

# 轴向运动粘弹性板的横向振动特性<sup>\*</sup>

周银锋, 王忠民

(西安理工大学 理学院, 西安 710048)

(陈立群推荐)

摘要: 研究了轴向运动粘弹性矩形薄板的动力特性和稳定性问题. 从二维粘弹性微分型本构关系出发, 建立了轴向运动粘弹性板的运动微分方程. 采用微分求积法, 对四边简支、一对边简支一对边固支两种边界条件下粘弹性板的无量纲复频率进行了数值计算. 分析了薄板的长宽比、无量纲运动速度及材料的无量纲延滞时间对其横向振动及稳定性的影响.

关键词: 轴向运动粘弹性板; 横向振动; 微分求积法

中图分类号: O343 文献标识码: A

## 引 言

轴向运动系统在工程实际中有着广泛的应用, 如动力传送带、磁带、纺织纤维、带锯等. 这些系统, 有的可简化为轴向运动弦线模型, 有的则须简化为轴向运动梁和板模型. 从轴向运动弦线模型来看, 它忽略了物体的抗弯强度. 许多学者在轴向运动弦线的线性振动、非线性振动和稳定性等方面做了大量的研究工作<sup>[1-3]</sup>. 近年来, Chen<sup>[4,5]</sup> 主要研究轴向运动梁问题, 以考虑结构的抗弯刚度对横向振动和稳定性的影响. 对于轴向运动板, 早在 1982 年, Ulsøy<sup>[6]</sup> 把大型带锯的叶片简化为轴向运动板来研究, 分析了板的耦合横向振动和扭转振动. 1997 年, Lin<sup>[7]</sup> 研究了一对边简支一对边固支的轴向运动弹性板的振动和稳定特性. 2003 年, Kim<sup>[8]</sup> 以轴向拉力作用下的轴向运动弹性矩形薄板为研究对象, 分析了轴向运动速度和轴向拉力对板的动力特性和稳定性的影响. 本文主要研究了轴向运动粘弹性板的横向振动和稳定性问题. 采用微分求积法, 分析了轴向运动 Kelvin-Voigt 模型粘弹性板的横向振动特性. 通过数值计算, 得出两种不同边界条件下轴向运动粘弹性薄板的运动速度和横向振动的复频率之间的关系曲线, 并分析了薄板的长宽比、无量纲运动速度及材料的无量纲延滞时间对横向振动和稳定性的影响.

## 1 轴向运动粘弹性板的运动微分方程

如图 1 所示粘弹性矩形薄板, 沿  $x$  方向的运动速度为  $v$ . 设板沿  $x$ 、 $y$  方向的边长分别为  $a$

\* 收稿日期: 2006\_03\_04; 修订日期: 2006\_12\_14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50575180)

作者简介: 周银锋(1975—), 女, 咸阳人, 博士研究生(E-mail: yinfengzhou@163.com);

王忠民(1957—), 男, 陕西华县人, 教授, 博士生导师, 博士(联系人. Tel: + 86\_29\_83292773; E-mail: wangzhongm@xaut.edu.cn).

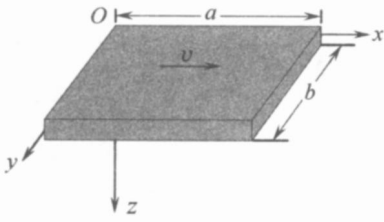


图 1 轴向运动的粘弹性矩形薄板

和  $b$ , 板的厚度为  $h$ , 材料的密度为  $\rho$ . 设粘弹性矩形薄板的体变为弹性, 畸变服从 Kelvin\_Voigt 模型, 其微分型本构方程为<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} s_{ij} = 2Ge_{ij} + 2\eta e_{ij}, \\ \sigma_{ii} = 2K\varepsilon_{ii}, \end{cases} \quad (1)$$

式中  $G$ 、 $K$ 、 $\eta$  分别为材料的剪切弹性模量、体积弹性模量和粘性系数.  $s_{ij}$  和  $e_{ij}$  分别为应力偏量和应变偏量,  $\sigma_{ii}$  和  $\varepsilon_{ii}$  分别为应力球量和应变球量.

根据薄板理论和线粘弹性材料二维平面应力下

在拉氏域内的本构方程<sup>[10]</sup>, 导出轴向运动粘弹性等厚度矩形薄板的运动微分方程

$$\frac{h^3}{12} \left[ A_3 + A_4 \frac{\partial}{\partial t} + A_5 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \cdot^4 w + \rho h \left[ A_1 + A_2 \frac{\partial}{\partial t} \right] \times \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0, \quad (2)$$

式中  $w(x, y, t)$  为板的挠度函数,  $A_1 = 3K + 4G$ ,  $A_2 = 4\eta$ ,  $A_3 = 2G(6K + 2G)$ ,  $A_4 = 8G\eta + 12K\eta$ ,  $A_5 = 4\eta^2$ , 剪切弹性模量  $G = E/(2(1 + \mu))$ , 体积弹性模量  $K = E/(3(1 - \mu))$ ,  $\mu$  为泊松比.

把下列无量纲量

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad w = \frac{w}{h}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \tau = \frac{th}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \mu^2)}}, \\ c &= \frac{a}{h} \sqrt{\frac{12\rho(1 - \mu^2)}{E}} v, \quad H = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1 - \mu^2)}} \frac{\eta}{E} \end{aligned} \quad (3)$$

代入式(2)得无量纲运动微分方程

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{4(2 - \mu)(1 + \mu)}{3} H \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{4(1 - 2\mu)(1 + \mu)^2}{3} H^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \cdot^4 w + \\ & \left[ 1 + \frac{4(1 - 2\mu)(1 + \mu)}{3(1 - \mu)} H \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $\tau$  为无量纲时间,  $c$  为粘弹性板的无量纲轴向运动速度;  $H$  为材料的无量纲延滞时间,

$$\cdot^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \lambda^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4}.$$

设方程(4)的解为  $w(\xi, \eta, \tau) = W(\xi, \eta)e^{j\omega\tau}$ , 得到 Kelvin\_Voigt 模型粘弹性板的轴向运动的无量纲运动微分方程

$$D_1 \cdot^4 W + D_2 \left[ -\omega^2 W + 2j\omega \frac{\partial W}{\partial \xi} + c^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \right] = 0, \quad (5)$$

式中

$$D_1 = 1 - \frac{4(1 - 2\mu)(1 + \mu)^2}{3} H^2 \omega^2 + \frac{4(2 - \mu)(1 + \mu)}{3} H \omega j,$$

$$D_2 = 1 + \frac{4(1 - 2\mu)(1 + \mu)}{3(1 - \mu)} H \omega j,$$

$j = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  为粘弹性板横向振动的无量纲复频率.

四边简支板的边界条件为

$$\begin{cases} \xi = 0, 1: W(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} = 0, \\ \eta = 0, 1: W(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

一对边简支一对边固支板的边界条件为

$$\begin{cases} \xi = 0, 1: W(\xi, \eta) = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \\ \eta = 0, 1: W(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

## 2 微分求积法

微分求积法<sup>[11]</sup> (DQ 法) 本质上是把函数在给定网点上的各阶导数值, 近似地用域上全部网点处的函数值的加权和来表示. 对区域  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  上的光滑函数  $f(x, y)$ ,  $f$  在点  $(x_i, y_j)$  上对  $x$  的  $r$  阶偏导数、对  $y$  的  $s$  阶偏导数及对  $x$  的  $r$  阶对  $y$  的  $s$  阶混合偏导数表示如下<sup>[12]</sup>:

$$\frac{\partial^r f(x_i, y_j)}{\partial x^r} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(r)} f(x_k, y_j) \quad (i = 1, 2, \dots, N; r = 1, 2, \dots, N-1), \quad (8)$$

$$\frac{\partial^s f(x_i, y_j)}{\partial y^s} = \sum_{m=1}^M A_{jm}^{(s)} f(x_i, y_m) \quad (j = 1, 2, \dots, M; s = 1, 2, \dots, M-1), \quad (9)$$

$$\frac{\partial^{r+s} f(x_i, y_j)}{\partial x^r \partial y^s} = \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(r)} \sum_{m=1}^M A_{jm}^{(s)} f(x_i, y_m). \quad (10)$$

其中  $N, M$  分别是  $x$  方向和  $y$  方向节点的个数,  $A_{ik}^{(r)}$  和  $A_{jm}^{(s)}$  分别是加权系数, 由下式确定

$$A_{ik}^{(1)} = \begin{cases} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i, k}}^N (x_i - x_\mu) \setminus \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^N (x_k - x_\mu) & (i, k = 1, 2, \dots, N; k \neq i), \\ \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq k}}^N \frac{1}{x_i - x_\mu} & (i, k = 1, 2, \dots, N; k = i); \end{cases} \quad (11)$$

$$A_{jm}^{(1)} = \begin{cases} \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq j, m}}^M (y_j - y_\mu) \setminus \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M (y_m - y_\mu) & (j, m = 1, 2, \dots, M; m \neq j), \\ \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq m}}^M \frac{1}{y_j - y_\mu} & (j, m = 1, 2, \dots, M; m = j). \end{cases} \quad (12)$$

当  $r = 2, 3, \dots, N-1; s = 2, 3, \dots, M-1$  时, 有

$$A_{ik}^{(r)} = \begin{cases} r \left[ A_{ii}^{(r)} A_{ik}^{(1)} - \frac{A_{ik}^{(r-1)}}{x_i - x_k} \right] & (i, k = 1, 2, \dots, N; k \neq i), \\ - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^N A_{i\mu}^{(r)} & (i = 1, 2, \dots, N; 1 \leq r \leq (N-1); k = i); \end{cases} \quad (13)$$

$$A_{jm}^{(s)} = \begin{cases} s \left[ A_{jj}^{(s)} A_{jm}^{(1)} - \frac{A_{jm}^{(s-1)}}{y_j - y_m} \right] & (j, m = 1, 2, \dots, M; m \neq j), \\ - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq j}}^M A_{j\mu}^{(s)} & (j = 1, 2, \dots, M; 1 \leq s \leq (M-1); m = j). \end{cases} \quad (14)$$

本文采用非均匀节点布置, 四边简支板采用权系数法处理边界条件, 一对边简支一对边固支板采用  $\delta$  法和权系数法相结合处理边界条件. 节点的分布形式为

$$\begin{cases} \xi_1 = 0, \xi_N = 1, \xi_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{2i-3}{2N-4} \pi \right\} \right] & (i = 2, 3, \dots, N-1), \\ \eta_1 = 0, \eta_N = 1, \eta_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{2i-3}{2N-4} \pi \right\} \right] & (i = 2, 3, \dots, N-1); \\ \xi_1 = 0, \xi_N = 1, \xi_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{2i-3}{2N-4} \pi \right\} \right] & (i = 2, 3, \dots, N-1), \\ \eta_1 = 0, \eta_2 = \delta, \eta_{N-1} = 1 - \delta, \eta_N = 1, \eta_i = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left\{ \frac{i-2}{N-3} \pi \right\} \right] & (i = 3, 4, \dots, N-2). \end{cases} \quad (15)$$

这样就得到了方程(5)的微分求积形式

$$\begin{aligned} & \frac{4(2-\mu)(1+\mu)}{3(1-\mu)} H j^3 W \omega^3 + \left[ \frac{4(1-2\mu)(1+\mu)^2}{3} H^2 j^2 \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} W_{kj} + \right. \right. \\ & \left. \left. 2 \lambda^2 \sum_{m=1}^N A_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{km} + \lambda^4 \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(4)} W_{ik} \right) + \right. \\ & \left. \frac{4(2-\mu)(1+\mu)}{3(1-\mu)} 2dH j^2 \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{kj} + j^2 W_j \right] \omega^2 + \\ & \left[ \frac{4(2-\mu)(1+\mu)}{3} H j \left( \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} W_{kj} + 2 \lambda^2 \sum_{m=1}^N A_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{km} + \lambda^4 \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(4)} W_{ik} \right) + \right. \\ & \left. \frac{4(1-2\mu)(1+\mu)}{3(1-\mu)} H j c^2 \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{kj} + 2cj \sum_{k=1}^N A_{ik} W_{kj} \right] \omega + \\ & \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(4)} W_{kj} + 2 \lambda^2 \sum_{m=1}^N A_{jm}^{(2)} \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{km} + \lambda^4 \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(4)} W_{ik} + c^2 \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{kj} = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

边界条件(6)的微分求积形式为

$$\begin{cases} W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0 & (i, j = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(2)} W_{kj} = 0 & (i = 1, N; j = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(2)} W_{ik} = 0 & (j = 1, N; i = 1, 2, \dots, N). \end{cases} \quad (18)$$

边界条件(7)的微分求积形式为

$$\begin{cases} W_{1j} = W_{Nj} = W_{i1} = W_{iN} = 0 & (i, j = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{k=1}^N A_{ik}^{(1)} W_{kj} = 0 & (i = 2, N-1; j = 2, 3, \dots, N-2), \\ \sum_{k=1}^N A_{jk}^{(2)} W_{ik} = 0 & (j = 1, N; i = 1, 2, \dots, N). \end{cases} \quad (19)$$

方程(17)与边界条件(18)或(19)写成矩阵形式,即

$$(\omega^3 \mathbf{Q} + \omega^2 \mathbf{R} + \omega \mathbf{G} + \mathbf{K}) \begin{Bmatrix} W_{ij} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

矩阵  $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{K}$  中含有无量纲延滞时间  $H$ 、无量纲轴向运动速度  $c$ 、板的长宽比  $\lambda$  等参数. 方程(20)构成了广义特征值问题.

### 3 计算结果及分析

当  $H \rightarrow 0$ ,  $c = 0$ ,  $\lambda = 1$  时, 方程(4)退化为弹性方板的横向自由振动的振型微分方程. 为了说明上述方法的有效性, 首先计算了两种不同边界条件下弹性方板的横向自由振动问题的前3阶固有频率, 与精确解<sup>[13]</sup>的比较见表1. 在下列计算中, 取节点数  $N = 9$ .

表1 不同边界条件下弹性方板的前3阶固有频率

边界条件	四边简支			一对边简支一对边固支		
	1阶	2阶	3阶	1阶	2阶	3阶
本文解	19.739 2	49.351 9	78.964 7	28.955 1	54.746 7	69.339 1
精确解 <sup>[13]</sup>	19.73	49.35	78.96	28.95	54.74	69.33

下面对 Kelvin\_Voigt 模型粘弹性轴向运动矩形板的动力特性和稳定性进行计算和分析.

#### 3.1 四边简支板

图2给出了板的长宽比  $\lambda = 1$ , 无量纲延滞时间  $H = 10^{-5}$  时板的前3阶模态的无量纲复频率  $\omega$  随无量纲运动速度  $c$  的变化曲线. 从图中可以看出, 当无量纲运动速度  $c = 0$  时,  $\omega$  为实数. 随着板的无量纲运动速度的增加,  $\omega$  实部减小, 虚部保持为0. 当速度增加到临界速度  $c = 6.31$  时, 第1阶模态频率  $\omega$  的实部变为0, 此后  $\text{Re}(\omega) = 0$ ,  $\text{Im}(\omega)$  为正负两个分支, 说明板发散失稳. 当运动速度进一步增加到  $c = 7.81$  时, 第1阶模态又趋于稳定. 然而系统在稳定后又会在  $c = 8.31$  处  $\text{Re}(\omega) \neq 0$ ,  $\text{Im}(\omega)$  为正负两个分支, 此时第1、2阶模态发生耦合, 产生耦合模态颤振.

图3给出了板的长宽比  $\lambda = 1$ , 无量纲延滞时间  $H = 10^{-3}$  时, 板的前3阶模态的无量纲复频率  $\omega$  随无量纲运动速度  $c$  的变化曲线. 与图2比较得出, 当无量纲运动速度  $c = 0$  时,  $\omega$  为复数, 且其实部比  $H = 10^{-5}$  的实部稍稍有所减小. 随着板的无量纲运动速度的增大,  $\omega$  实部减小, 虚部不再为0, 而是某一正值, 且模态的阶数越高, 复频率的虚部值越大.

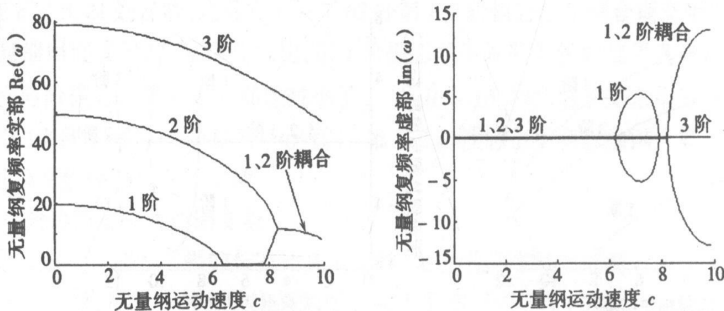


图2 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 1$ )

图4、图5是板的长宽比  $\lambda = 0.8$ , 无量纲延滞时间分别为  $H = 10^{-5}$  和  $H = 10^{-3}$  时板的前

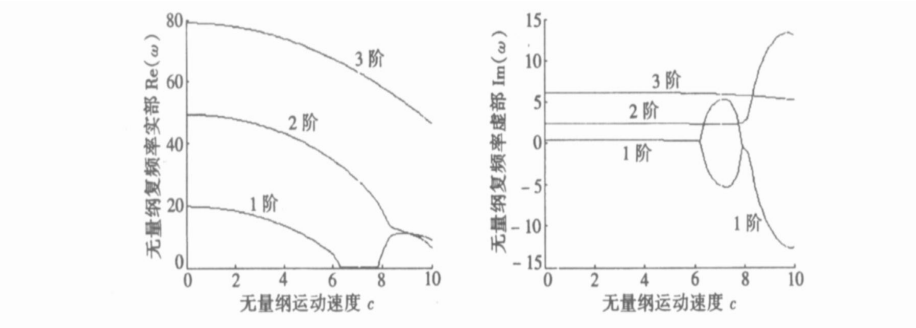


图 3 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-3}$ ,  $\lambda = 1$ )

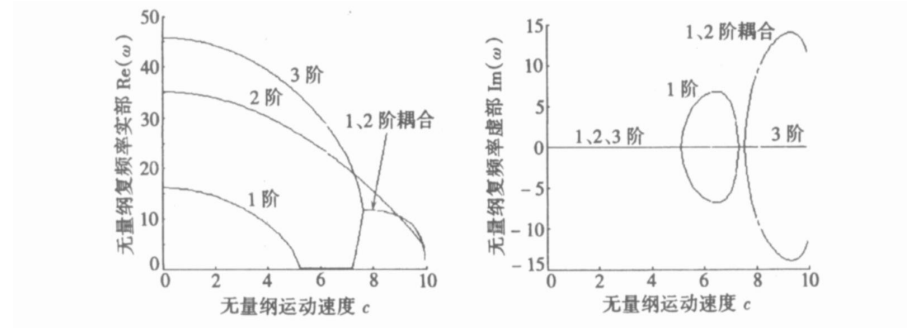


图 4 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 0.8$ )

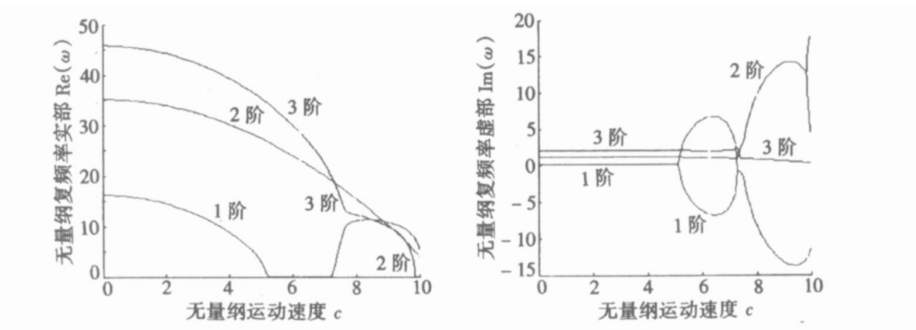


图 5 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-3}$ ,  $\lambda = 0.8$ )

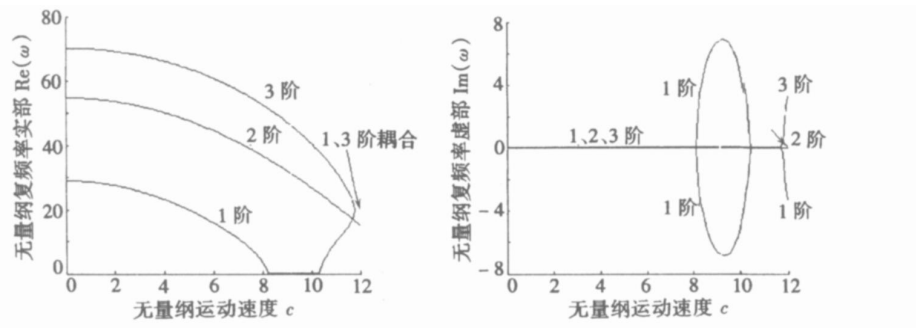


图 6 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 1$ )

3阶模态的无量纲复频率随无量纲运动速度变化曲线图。当  $H = 10^{-5}$  时, 由图 4 看出, 第 1 阶

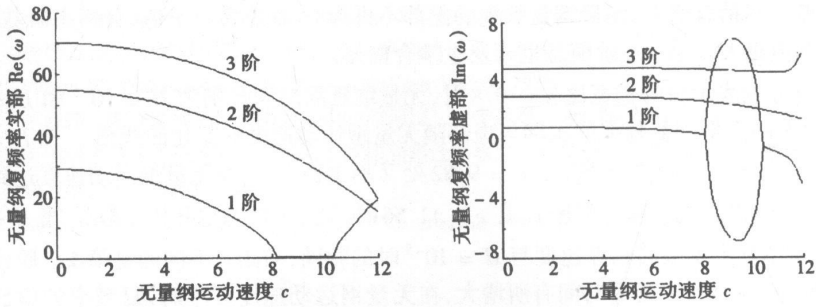


图 7 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-3}$ ,  $\lambda = 1$ )

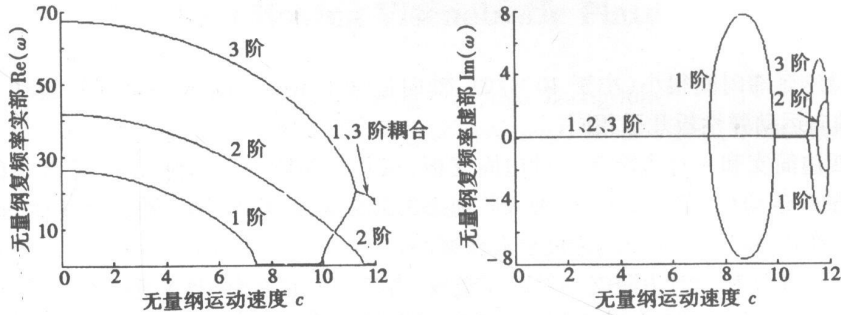


图 8 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-5}$ ,  $\lambda = 0.8$ )

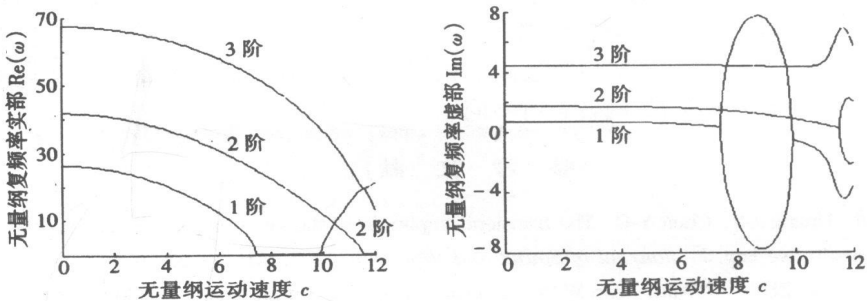


图 9 无量纲复频率的实部及虚部随无量纲运动速度的变化曲线 ( $H = 10^{-3}$ ,  $\lambda = 0.8$ )

模态在  $c = 5.21$  处发散, 之后在  $c = 7.62$  处第 1、2 阶模态发生耦合模态颤振. 与图 2 相比说明, 当延滞时间相等时, 减小长宽比, 第 1 阶模态发生发散失稳的临界速度减小了. 而且在  $c = 0$  处, 各阶模态的复频率实部也减小了. 当  $H = 10^{-3}$  时, 由于无量纲延滞时间增大, 无量纲复频率的虚部不再为 0, 而是某一正值. 第 1、2 阶模态也不会发生耦合模态颤振, 但是在  $c = 9.87$  处第 2 阶模态也开始发散.

### 3.2 一对边简支一对边固支板

图 6、图 7 分别表示板的长宽比  $\lambda = 1$  时, 无量纲延滞时间分别为  $H = 10^{-5}$  和  $H = 10^{-3}$  时前 3 阶模态的无量纲复频率的实部和虚部随无量纲运动速度的变化曲线图. 当  $H = 10^{-5}$  时, 第 1 阶模态在  $c = 8.21$  处发散, 在  $c = 10.31$  处重新趋于稳定. 当无量纲速度增大至  $c = 11.09$  时, 第 1、3 阶模态发生耦合颤振.

当  $H = 10^{-3}$  时, 第 1 阶模态发生发散的临界速度与无量纲延滞时间  $H = 10^{-5}$  时的相同,

但是由于延滞时间稍有增大,无量纲复频率的虚部不再为 0,而是某一正值,且模态阶数越高,复频率的虚部值越大.第 1、3 阶模态也未发生耦合颤振.

图 8、图 9 分别表示板的长宽比  $\lambda = 0.8$  时,无量纲延滞时间分别为  $H = 10^{-5}$  和  $H = 10^{-3}$  时的前 3 阶模态的无量纲复频率的实部与虚部随无量纲运动速度的变化曲线图.当  $H = 10^{-5}$  时,第 1 阶模态在  $c = 7.42$  处发散,在  $c = 9.82$  处又趋于稳定.当无量纲运动速度达到  $c = 11.25$  时,第 1、3 阶模态发生耦合颤振.在  $c = 11.56$  时,第 2 阶模态也开始发散.当  $H = 10^{-3}$  时,第 1、2 阶模态发生发散的临界速度与  $H = 10^{-5}$  时的相同,与图 8 不同的是第 1、3 阶模态不会发生耦合颤振,而且由于延滞时间有所增大,在无量纲运动速度较小时,复频率的虚部不再为 0,而是某一正值.

## 4 结 论

1) 当无量纲延滞时间很小(小于  $10^{-5}$ )时,轴向运动 Kelvin-Voigt 模型粘弹性板动力特性和稳定性与轴向运动弹性板几乎相同.

2) 对于四边简支和一对边简支一对边固支板,在其它参数不变的情况下,随着板的长宽比的减小,无轴向运动板(即  $c = 0$ )的前 3 阶模态的复频率实部都减小,轴向运动板的第 1、2 阶模态发生发散失稳的临界无量纲速度也有所减小.

3) 对于四边简支和一对边简支一对边固支板,当其它参数不变,增大延滞时间时,在无量纲运动速度较小的情况下,前 3 阶模态的复频率虚部不再为 0,而是某一正值,且虚部的值随着模态阶数的提高而增大;延滞时间的增大( $10^{-5} \sim 10^{-3}$ )并不改变第 1 阶模态的发散临界速度和再稳定范围,但是各阶模态不会发生耦合模态颤振.

4) 对于四边简支和一对边简支一对边固支板,初次发生发散失稳的都是第 1 阶模态,但是随后发生耦合模态颤振的模态,两者有所不同.

## [参 考 文 献]

- [1] Fung R\_f, Huang J\_S, Chen Y\_C. The transient amplitude of the viscoelastic traveling string: an integral constitutive law[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, **201**(2): 153\_167.
- [2] CHEN Li\_qun, ZHAO Wei\_jia, Jean W Zu. Transient responses of an axially accelerating viscoelastic string constituted by a fractional differentiation law[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, **278**(4/5): 861\_871.
- [3] CHEN Li\_qun. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings[J]. ASME Applied Mechanics Reviews, 2005, **58**(2): 91\_116.
- [4] CHEN Li\_qun, YANG Xiao\_dong. Steady\_state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models[J]. Internat J Solids and Structures, 2005, **42**(1): 37\_50.
- [5] CHEN Li\_qun, YANG Xiao\_dong. Transverse nonlinear dynamics of axially accelerating viscoelastic beams based on 4\_term Galerkin truncation[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, **27**(3): 748\_757.
- [6] Ulsoy A G, Mote Jr C D. Vibration of wide band saw blades[J]. ASME Journal of Engineering for Industry, 1982, **104**(1): 71\_78.
- [7] Lin C C. Stability and vibration characteristics of axially moving plates[J]. Internat J Solids and Structures, 1997, **34**(24): 3179\_3190.
- [8] Kim Joohong, Cho Jooyong, Lee Usik, et al. Modal spectral element formulation for axially moving



- plates subjected to in-plane axial tension[J]. Computers and Structures, 2003, **81**(20): 2011\_2020.
- [9] 杨挺青. 黏弹性理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] Flügge W. Viscoelasticity [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
- [11] 王鑫伟. 微分求积法在结构力学中的应用[J]. 力学进展, 1995, **25**(2): 232\_240.
- [12] 阿尔赛夫 A S J, 朱正佑. 求解粘性流体和热迁移联立方程的迎风局部微分求积法[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(10): 1034\_1041.
- [13] Goman D J. Free Vibration Analysis of Rectangular Plates [M]. New York: Elsevier North Holland, Inc, 1982.

## Transverse Vibration Characteristics of Axially Moving Viscoelastic Plate

ZHOU Yin\_feng, WANG Zhong\_min

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, P. R. China)

**Abstract:** The dynamic characteristics and stability of axially moving viscoelastic rectangular thin plate are investigated. Based on the two dimensional viscoelastic differential constitutive relation, the differential equations of motion of the axially moving viscoelastic plate were established. Dimensionless complex frequencies of an axially moving viscoelastic plate with four edges simply supported, two opposite edges simply supported and other two edges clamped were calculated by the differential quadrature method. The effects of the aspect ratio, moving speed and dimensionless delay time of the material on the transverse vibration and stability of the axially moving viscoelastic plate were analyzed.

**Key words:** axially moving viscoelastic plate; transverse vibration; differential quadrature method