到 Wilson 元的超逼近性质如下

定理 5 在定理 3 的条件下我们有

$$\|\overline{R_{hu}} - i_{hu}\|_h \leq ch_{\max}^2 |u|_3. \quad (11)$$

2 Wilson 元的超收敛性分析

为了得到整体超收敛, 令 J_{2h} 为一簇各向异性网格, J_h 为把 J_{2h} 的每个单元剖分成 4 个小单元 K_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) 得到的剖分. 令 $K \in J_{2h}$, $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i$. 于是在 $V_0^h \cup H^3(\Omega)$ 上我们可构造插值后处理算子 Π_{2h}^2 满足

$$\Pi_{2h}^2|_K: V_0^h|_K \cup H^3(K) \rightarrow Q_2(K), \quad (12)$$

$\Pi_{2h}^2(ai) = v(ai)$, $i = 1, 2, \dots, 9$. 这里 $Q_2(K)$ 代表 K 上 x 和 y 的完全二次二项式空间. 容易看出

$$\Pi_{2h}^2(i_h w) = \Pi_{2h}^2 w, \quad \forall w \in V_0^h \cup H^3(\Omega). \quad (13)$$

引理 6 对于上述的 Π_{2h}^2 , 成立以下不等式

$$\|u - \Pi_{2h}^2 u\|_{l,\Omega} \leq ch_{\max}^{1+\nu-l} \|u\|_{\nu+1,\Omega}, \\ \forall u \in H^3(\Omega); 1 \leq \nu \leq 2; l = 0, 1, \quad (14)$$

$$\|(\Pi_{2h}^2 v)\|_h \leq c \|v\|_h, \quad \forall v \in V_0^h. \quad (15)$$

证明 运用文献[3] 中相同的方法可得到估计(14) 式. 又

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_{2h}^2 v)_x\|_{0,K}^2 &= \int_K (\Gamma_{2h}^2 v)_x^2 dx dy = \int_{\hat{K}} (\overline{\Gamma_{2h}^2 v})_{\xi}^2 h_{K_x}^{-2} h_{K_y} h_{K_y} d\xi d\eta = \\ &h_{K_x}^{-1} h_{K_y} \|(\overline{\Gamma_{2h}^2 v})_{\xi}\|_{0,\hat{K}}^2 \leq ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \|\hat{v}_{\xi}\|_{0,\hat{K}}^2 = ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \int_{\hat{K}} \hat{v}^2 d\xi d\eta = \\ &ch_{K_x}^{-1} h_{K_y} \int_K v_x^2 h_{K_x}^2 h_{K_x}^{-1} h_{K_y}^{-1} dx dy = c \int_K v_x^2 dx dy = c \|v_x\|_{0,K}^2, \end{aligned} \tag{16}$$

故

$$\|(\Gamma_{2h}^2 v)_x\|_{0,K} \leq c \|v_x\|_{0,K}. \tag{17}$$

同理

$$\|(\Gamma_{2h}^2 v)_y\|_{0,K} \leq c \|v_y\|_{0,K}, \tag{18}$$

由(17)式和(18)式我们立即得到(15)式. 引理 6 证毕.

定理 7 在各向异性网格下有下述超收敛结果

$$\|u - \Gamma_{2h}^2 i_h R_h u\|_h \leq ch_{\max}^2 |u|_3.$$

证明 由引理 4 和定理 5

$$\begin{aligned} \|\Gamma_{2h}^2 i_h R_h u - u\|_h &\leq \|u - \Gamma_{2h}^2(i_h u)\|_h + \|\Gamma_{2h}^2 i_h R_h u - \Gamma_{2h}^2(i_h u)\|_h \leq \\ &\|u - \Gamma_{2h}^2 u\|_h + \|\Gamma_{2h}^2(i_h u - i_h R_h u)\|_h \leq \\ &c(h_{\max}^2 |u|_{3+} + \|i_h u - i_h R_h u\|_h) \leq ch_{\max}^2 |u|_3. \end{aligned}$$

证毕.

3 数值结果

为考虑 Wilson 在各向异性网格下的有限元解的收敛效果, 我们考虑二阶问题(1) 且

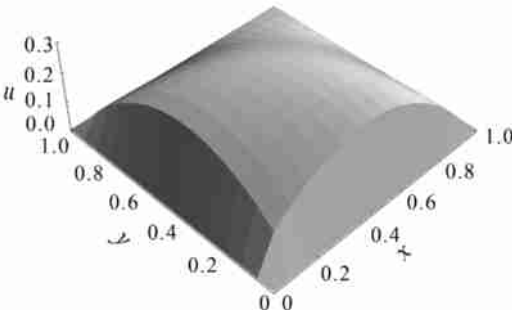


图 1 $u(x, y)$ ($\varepsilon = 0.05$)

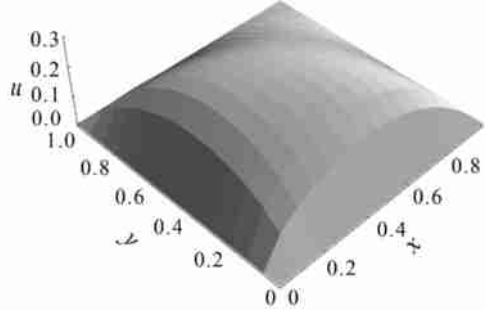
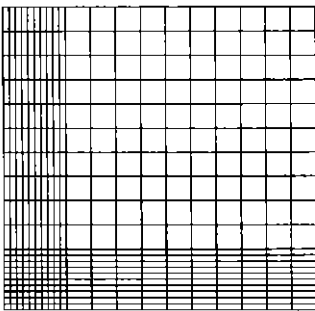
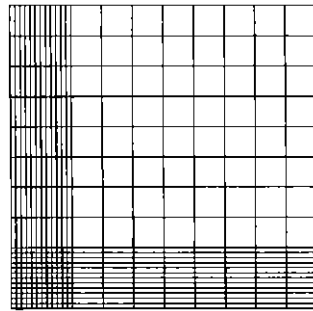


图 2 $u(x, y)$ ($\varepsilon = 0.02$)



网格 1 $p = 0.5$



网格 2 $p = 0.6$

图 3

$$\Omega = [0, 1]^2 \subset R^2, f = -\Delta u = -2(1 - e^{-x/\varepsilon})(1 - x) - \frac{2e^{-y/\varepsilon}(1 - x)x}{\varepsilon} + 2(-1 + e^{-y/\varepsilon})(1 - y) - \frac{e^{-(y/\varepsilon)(1-x)x(1-y)}}{\varepsilon} + \left[-\frac{2e^{-x/\varepsilon}}{\varepsilon} - \frac{e^{-(x/\varepsilon)(1-x)}}{\varepsilon^2} \right] y(1 - y),$$

可以验证问题(1)的真解为 $u = (1 - x)y(1 - y)(1 - e^{-x/\varepsilon}) + (1 - y)x(1 - x)(1 - e^{-y/\varepsilon})$ 。

由于 $u(x, y)$ 在靠近 Ω 的边界($x = 0$ 及 $y = 0$) 处变化比较剧烈(其中 ε 非常小), 所以在不同区域我们对 Ω 作不同的划分。首先, 我们决定其边界层(用 a 来表示)。根据 a 把 Ω 的每一边划分成两部分, 把 Ω 的每一边($x = 0$ 及 $y = 0$) 的边界层分别记为 $\Omega_1 = (0, a) \times (0, 1)$ 和 $\Omega_2 = (0, 1) \times (0, a)$ 。此时 Ω 由 4 部分组成: $\Omega_1 \cap \Omega_2, \Omega - \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 - \Omega_1 \cap \Omega_2$ 和 $\Omega_2 - \Omega_1 \cap \Omega_2$ 。

令 p 为沿一边的边界层和整个边的长的比。例如, 如果我们将一条边划分成 n 小份, 边界层占 $n \cdot p$ 小份, 该边剩下部分占 $n \cdot (1 - p)$ 小份。当 p 变化时我们可得到不同的网格。这里我们取 $p = 1/2$ 及 $p = 3/5$ 分别得到网格 1 和网格 2。

我们考虑 $\varepsilon = 0.05$ 和 $\varepsilon = 0.02$ 两种情况, 此时其精确解 $u(x, y)$ 的图形分别为图 1 和图 2。表 1 中的 h_L 和 h_S 分别代表 K 的长边的短边的边长。在表 2 至表 9 中, ‘ α ’ 代表“平均收敛阶”, m 和 n 分别表示沿 x 方向和 y 方向的剖份数。

	$\max(h_L/h_S)$	
	$p = 1/2$	$p = 3/5$
$a = 0.18$	4.555 556	6.833 333
$a = 0.20$	4.000 000	6.000 00
$a = 0.05$	19.000 00	24.000 00
$a = 0.07$	13.285 704	17.142 86

表 2 $\varepsilon = 0.05, a = 0.18$ 和 $p = 1/2$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_h u\ _0$	$\ u - R_h u\ _h$	$\ \overline{R_h u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_h u\ _h$
40×40	0.002 751 479 7	0.207 706 346 9	0.001 097 488 8	0.004 876 015 0
80×80	0.000 688 654 9	0.103 974 958 5	0.000 274 989 1	0.001 247 417 7
160×160	0.000 172 213 0	0.052 002 754 0	0.000 068 786 5	0.000 314 001 7
α	1.998 97	0.998 943	1.997 97	1.978 48

表 3 $\varepsilon = 0.05, a = 0.18$ 和 $p = 3/5$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_h u\ _0$	$\ u - R_h u\ _h$	$\ \overline{R_h u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_h u\ _h$
40×40	0.004 295 696 7	0.259 532 927 8	0.001 666 960 5	0.004 349 140 2
80×80	0.001 074 932 6	0.129 888 772 0	0.000 417 785 9	0.001 166 788 9
160×160	0.000 268 796 5	0.064 959 740 9	0.000 104 513 9	0.000 298 527 4
α	1.999 15	0.999 15	1.997 73	1.932 8

表 4 $\varepsilon = 0.05, a = 0.20$ 和 $p = 1/2$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_h u\ _0$	$\ u - R_h u\ _h$	$\ \overline{R_h u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_h u\ _h$
40×40	0.002 596 141 4	0.201 146 716 2	0.001 028 721 8	0.005 630 788 7
80×80	0.000 649 912 4	0.100 713 572 1	0.000 257 792 7	0.001 425 474 3
160×160	0.000 162 533 1	0.050 374 376 2	0.000 064 487 0	0.000 357 605 8
α	1.998 78	0.998 743	1.997 85	1.988 46

表 5 $\varepsilon = 0.05, a = 0.20$ 和 $p = 3/5$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_{\mu}u\ _0$	$\ u - R_{\mu}u\ _h$	$\ \overline{R_{\mu}u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_{\mu}u\ _h$
40×40	0.004 052 003 7	0.251 237 708 9	0.001 547 906 6	0.004 398 661 5
80×80	0.001 014 084 8	0.125 755 239 8	0.000 387 934 4	0.001 133 728 1
160×160	0.000 253 589 2	0.062 894 730 0	0.000 097 045 1	0.000 286 304 2
α	1.999 04	0.999 021	1.997 76	1.970 8

表 6 $\varepsilon = 0.02, a = 0.05$ 和 $p = 1/2$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_{\mu}u\ _0$	$\ u - R_{\mu}u\ _h$	$\ \overline{R_{\mu}u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_{\mu}u\ _h$
40×40	0.013 777 967 7	0.913 156 063 0	0.002 802 332 3	0.039 981 597 0
80×80	0.003 449 390 9	0.457 185 464 4	0.000 708 586 0	0.016 670 795 9
160×160	0.000 862 718 3	0.228 682 607 4	0.000 177 724 1	0.005 123 853 2
α	1.998 67	0.998 758	1.989 47	1.498 73

表 7 $\varepsilon = 0.02, a = 0.07$ 和 $p = 1/2$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_{\mu}u\ _0$	$\ u - R_{\mu}u\ _h$	$\ \overline{R_{\mu}u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_{\mu}u\ _h$
40×40	0.013 183 999 8	0.893 104 710 8	0.002 450 620 5	0.015 510 027 2
80×80	0.003 300 415 8	0.447 144 830 2	0.000 616 184 4	0.006 038 717 6
160×160	0.000 825 388 4	0.223 648 330 5	0.000 154 292 5	0.001 821 884 8
α	1.998 79	0.998 799	1.994 71	1.556 55

表 8 $\varepsilon = 0.02, a = 0.18$ 和 $p = 3/5$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_{\mu}u\ _0$	$\ u - R_{\mu}u\ _h$	$\ \overline{R_{\mu}u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_{\mu}u\ _h$
40×40	0.015 600 190 8	0.959 854 614 7	0.002 654 262 6	0.027 560 418 2
80×80	0.003 918 254 5	0.482 177 348 7	0.000 668 087	0.007 072 539 9
160×160	0.000 980 714 0	0.241 372 992 4	0.000 167 319 6	0.001 780 000 4
α	1.995 8	0.995 778	1.993 82	1.976 39

表 9 $\varepsilon = 0.02, a = 0.20$ 和 $p = 3/5$ 时的收敛结果

$m \times n$	$\ u - R_{\mu}u\ _0$	$\ u - R_{\mu}u\ _h$	$\ \overline{R_{\mu}u} - i_h u\ _h$	$\ u - \Pi_{2h}^2 i_h R_{\mu}u\ _h$
40×40	0.014 716 711 1	0.928 478 439 7	0.002 502 365 5	0.033 091 114 9
80×80	0.003 700 074 3	0.466 884 218 1	0.000 630 538 1	0.008 097 280 3
160×160	0.000 926 342 2	0.233 777 151 7	0.000 157 958 9	0.002 192 331 3
α	1.994 89	0.994 87	1.992 84	1.971 02

容易看出数值结果依赖于‘ a ’和‘ p ’的选择,它保证了剖分和真解 $u(x, y)$ 的物理性质相一致。数值结果表明当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|u - \Pi_{2h}^2 i_h R_{\mu}u\|_h$ 在各向异性网格下的收敛阶为 $O(h^2)$, 然而 $\|u - R_{hu}\|_h$ 的收敛阶为 $O(h)$ 。同时,在上述网格剖分下 $\|\overline{R_{hu}} - i_h u\|_h$ 的收敛阶也是 $O(h^2)$ 。可见其数值结果与我们的理论分析是一致的。

[参 考 文 献]

- [1] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problem [M]. Amsterdam: North_Holland, 1978.
 [2] Shi Z C, Jiang B, Xue W M. A new superconvergence property of Wilson nonconforming finite element

- [J]. Numer Math, 1997, **78**(2): 259_268.
- [3] Luo P, Lin Q. High accuracy analysis of the Wilson element[J]. J of Comp Math, 1999, **17**(2): 113_124.
- [4] 林群, 严宁宁. 高效有限元构造与分析[M]. 石家庄: 河北大学出版社, 1996.
- [5] 石东洋, 陈绍春. 一类改进的 Wilson 任意四边形单元[J]. 高等学校计算数学学报, 1994, **16**(2): 161_167.
- [6] Chen S C, Zhao Y C, Shi D Y. Anisotropic interpolation with application to nonconforming elements [J]. Appl Numer Math, 2004, **49**(2): 135_152.
- [7] Zienissek A, Vanmaele M. The interpolation theorem for narrow quadrilateral isotropic metric finite elements[J]. Numer Math, 1995, **72**(1): 123_141.
- [8] Apel Th, Dobrowolski M. Anisotropic interpolation with applications to the finite element method[J]. Computing, 1992, **47**(3): 277_293.
- [9] Apel Th. An isotropic Finite Elements: Local Estimate and Applications [M]. Stuttgart, Leipzig: B G Teubner, 1999.

Superconvergence Analysis of Wilson's Element on Anisotropic Meshes

SHI Dong_yang¹, LIANG Hui²

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University,
Zhengzhou, 450052, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The Wilson finite element method is considered to solve a class of two dimensional second order elliptic boundary value problems. By using the particular structure of the element and some new techniques, the superclose and global superconvergence on anisotropic meshes are obtained. Numerical example is also given to confirm our theoretical analysis.

Key words: anisotropic meshes; Wilson's element; superclose; superconvergence